$\boxed{15}$ ［東北大］

$xy$ 平面における曲線 $y=\sin x$ の 2 つの接線が直交するとき，その交点の $y$ 座標の値をすべて求めよ。

**16**　［金沢大］

座標平面に 2 曲線 $C_1 : y=\sqrt{x}-4\ (x>0)$ と $C_2 : y=-\sqrt{1-x}\ (x<1)$ がある。次の問いに答えよ。

(1)　$C_1$ は区間 $x>0$ で上に凸であることを示せ。

(2)　点 $\mathrm{F}\left(\dfrac{1}{2},\ -2\right)$ に関して，点 P と対称な点を Q とする。点 P が $C_1$ 上を動くとき，点 Q の軌跡が $C_2$ であることを示せ。

(3)　$C_1$ 上の点 A における法線 $l$ が点 F を通るとし，$l$ と $C_2$ の共有点を B とする。このとき，A の座標 $(x_1,\ y_1)$ および B の座標 $(x_2,\ y_2)$ をそれぞれ求めよ。

(4)　$C_1$ 上に点 $\mathrm{X}_1$，$C_2$ 上に点 $\mathrm{X}_2$ をとる。線分 $\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2$ の長さの最小値を求めよ。

**17**　　［東京大］

以下の問いに答えよ。

(1)　$n$ を 1 以上の整数とする。$x$ についての方程式 $x^{2n-1}=\cos x$ は，ただ 1 つの実数解 $a_n$ をもつことを示せ。

(2)　(1)で定まる $a_n$ に対し，$\cos a_n>\cos 1$ を示せ。

(3)　(1)で定まる数列 $a_1$，$a_2$，$a_3$，…，$a_n$，…に対し，

$$a=\lim_{n\to\infty}a_n,\quad b=\lim_{n\to\infty}{a_n}^n,\quad c=\lim_{n\to\infty}\frac{{a_n}^n-b}{a_n-a}$$

を求めよ。

$\boxed{15}$ ［東北大］

$y=\sin x$ に対して $y'=\cos x$ となり，点 $(\alpha,\ \sin\alpha)$ における接線の方程式は，

$$y-\sin\alpha=\cos\alpha(x-\alpha),\quad y=x\cos\alpha-\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\ \cdots\cdots\cdots①$$

同様に，$\alpha\neq\beta$ として，点 $(\beta,\ \sin\beta)$ における接線の方程式は，

$$y=x\cos\beta-\beta\cos\beta+\sin\beta\ \cdots\cdots\cdots②$$

条件より，①と②が直交するので，$\cos\alpha\cos\beta=-1\ \cdots\cdots\cdots③$

ここで，③の両辺に絶対値をとると，$|\cos\alpha||\cos\beta|=1$ となり，このとき $|\cos\alpha|<1$ と仮定すると $|\cos\beta|>1$ となり不適である。これより，$|\cos\alpha|=1$ であり，③から，

$$(\cos\alpha,\ \cos\beta)=(1,\ -1),\ (-1,\ 1)$$

さらに，一般性を失うことなく，$\cos\alpha\geqq\cos\beta$ とできるので，

$$(\cos\alpha,\ \cos\beta)=(1,\ -1)$$

そこで，$m, n$ を整数として，$(\alpha,\ \beta)=(2m\pi,\ (2n+1)\pi)$ とおくと，①②は，

$$y=x-2m\pi\ \cdots\cdots\cdots③,\quad y=-x+(2n+1)\pi\ \cdots\cdots\cdots④$$

③④を連立して，$2y=(-2m+2n+1)\pi$，$y=\dfrac{2(n-m)+1}{2}\pi$

$k=n-m$ とおくと，求める交点の $y$ 座標は，整数 $k$ を用いて $y=\dfrac{2k+1}{2}\pi$ と表せる。

［解 説］

三角関数のグラフの接線を題材にした問題です。ポイントは③の処理だけです。

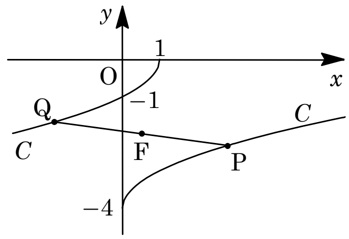
$\boxed{16}$ ［金沢大］

(1)　$C_1 : y=\sqrt{x}-4=x^{\frac{1}{2}}-4\ (x>0)\cdots\cdots$①に対して,

$$y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,,\quad y''=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$$

