$\boxed{12}$ ［信州大］

次の問いに答えよ。

(1) $a>1$ とする。不等式 $(1+t)^a \leqq K(1+t^a)$ がすべての $t \geqq 0$ に対して成り立つような実数 K の最小値を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(1+\sqrt[5]{1+\sin x}\,\right)^{10} dx < 6080$ を示せ。ただし，$\pi < 3.15$ であることを用いてよい。

$\boxed{13}$ ［大阪大］

以下の問いに答えよ。ただし，log は自然対数，e はその底とする。

(1)　b を実数とする。関数 $f(x)=\displaystyle\int_x^b e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt-\frac{x}{x^2+1}e^{-\frac{x^2}{2}}$ は単調に減少することを示せ。

(2)　$a\leqq b$ を満たす正の実数 $a,\ b$ に対し，不等式

$$\frac{a}{a^2+1}e^{-\frac{a^2}{2}}-\frac{b}{b^2+1}e^{-\frac{b^2}{2}}\leqq\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\leqq e^{-\frac{a^2}{2}}(b-a)$$

が成り立つことを示せ。

(3)　数列 $\{I_n\}$ を次のように定める。$I_n=\displaystyle\int_1^2 e^{-\frac{nt^2}{2}}\,dt\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

このとき極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log I_n$ を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(n+1)=0$ を用いてもよい。

14 ［広島大］

関数 $f(x)$ は実数全体で連続で，すべての実数 x に対して

$$f(x)=(1-x)\cos x+x\sin x-\int_0^x e^{x-t}f(t)\,dt$$

を満たすとする。ただし，e は自然対数の底である。次の問いに答えよ。

(1)　$f(0)$ の値を求めよ。また，$f'(x)=2(x-1)\cos x$ が成り立つことを示せ。

(2)　$f(x)$ を求めよ。

(3)　方程式 $f(x)=0$ は，$0<x<\pi$ の範囲でただ 1 つの解をもつことを示せ。

(4)　(3)のただ 1 つの解を α とする。曲線 $y=f(x)$ $(0\leqq x\leqq\alpha)$，x 軸および y 軸によって囲まれる部分の面積を S_1 とし，曲線 $y=f(x)$ $(\alpha\leqq x\leqq\pi)$，x 軸および直線 $x=\pi$ によって囲まれる部分の面積を S_2 とする。S_1 と S_2 の大小を判定せよ。

$\boxed{15}$ ［東京工大］

次の等式が $1 \leqq x \leqq 2$ で成り立つような関数 $f(x)$ と定数 A, B を求めよ。

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} |\log y| f(xy)\,dy = 3x(\log x - 1) + A + \frac{B}{x}$$

ただし，$f(x)$ は $1 \leqq x \leqq 2$ に対して定義される連続関数とする。

$\boxed{16}$ ［東北大］

(1) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}dx = \int_0^1 \sin^2(\pi x)dx = \frac{1}{2}$$

(2) 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$(1+e^x)f(x) = \sin^2(\pi x) + \int_{-1}^{1}(e^x - e^t + 1)f(t)dt$$

12　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［信州大］

(1)　すべての $t \geqq 0$ に対して $(1+t)^a \leqq K(1+t^a)$ ……①から，$K \geqq \dfrac{(1+t)^a}{1+t^a}$ として，

$f(t)=\dfrac{(1+t)^a}{1+t^a}$ とおくと，①は $K \geqq f(t)$ となり，

$$f'(t)=\frac{a(1+t)^{a-1}(1+t^a)-(1+t)^a\cdot at^{a-1}}{(1+t^a)^2}=\frac{a(1+t)^{a-1}(1-t^{a-1})}{(1+t^a)^2}$$

すると，$a>1$ から $t \geqq 0$ における $f(t)$ の増減は右表のようになり，最大値は 2^{a-1} である。

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$	1	$\nearrow$	2^{a-1}	$\searrow$

これより，すべての $t \geqq 0$ に対して①を満たす実数 K の最小値は，2^{a-1} となる。

(2)　(1)から，$a>1$ のとき，すべての $t \geqq 0$ に対して $(1+t)^a \leqq 2^{a-1}(1+t^a)$ が成り立ち，ここで $t=\sqrt[5]{1+\sin x} \geqq 0$，$a=10$ とおくと，

$$\left(1+\sqrt[5]{1+\sin x}\right)^{10} \leqq 2^9\{1+(1+\sin x)^2\}=2^9(2+2\sin x+\sin^2 x)$$

