9　　［東北大］

a を実数とし，数列 $\{x_n\}$ を次の漸化式によって定める。

$$x_1 = a,\ \ x_{n+1} = x_n + {x_n}^2 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　$a > 0$ のとき，数列 $\{x_n\}$ が発散することを示せ。

(2)　$-1 < a < 0$ のとき，すべての正の整数 n に対して $-1 < x_n < 0$ が成り立つことを示せ。

(3)　$-1 < a < 0$ のとき，数列 $\{x_n\}$ の極限を調べよ。

$\boxed{10}$ ［筑波大］

数列$\{a_n\}$を$a_n=\dfrac{1}{2^n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$で定める。以下の問いに答えよ。

(1) $t>0$のとき，$1 \leqq \dfrac{e^t-1}{t} \leqq e^t$であることを示せ。

(2) 数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$を

$$x_n=\log(e^{a_n}+1),\ \ y_n=\log(e^{a_n}-1),\ \ z_n=y_n+\sum_{k=1}^{n}x_k \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。z_nはnによらない定数であることを示せ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\log\left(\frac{e^{a_k}+1}{2}\right)$を求めよ。

9　　［東北大］

(1)　$x_1=a$，$x_{n+1}=x_n+{x_n}^2$ ……①で定められる数列$\{x_n\}$に対して，$a>0$のとき，

$$x_{n+1}-x_n={x_n}^2\geqq 0$$

これより$\{x_n\}$は単調に増加し，$x_n\geqq x_1=a>0$となるので，①から，

$$x_{n+1}\geqq x_n+a^2$$

よって，$x_n\geqq x_1+(n-1)\cdot a^2=a^2n+a-a^2$から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\infty$となる。

(2)　$-1<a<0$のとき，$-1<x_n<0$が成り立つことを，数学的帰納法で示す。

(i)　$n=1$のとき　$x_1=a$で，$-1<a<0$から成立している。

(ii)　$n=k$のとき　$-1<x_k<0$であると仮定すると，①より，

$$x_{k+1}=x_k+{x_k}^2=\left(x_k+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

すると，$-1<x_k<0$から$-\dfrac{1}{4}\leqq x_{k+1}<0$となり，$-1<x_{k+1}<0$である。

よって，$n=k+1$のときも成立する。

(i)(ii)より，すべての正の整数nに対して，$-1<x_n<0$が成り立つ。

(3)　$-1<a<0$のとき，(2)から$-1<x_n<0$となり，①より，

$$\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{1}{x_n+{x_n}^2}=\frac{1}{x_n(x_n+1)}=\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_n+1}$$

すると，$-\dfrac{1}{x_{n+1}}=-\dfrac{1}{x_n}+\dfrac{1}{x_n+1}$となり，ここで$y_n=-\dfrac{1}{x_n}$とおくと，

$$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{x_n+1}\ \cdots\cdots\cdots②$$

さて，$0<x_n+1<1$から$\dfrac{1}{x_n+1}>1$となり，②より，

$$y_{n+1}>y_n+1$$

すると，$y_1=-\dfrac{1}{a}$より，$n\geqq 2$で，$y_n>y_1+(n-1)\cdot 1=n-\dfrac{1}{a}-1$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}y_n=\infty$となるので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{y_n}\right)=0$である。

［解　説］

漸化式で定められた数列の極限の問題です。一般項は求まらないタイプです。(1)と(2)については，方針を立てるのに困難はありませんでしたが，(3)は結論がすぐに予測できるものの，定型的な処理ではうまくいかず，いろいろ考えてしまいました。

10 ［筑波大］

(1) $f(x)=e^x$ とすると $f'(x)=e^x$ となり，$0\leqq x\leqq t$ で平均値の定理を用いると，

$$\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=f'(c)\quad(0<c<t)$$

すると，$\dfrac{e^t-1}{t}=e^c$ となり，$1=e^0<e^c<e^t$ から，$1\leqq\dfrac{e^t-1}{t}\leqq e^t$ である。

(2) $a_n=\dfrac{1}{2^n}$ より，$n\geqq 2$ において，$a_n=\dfrac{1}{2}a_{n-1}$ すなわち $2a_n=a_{n-1}$ ………(＊)

さて，$z_n=\log(e^{a_n}-1)+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log(e^{a_k}+1)$ より，(＊)を用いると，

$$\begin{aligned}z_n&=\log(e^{a_n}-1)+\log(e^{a_1}+1)(e^{a_2}+1)\cdots(e^{a_{n-1}}+1)(e^{a_n}+1)\\&=\log(e^{a_1}+1)(e^{a_2}+1)\cdots(e^{a_{n-1}}+1)(e^{a_n}+1)(e^{a_n}-1)\\&=\log(e^{a_1}+1)(e^{a_2}+1)\cdots(e^{a_{n-1}}+1)(e^{2a_n}-1)\\&=\log(e^{a_1}+1)(e^{a_2}+1)\cdots(e^{a_{n-1}}+1)(e^{a_{n-1}}-1)\\&=\log(e^{a_1}+1)(e^{a_2}+1)\cdots(e^{2a_{n-1}}-1)=\log(e^{a_1}+1)(e^{a_2}+1)\cdots(e^{a_{n-2}}-1)\end{aligned}$$

同様に繰り返すと，$z_n=\log(e^{a_1}+1)(e^{a_1}-1)=\log(e^{2a_1}-1)=\log(e-1)$

よって，z_n は n によらない定数である。

(3) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log\Big(\frac{e^{a_k}+1}{2}\Big)$ とおくと，$S_n=\log\Big(\dfrac{e^{a_1}+1}{2}\Big)\Big(\dfrac{e^{a_2}+1}{2}\Big)\cdots\Big(\dfrac{e^{a_n}+1}{2}\Big)$ となり，

$$\begin{aligned}S_n+\log\Big(\frac{e^{a_n}-1}{2}\Big)&=\log\Big(\frac{e^{a_1}+1}{2}\Big)\Big(\frac{e^{a_2}+1}{2}\Big)\cdots\Big(\frac{e^{a_n}+1}{2}\Big)\Big(\frac{e^{a_n}-1}{2}\Big)\\&=\log\frac{(e^{a_1}+1)(e^{a_2}+1)\cdots(e^{a_n}+1)(e^{a_n}-1)}{2^{n+1}}\end{aligned}$$

すると，(2)より，$S_n+\log\Big(\dfrac{e^{a_n}-1}{2}\Big)=\log\dfrac{e-1}{2^{n+1}}$ となり，

$$\begin{aligned}S_n&=\log\frac{e-1}{2^{n+1}}-\log\Big(\frac{e^{a_n}-1}{2}\Big)=\log\frac{e-1}{2^n(e^{a_n}-1)}=\log(e-1)+\log\Big(\frac{a_n}{e^{a_n}-1}\Big)\\&=\log(e-1)-\log\Big(\frac{e^{a_n}-1}{a_n}\Big)\end{aligned}$$

また，(1)から $\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}=1$ となり，また $n\to\infty$ のとき $a_n\to0$ から，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{a_n}-1}{a_n}=1$$

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\log\Big(\frac{e^{a_k}+1}{2}\Big)=\lim_{n\to\infty}S_n=\log(e-1)-\log1=\log(e-1)$ である。

［解　説］

無限級数の和を求める問題です。(1)と(2)の結果が(3)にうまく繋がっています。ただ，(2)の記述はやや雑ですが。