すると，$x>0$で$y''<0$より，$C_1$は区間$x>0$で上に凸である。

(2)　$C_1$ 上を動く点 $\mathrm{P}(t,\ \sqrt{t}-4)\ (t>0)$ に対し，点 $\mathrm{F}\left(\frac{1}{2},\ -2\right)$に関して対称な点を$\mathrm{Q}(u,\ v)$とおくと,



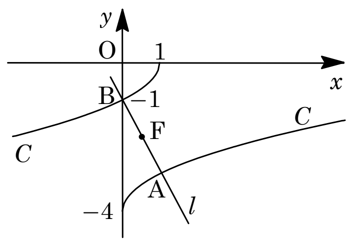

$$u=2\cdot\frac{1}{2}-t=1-t$$

$$v=2\cdot(-2)-(\sqrt{t}-4)=-\sqrt{t}$$

これより, $t$を消去すると$v=-\sqrt{1-u}$となり，$t>0$から$u<1$となる。

すなわち，$\mathrm{Q}(u,\ v)$の軌跡は，$C_2 : y=-\sqrt{1-x}\ (x<1)\cdots\cdots$②である。

(3)　$C_1$ 上の点$\mathrm{A}(x_1,\ \sqrt{x_1}-4)$での接線の傾きは$\dfrac{1}{2\sqrt{x_1}}$より，法線 $l$ は傾きが$-2\sqrt{x_1}$となり，その方程式は,




$$y-(\sqrt{x_1}-4)=-2\sqrt{x_1}\,(x-x_1)$$

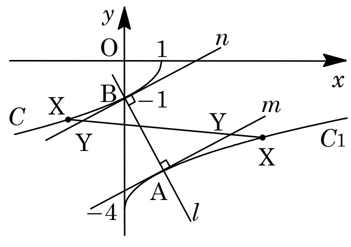
点$\mathrm{F}\left(\frac{1}{2},\ -2\right)$を通ることより,

$$-2-\sqrt{x_1}+4=-2\sqrt{x_1}\left(\frac{1}{2}-x_1\right)$$

すると，$-\sqrt{x_1}+2=-\sqrt{x_1}+2x_1\sqrt{x_1}$から$x_1\sqrt{x_1}=1$となり，$x_1^{\ 3}=1$である。

これより，$x_1=1$となり$\mathrm{A}(1,\ -3)$である。また，$C_2$と $l$ の共有点 B は，(2)より$\mathrm{F}\left(\frac{1}{2},\ -2\right)$に関して A と点対称なので，$\mathrm{B}(0,\ -1)$である。

(4)　(1)より$C_1$は上に凸なので，$C_1$を F に関して点対称移動した$C_2$は下に凸である。




ここで，A における$C_1$の接線を $m$，B における$C_2$の接線を $n$ とおくと，$n$ は $m$ を F に関して点対称移動したものなので$m\,/\!/\,n$となる。そして，A を除く$C_1$上の点は $m$ の下側，B を除く$C_2$上の点は $n$ の上側に位置する。

さて，$C_1$上に点$\mathrm{X}_1$，$C_2$上に点$\mathrm{X}_2$をとり，線分$\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2$と $m$，$n$ の交点をそれぞれ$\mathrm{Y}_1$，$\mathrm{Y}_2$とおくと，$\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2\geqq\mathrm{Y}_1\mathrm{Y}_2\geqq\mathrm{AB}$である。