すると，$\displaystyle\int_0^{\pi}\left(1+\sqrt[5]{1+\sin x}\right)^{10}dx \leqq 2^9\int_0^{\pi}(2+2\sin x+\sin^2 x)\,dx$ ……②となり，

$$\int_0^{\pi}(2+2\sin x+\sin^2 x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(4+4\sin x+1-\cos 2x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}(5\pi+4\cdot 2-0)=\frac{1}{2}(5\pi+8)\ \text{………③}$$

②③より，$\pi<3.15$ を用いると，

$$\int_0^{\pi}\left(1+\sqrt[5]{1+\sin x}\right)^{10}dx \leqq 2^8(5\pi+8)<2^8(5\times 3.15+8)=6080$$

［解 説］

定積分と不等式の標準的なな問題です。(1)の誘導が(2)にストレートに繋がっています。

$\boxed{13}$ ［大阪大］

(1)　b を実数とするとき，$f(x)=\int_x^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt-\dfrac{x}{x^2+1}e^{-\frac{x^2}{2}}$ に対し，

$$f'(x)=-e^{-\frac{x^2}{2}}-\frac{(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}e^{-\frac{x^2}{2}}-\frac{x}{x^2+1}\cdot(-x)e^{-\frac{x^2}{2}}$$
$$=\frac{-(x^2+1)^2-(-x^2+1)+x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^2}e^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{-2}{(x^2+1)^2}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

これより，$f'(x)<0$ となるので，$f(x)$ は単調に減少する。

(2)　$0<a\leqq b$ のとき，(1)から $f(a)\geqq f(b)$ となり，

$$\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt-\frac{a}{a^2+1}e^{-\frac{a^2}{2}}\geqq\int_b^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt-\frac{b}{b^2+1}e^{-\frac{b^2}{2}}$$

よって，$\dfrac{a}{a^2+1}e^{-\frac{a^2}{2}}-\dfrac{b}{b^2+1}e^{-\frac{b^2}{2}}\leqq\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ ………①

また，$g(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$ とおくと，$g(t)$ は $t>0$ で単調に減少し，$0<a\leqq t\leqq b$ において，$e^{-\frac{t^2}{2}}\leqq e^{-\frac{a^2}{2}}$ となるので，

$$\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt\leqq\int_a^b e^{-\frac{a^2}{2}}dt=e^{-\frac{a^2}{2}}(b-a)\text{ ………②}$$

①②より，$\dfrac{a}{a^2+1}e^{-\frac{a^2}{2}}-\dfrac{b}{b^2+1}e^{-\frac{b^2}{2}}\leqq\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt\leqq e^{-\frac{a^2}{2}}(b-a)$ ………③

(3)　$I_n=\int_1^2 e^{-\frac{nt^2}{2}}dt$ に対し，$s=\sqrt{n}\,t$ とおくと，$ds=\sqrt{n}\,dt$ となり，

$$I_n=\int_{\sqrt{n}}^{2\sqrt{n}}e^{-\frac{s^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}ds=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{\sqrt{n}}^{2\sqrt{n}}e^{-\frac{s^2}{2}}ds$$

すると，③から，$\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}e^{-\frac{n}{2}}-\dfrac{2\sqrt{n}}{4n+1}e^{-\frac{4n}{2}}\leqq\sqrt{n}I_n\leqq e^{-\frac{n}{2}}(2\sqrt{n}-\sqrt{n})$ となり，

$$\frac{1}{n+1}e^{-\frac{n}{2}}-\frac{2}{4n+1}e^{-2n}\leqq I_n\leqq e^{-\frac{n}{2}}\text{ ………④}$$

ここで，$\dfrac{1}{n+1}e^{-\frac{n}{2}}-\dfrac{2}{4n+1}e^{-2n}=\dfrac{1}{n+1}\Big(1-\dfrac{2n+2}{4n+1}e^{-\frac{3n}{2}}\Big)e^{-\frac{n}{2}}$ なので，④から，

$$-\log(n+1)+\log\Big(1-\frac{2n+2}{4n+1}e^{-\frac{3n}{2}}\Big)-\frac{n}{2}\leqq\log I_n\leqq-\frac{n}{2}$$
$$-\frac{1}{n}\log(n+1)+\frac{1}{n}\log\Big(1-\frac{2n+2}{4n+1}e^{-\frac{3n}{2}}\Big)-\frac{1}{2}\leqq\frac{1}{n}\log I_n\leqq-\frac{1}{2}\text{ ………⑤}$$

