1 ［金沢大］

k を正の定数とする。2 次方程式 $z^2-2kz+1=0$ が虚数解をもつとし，虚部が正の虚数解を α とする。次の問いに答えよ。

(1) k の値の範囲を求めよ。また，$|\alpha|$ を求めよ。

(2) $\cos\dfrac{5}{12}\pi$ の値を求めよ。

(3) 複素数平面において，α^3 が第 3 象限にあり，かつ α^6 が第 1 象限にあるときの α の偏角 θ $(0\leqq\theta<2\pi)$ と k の値の範囲を求めよ。ただし，座標軸の点は，どの象限にも属さない。

(4) (3)において求めた範囲に α があるとき，$|1-\alpha^5|$ の値の範囲を求めよ。

1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［金沢大］

(1)　2次方程式 $z^2-2kz+1=0\ (k>0)$ ……①が，虚数解 α，$\overline{\alpha}$ をもつことより，

$$D/4=k^2-1=(k+1)(k-1)<0$$

すると，$k>0$ から，$0<k<1$ である。

また，解と係数の関係から $\alpha\overline{\alpha}=1$ すなわち $|\alpha|^2=1$ となり，$|\alpha|=1$ である。

(2)　$\cos\frac{5}{12}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(3)　$\arg\alpha=\theta\ (0\leqq\theta<2\pi)$ とすると，(1)より，$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$ となる。

まず，α の虚部は正から $0<\theta<\pi$ ……②となる。

また，$\arg\alpha^3=3\theta$ から②より $0<3\theta<3\pi$ となり，α^3 が第3象限にあるので，

$$\pi<3\theta<\frac{3}{2}\pi,\ \frac{\pi}{3}<\theta<\frac{\pi}{2}\cdots\cdots\text{③}$$

さらに，$\arg\alpha^6=6\theta$ から③より $2\pi<6\theta<3\pi$ となり，α^6 が第1象限にあるので，

$$2\pi<6\theta<\frac{5}{2}\pi,\ \frac{\pi}{3}<\theta<\frac{5}{12}\pi\cdots\cdots\text{④}$$

次に，解と係数の関係から $\alpha+\overline{\alpha}=2k$ すなわち $k=\frac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}$ となり，k は α の実部である。よって，$k=\cos\theta$ なので，④と(2)の結果から，

$$\cos\frac{5}{12}\pi<k<\cos\frac{\pi}{3},\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}<k<\frac{1}{2}$$

(4)　$1-\alpha^5=1-(\cos5\theta+i\sin5\theta)=(1-\cos5\theta)-i\sin5\theta$ なので，

$$|1-\alpha^5|^2=(1-\cos5\theta)^2+(-\sin5\theta)^2=2-2\cos5\theta=2(1-\cos5\theta)$$

ここで，④より $\frac{5}{3}\pi<5\theta<\frac{25}{12}\pi$ となり，$\cos\frac{5}{3}\pi=\cos\frac{\pi}{3}<\cos\frac{\pi}{12}=\cos\frac{25}{12}\pi$ より，

$$\cos\frac{5}{3}\pi<\cos5\theta\leqq\cos2\pi,\ \frac{1}{2}<\cos5\theta\leqq1$$

すると，$0\leqq|1-\alpha^5|^2<1$ となるので，$0\leqq|1-\alpha^5|<1$ である。

［解　説］

ド・モアブルの定理が絡んだ複素数と方程式についての問題です。設問は多いですが，誘導がていねいなため，計算が止まることはないでしょう。

２　　　　［筑波大］

$|z|^2+3=2(z+\overline{z})$ を満たす複素数 z 全体の集合を A とする。ただし $\overline{z}$ は z の共役複素数である。

(1)　集合 A を複素数平面上に図示せよ。

(2)　A の要素 z の偏角を θ とする。ただし $-\pi<\theta\leqq\pi$ とする。z が A を動くとき，θ のとりうる値の範囲を求めよ。