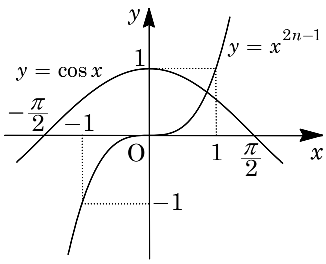
したがって，線分$\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2$の長さの最小値は,

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(0-1)^2+(-1+3)^2}=\sqrt{5}$$

［解 説］

点対称な 2 つの曲線間の距離を題材にした微分の応用問題です。(4)がメインですが，それまでの設問が誘導になっています。類題が気になったので調べたところ，線対称の場合ですが，1999 年の東大・文で出題されていました。

$\boxed{17}$　　　　［東京大］




(1)　$n$ を自然数とする方程式 $x^{2n-1} = \cos x$ ……①に対し，

$y = x^{2n-1}$ ………②，$y = \cos x$ ………③

すると，①の実数解は，曲線②と③の共有点の $x$ 座標が対応する。

(i)　$x < -1$ のとき　$x^{2n-1} < -1 \leqq \cos x$

(ii)　$-1 \leqq x < 0$ のとき　$x^{2n-1} < 0 < \cos x$

(iii)　$x > 1$ のとき　$x^{2n-1} > 1 \geqq \cos x$

(i)〜(iii)より，$x < 0$，$1 < x$ では，曲線②と③は共有点をもたない。

ここで，$0 \leqq x \leqq 1$ において，$f(x) = x^{2n-1} - \cos x$ とおくと，

$$f'(x) = (2n-1)x^{2n-2} + \sin x$$

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-1$ | $\nearrow$ | $1-\cos 1$ |

これより，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$1 - \cos 1 > 0$ から，$f(x) = 0$ は $0 < x < 1$ においてただ 1 つの実数解をもつ。

よって，方程式①は，ただ 1 つの実数解を $0 < x < 1$ にもつ。

(2)　①の実数解を $a_n$ とすると，(1)より $0 < a_n < 1$ なので，$\cos a_n > \cos 1$ である。

(3)　①より，${a_n}^{2n-1} = \cos a_n$ ……④となり，$(2n-1)\log a_n = \log(\cos a_n)$ から，

$$\log a_n = \frac{\log(\cos a_n)}{2n-1} \text{ ………⑤}$$

ここで，(2)から $\cos 1 < \cos a_n < 1$ なので，$\dfrac{\log(\cos 1)}{2n-1} < \dfrac{\log(\cos a_n)}{2n-1} < \dfrac{\log 1}{2n-1} = 0$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(\cos 1)}{2n-1} = 0$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(\cos a_n)}{2n-1} = 0$ となり，⑤から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log a_n = 0$

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} e^{\log a_n} = e^0 = 1$$

次に，④より ${a_n}^{2n} = a_n \cos a_n$ となり，${a_n}^n = \sqrt{a_n \cos a_n}$ ……⑥から，

$$b = \lim_{n\to\infty} {a_n}^n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n\cos a_n} = \sqrt{a\cos a} = \sqrt{\cos 1} \text{ ………⑦}$$

また，$g(x) = \sqrt{x\cos x}$ とおくと，$g'(x) = \dfrac{\cos x - x\sin x}{2\sqrt{x\cos x}}$

⑥から ${a_n}^n = g(a_n)$，⑦から $b = g(1)$ となり，$n \to \infty$ のとき $a_n \to 1$ なので，

$$c = \lim_{n\to\infty}\frac{{a_n}^n - b}{a_n - a} = \lim_{a_n\to 1}\frac{g(a_n) - g(1)}{a_n - 1} = g'(1) = \frac{\cos 1 - \sin 1}{2\sqrt{\cos 1}}$$

［解　説］

微分の応用と極限の融合題です。(1)(2)は図の説明です。(3)が $a$，$b$ だけであれば他の方法も考えられるものの，$c$ の式を微分係数の定義式と対比させるとすると……。