そこで，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\log(n+1)=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\log\Big(1-\dfrac{2n+2}{4n+1}e^{-\frac{3n}{2}}\Big)=0$ なので，⑤から，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log I_n=-\frac{1}{2}$$

［解 説］

定積分と不等式および極限に関する標準的な問題です。(3)は，(2)の結果を利用するために，冒頭での置換がポイントになっています。なお，⑤式への変形は，問題文のコメントからヒントを得ています。

14　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［広島大］

(1)　連続関数 $f(x)$ は，$f(x)=(1-x)\cos x+x\sin x-\int_0^x e^{x-t}f(t)\,dt$ を満たし，

$$f(x)=(1-x)\cos x+x\sin x-e^x\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt \cdots\cdots\cdots ①$$

すると，$f(0)=\cos 0=1$ となり，①の両辺を微分すると，

$$f'(x)=-\cos x-(1-x)\sin x+\sin x+x\cos x-e^x\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt-e^xe^{-x}f(x)$$

$$=(x-1)\cos x+x\sin x-e^x\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt-f(x) \cdots\cdots\cdots ②$$

①より，$f(x)+e^x\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt=(1-x)\cos x+x\sin x$ なので，②に代入して，

$$f'(x)=(x-1)\cos x+x\sin x-(1-x)\cos x-x\sin x=2(x-1)\cos x \cdots\cdots\cdots ③$$

(2)　③より，$f(x)=\int 2(x-1)\cos x\,dx$ となり，C を定数として，

$$f(x)=2(x-1)\sin x-2\int\sin x\,dx=2(x-1)\sin x+2\cos x+C$$

ここで，$f(0)=1$ から，$2+C=1$ すなわち $C=-1$ となり，

$$f(x)=2(x-1)\sin x+2\cos x-1$$

(3)　③より，$0\leqq x\leqq\pi$ での $f(x)$ の増減は右表のようになる。

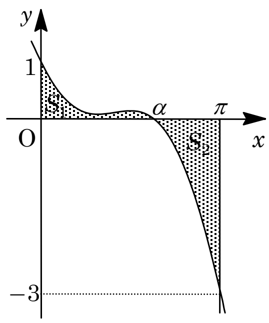
x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	-3

ここで，$1<\frac{\pi}{3}$ に注意すると，

$$\cos 1>\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

すると，$f(1)=2\cos 1-1>2\cdot\frac{1}{2}-1=0$ となり，方程式 $f(x)=0$ は，$0<x<\pi$ の範囲でただ１つの解をもつ。

(4)　$f(\alpha)=0$ として，右図の網点部の面積を S_1，S_2 とすると，



$S_1=\int_0^\alpha f(x)\,dx$，$S_2=-\int_\alpha^\pi f(x)\,dx$ となり，

$$S_1-S_2=\int_0^\alpha f(x)\,dx+\int_\alpha^\pi f(x)\,dx=\int_0^\pi f(x)\,dx$$

$$=\int_0^\pi\{2(x-1)\sin x+2\cos x-1\}\,dx$$

$$=-2\Big[(x-1)\cos x\Big]_0^\pi+2\int_0^\pi\cos x\,dx+0-\pi$$

$$=2(\pi-1)-2+0-\pi=\pi-4<0$$

よって，$S_1<S_2$ である。

［解 説］

微積分の総合問題です。微分型の積分方程式を解くことから始め，面積計算へと繋ぐ構図になっています。いずれも，頻出題です。

15　　［東京工大］

$1 \leqq x \leqq 2$ のとき，$\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} |\log y| f(xy)\,dy = 3x(\log x - 1) + A + \frac{B}{x}$ ………①

ここで，$xy = t$ とおくと $x\,dy = dt$ となり，$y = \dfrac{1}{x} \to \dfrac{2}{x}$ は $t = 1 \to 2$ に対応し，

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} |\log y| f(xy)\,dy = \int_1^2 \left|\log\frac{t}{x}\right| f(t)\cdot\frac{1}{x}\,dt = \frac{1}{x}\int_1^2 |\log t - \log x| f(t)\,dt$$

$$= -\frac{1}{x}\int_1^x (\log t - \log x) f(t)\,dt + \frac{1}{x}\int_x^2 (\log t - \log x) f(t)\,dt$$

$$= -\frac{1}{x}\int_1^x (\log t) f(t)\,dt + \frac{\log x}{x}\int_1^x f(t)\,dt + \frac{1}{x}\int_x^2 (\log t) f(t)\,dt - \frac{\log x}{x}\int_x^2 f(t)\,dt$$