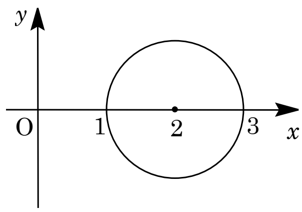
(3)　z^{60} が正の実数となる A の要素 z の個数を求めよ。

2　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［筑波大］

(1)　複素数 z に対して，$|z|^2+3=2(z+\overline{z})$ より，

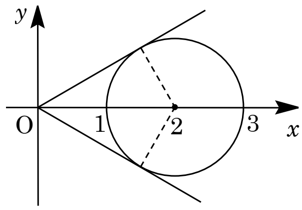
$$|z|^2-2(z+\overline{z})+3=0,\ (z-2)(\overline{z}-2)=1$$

よって，$|z-2|^2=1$ より $|z-2|=1$ となり，z 全体の集合 A は，点 2 を中心とする半径 1 の円である。複素数平面上に図示すると，右図のようになる。



(2)　集合 A に原点から接線を引いたとき，その 2 本の接線と実軸の正の向きとのなす角は $\pm\dfrac{\pi}{6}$ である。

これより，z の偏角を θ $(-\pi<\theta\leqq\pi)$ とすると，右図より，$-\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$ である。



(3)　z^{60} の偏角は 60θ となり，(2)より $-10\pi\leqq 60\theta\leqq 10\pi$ である。

すると，z^{60} が正の実数となるとき，$60\theta=2n\pi$ $(-5\leqq n\leqq 5)$ と表せる。

(i)　$60\theta=0$ のとき　$\theta=0$ より $z=1,\ 3$ となり，z は 2 個存在する。

(ii)　$60\theta=\pm 2\pi$ のとき　$\theta=\pm\dfrac{\pi}{30}$ より，z は $2+2=4$ 個存在する。

(iii)　$60\theta=\pm 4\pi$ のとき　$\theta=\pm\dfrac{\pi}{15}$ より，z は $2+2=4$ 個存在する。

(iv)　$60\theta=\pm 6\pi$ のとき　$\theta=\pm\dfrac{\pi}{10}$ より，z は $2+2=4$ 個存在する。

(v)　$60\theta=\pm 8\pi$ のとき　$\theta=\pm\dfrac{2}{15}\pi$ より，z は $2+2=4$ 個存在する。

(vi)　$60\theta=\pm 10\pi$ のとき　$\theta=\pm\dfrac{\pi}{6}$ より，z は $1+1=2$ 個存在する。

(i)〜(vi)より，求める z の個数は，$2+4\times 4+2=20$ である。

［解　説］

複素数平面上の円を題材とした問題です。(1)の共役複素数を用いた変形は，必修事項の 1 つです。

$\boxed{3}$ ［九州大］

a, b を複素数, c を純虚数でない複素数とし, i を虚数単位とする。複素数平面において, 点 z が虚軸全体を動くとき

$$w=\frac{az+b}{cz+1}$$

で定める点 w の軌跡を C とする。次の 3 条件が満たされているとする。

(ア)　$z=i$ のときに $w=i$ となり, $z=-i$ のときに $w=-i$ となる。

(イ)　C は単位円の周に含まれる。

(ウ)　点 -1 は C に属さない。

このとき a, b, c の値を求めよ。さらに C を求め, 複素数平面上に図示せよ。

3　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［九州大］

a，b を複素数，c を純虚数でない複素数とし，点 z が虚軸全体を動くとき，$w=\dfrac{az+b}{cz+1}$ ……①により定まる点 w の軌跡を C とする。

条件(ア)より，$z=i$ のときに $w=i$ から $i=\dfrac{ai+b}{ci+1}$ となり，$-c+i=ai+b$ ………②

また，$z=-i$ のときに $w=-i$ から $-i=\dfrac{-ai+b}{-ci+1}$ となり，$-c-i=-ai+b$ ………③

②＋③より $b=-c$ となり，②－③より $a=1$ となるので，①は，

$$w=\frac{z-c}{cz+1}\ \cdots\cdots\cdots④$$

次に，条件(イ)から $|w|=1$ なので，④より $\left|\dfrac{z-c}{cz+1}\right|=1$ となり，$\dfrac{|z-c|}{|cz+1|}=1$ から，