①の両辺を x 倍すると，$\displaystyle x\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} |\log y| f(xy)\,dy = 3x^2(\log x - 1) + Ax + B$ となり，

$$-\int_1^x (\log t) f(t)\,dt + (\log x)\int_1^x f(t)\,dt + \int_x^2 (\log t) f(t)\,dt - (\log x)\int_x^2 f(t)\,dt$$

$$= 3x^2(\log x - 1) + Ax + B \text{ ………②}$$

ここで，②の左辺を $F(x)$，右辺を $G(x)$ とおくと，

$$F'(x) = -(\log x) f(x) + \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt + (\log x) f(x) - (\log x) f(x)$$

$$-\frac{1}{x}\int_x^2 f(t)\,dt + (\log x) f(x)$$

$$= \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt - \frac{1}{x}\int_x^2 f(t)\,dt$$

$$G'(x) = 6x(\log x - 1) + 3x^2\cdot\frac{1}{x} + A = 6x\log x - 3x + A$$

すると，$\displaystyle\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt - \frac{1}{x}\int_x^2 f(t)\,dt = 6x\log x - 3x + A$ から，両辺を x 倍すると，

$$\int_1^x f(t)\,dt - \int_x^2 f(t)\,dt = 6x^2\log x - 3x^2 + Ax \text{ ………③}$$

さらに，③の両辺を x で微分して，

$$f(x) + f(x) = 12x\log x + 6x^2\cdot\frac{1}{x} - 6x + A$$

$$f(x) = 6x\log x + \frac{A}{2} \text{ ………④}$$

さて，②に $x = 1$ を代入すると，$\displaystyle\int_1^2 (\log t) f(t)\,dt = -3 + A + B$ ………⑤

また，③に $x = 1$ を代入すると，$\displaystyle -\int_1^2 f(t)\,dt = -3 + A$

$$3 - A = \int_1^2 f(t)\,dt \text{ ………⑥}$$

④を⑥に代入して，

$$3-A=\int_1^2\left(6t\log t+\frac{A}{2}\right)dt=\left[\,3t^2\log t\,\right]_1^2-\int_1^2 3t\,dt+\frac{A}{2}(2-1)$$

$$=12\log 2-\frac{3}{2}(2^2-1^2)+\frac{A}{2}=12\log 2-\frac{9}{2}+\frac{A}{2}$$

よって，$\dfrac{3}{2}A=\dfrac{15}{2}-12\log 2$ より，$A=5-8\log 2$ となり，④から，

$$f(x)=6x\log x+\frac{5}{2}-4\log 2$$

⑤に代入して，$\displaystyle\int_1^2(\log t)f(t)\,dt=-3+(5-8\log 2)+B$ となり，

$$B=\int_1^2(\log t)\left(6t\log t+\frac{5}{2}-4\log 2\right)dt-2+8\log 2$$

$$=6\int_1^2 t(\log t)^2dt+\left(\frac{5}{2}-4\log 2\right)\int_1^2\log t\,dt-2+8\log 2$$

ここで，$\displaystyle\int_1^2\log t\,dt=\left[\,t\log t-t\,\right]_1^2=2\log 2-1$

$$\int_1^2 t(\log t)^2dt=\left[\,\frac{t^2}{2}(\log t)^2\,\right]_1^2-\int_1^2\frac{t^2}{2}\cdot 2(\log t)\cdot\frac{1}{t}\,dt$$

$$=2(\log 2)^2-\int_1^2 t\log t\,dt=2(\log 2)^2-2\log 2+\frac{3}{4}$$

以上，まとめると，

$$B=6\left\{2(\log 2)^2-2\log 2+\frac{3}{4}\right\}+\left(\frac{5}{2}-4\log 2\right)(2\log 2-1)-2+8\log 2$$

$$=12(\log 2)^2-12\log 2+\frac{9}{2}-8(\log 2)^2+9\log 2-\frac{5}{2}-2+8\log 2$$

$$=4(\log 2)^2+5\log 2$$

［解　説］

いわゆる微分型と呼ばれるタイプの積分方程式です。解の構図は，微分して初期条件を求めることを 2 回くり返すという定型的なものです。それ以外のポイントとしては，分数関数は微分すると一般的に複雑になるので，その前に両辺を x 倍するというぐらいです。それでも，計算量は半端ではありませんが。

16　　　　［東北大］

(1)　$I=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}dx$ とおくと，$I=\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}dx+\int_{0}^{1}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}dx$

ここで，$x=-t$ とおくと，$dx=-dt$ となり，

$$\int_{-1}^{0}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}dx=-\int_{1}^{0}\frac{\sin^2(-\pi t)}{1+e^{-t}}dt=\int_{0}^{1}\frac{e^t\sin^2(\pi t)}{e^t+1}dt$$

すると，$\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{e^t\sin^2(\pi t)}{e^t+1}dt=\int_{0}^{1}\frac{e^x\sin^2(\pi x)}{1+e^x}dx$ なので，

$$I=\int_{0}^{1}\Big\{\frac{e^x\sin^2(\pi x)}{1+e^x}+\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\Big\}dx=\int_{0}^{1}\sin^2(\pi x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\{1-\cos(2\pi x)\}dx=\frac{1}{2}\Big[x-\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi}\Big]_{0}^{1}=\frac{1}{2}$$

(2)　条件より，$(1+e^x)f(x)=\sin^2(\pi x)+\displaystyle\int_{-1}^{1}(e^x-e^t+1)f(t)dt$

$$(1+e^x)f(x)=\sin^2(\pi x)+(e^x+1)\int_{-1}^{1}f(t)dt-\int_{-1}^{1}e^tf(t)dt$$

ここで，$a=\displaystyle\int_{-1}^{1}f(t)dt$ ……①，$b=\displaystyle\int_{-1}^{1}e^tf(t)dt$ ……②とおくと，

$$(1+e^x)f(x)=\sin^2(\pi x)+a(e^x+1)-b$$

$$f(x)=\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}+a-\frac{b}{1+e^x}\ \cdots\cdots\cdots③$$

①③より，$a=\displaystyle\int_{-1}^{1}\Big\{\frac{\sin^2(\pi t)}{1+e^t}+a-\frac{b}{1+e^t}\Big\}dt=\frac{1}{2}+2a-b\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+e^t}dt$ となり，

$$a=-\frac{1}{2}+b\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+e^t}dt$$

ここで，$J=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+e^t}dt$ として，$t=-s$ とおくと $dt=-ds$ となり，

$$J=-\int_{1}^{-1}\frac{1}{1+e^{-s}}ds=\int_{-1}^{1}\frac{e^s}{e^s+1}ds=\int_{-1}^{1}\frac{e^t}{1+e^t}dt$$

これより，$J+J=\displaystyle\int_{-1}^{1}\Big\{\frac{1}{1+e^t}+\frac{e^t}{1+e^t}\Big\}dt=\int_{-1}^{1}dt=2$ となり，$J=1$ なので，

$$a=-\frac{1}{2}+b\ \cdots\cdots\cdots④$$

②③より，$b=\displaystyle\int_{-1}^{1}\Big\{\frac{e^t\sin^2(\pi t)}{1+e^t}+ae^t-\frac{be^t}{1+e^t}\Big\}dt$ となり，$\displaystyle\int_{-1}^{1}e^t\,dt=e-\frac{1}{e}$

$$\int_{-1}^{1}\frac{e^t}{1+e^t}dt=\big[\log(1+e^t)\big]_{-1}^{1}=\log\frac{1+e}{1+e^{-1}}=\log e=1$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{e^t\sin^2(\pi t)}{1+e^t}dt=\int_{-1}^{1}\Big\{\sin^2(\pi t)-\frac{\sin^2(\pi t)}{1+e^t}\Big\}dt=2\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

よって，$b=\frac{1}{2}+\left(e-\frac{1}{e}\right)a-b$ から，$b=\frac{1}{4}+\frac{e^2-1}{2e}a$ ………⑤

④⑤より，$a=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{e^2-1}{2e}a$ となり，$\frac{e^2-2e-1}{2e}a=\frac{1}{4}$ となり，

$$a=\frac{e}{2(e^2-2e-1)},\quad b=\frac{e}{2(e^2-2e-1)}+\frac{1}{2}=\frac{e^2-e-1}{2(e^2-2e-1)}$$

以上より，$f(x)=\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}-\frac{e^2-e-1}{2(e^2-2e-1)}\cdot\frac{1}{1+e^x}+\frac{e}{2(e^2-2e-1)}$ である。

［解 説］

積分方程式の問題です。置換え型と呼ばれるタイプの典型題ですが，ただ計算量は中途半端ではありません。(1)の誘導も含めてですが。