$$|z-c|=|cz+1|\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

k を任意の実数として $z=ki$ とおくと，⑤は $|ki-c|=|kci+1|$ となり，

$$(ki-c)(-ki-\bar{c})=(kci+1)(-k\bar{c}i+1)$$

$$k^2-k\bar{c}i+kci+|c|^2=k^2|c|^2+kci-k\bar{c}i+1,\ (|c|^2-1)k^2-(|c|^2-1)=0$$

任意の実数 k で成立することより，$|c|^2-1=0$ となり，$c\bar{c}=1$ ………⑥

また，条件(ウ)は「$w=-1$ となる純虚数 z が存在しない」ということなので，ここで $w=-1$ としたとき，④から $\dfrac{z-c}{cz+1}=-1$，すなわち $z-c=-cz-1$ となり，

$$(c+1)z=c-1\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

(i)　$c=-1$ のとき　⑦は不成立で，$w=-1$ を満たす純虚数 z は存在しない。

(ii)　$c\neq-1$ のとき　⑦から $z=\dfrac{c-1}{c+1}$ となり，⑥より，$\bar{z}=\dfrac{\bar{c}-1}{\bar{c}+1}=\dfrac{\frac{1}{c}-1}{\frac{1}{c}+1}=\dfrac{1-c}{1+c}=-z$

　すると，⑦が成立すなわち $w=-1$ を満たす純虚数 z が存在する。

(i)(ii)より，条件(ウ)を満たす c は，$c=-1$ である。

したがって，$a=1$，$b=1$，$c=-1$ となり，①は $w=\dfrac{z+1}{-z+1}$ である。

このとき，k を任意の実数として $z=ki$ とおくと，

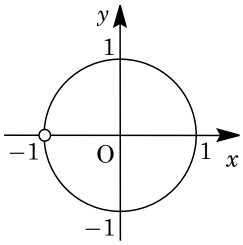
$$w=\frac{ki+1}{-ki+1}=\frac{(1+ki)^2}{1+k^2}=\frac{1-k^2}{1+k^2}+\frac{2k}{1+k^2}i$$

そこで，x, y を実数として，$w=x+yi$ とおくと，

$$x=\frac{1-k^2}{1+k^2}\ \cdots\cdots\cdots⑧,\quad y=\frac{2k}{1+k^2}\ \cdots\cdots\cdots⑨$$

k は任意の実数なので，$k=\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくことができ，⑧⑨から，

$$x=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\cos 2\theta$$
$$y=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{2\cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\sin 2\theta$$



よって，$w=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$ となり，点 w の軌跡 C は，原点 O と中心とする半径 1 の円である。ただし，$-\pi<2\theta<\pi$ から点 -1 を除く。そして，C を図示すると，右図のようになる。

［解 説］

複素数平面上の変換についての問題です。条件(ウ)の処理の方法が難です。なお，末尾の $k=\tan\theta$ という置換えは，⑧⑨を見て設定しています。

$\boxed{4}$ ［東北大］

a を実数とし，数列$\{x_n\}$を次の漸化式によって定める。

$$x_1 = a\,,\ \ x_{n+1} = x_n + {x_n}^2 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $a > 0$ のとき，数列$\{x_n\}$が発散することを示せ。

(2) $-1 < a < 0$ のとき，すべての正の整数 n に対して $-1 < x_n < 0$ が成り立つことを示せ。

(3) $-1 < a < 0$ のとき，数列$\{x_n\}$の極限を調べよ。

4　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東北大］

(1)　$x_1=a$，$x_{n+1}=x_n+{x_n}^2$ ……①で定められる数列$\{x_n\}$に対して，$a>0$のとき，

$$x_{n+1}-x_n={x_n}^2\geqq 0$$

これより$\{x_n\}$は単調に増加し，$x_n\geqq x_1=a>0$となるので，①から，

$$x_{n+1}\geqq x_n+a^2$$

よって，$x_n\geqq x_1+(n-1)\cdot a^2=a^2n+a-a^2$から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\infty$となる。

(2)　$-1<a<0$のとき，$-1<x_n<0$が成り立つことを，数学的帰納法で示す。

(i)　$n=1$のとき　$x_1=a$で，$-1<a<0$から成立している。

(ii)　$n=k$のとき　$-1<x_k<0$であると仮定すると，①より，

$$x_{k+1}=x_k+{x_k}^2=\left(x_k+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

すると，$-1<x_k<0$から$-\dfrac{1}{4}\leqq x_{k+1}<0$となり，$-1<x_{k+1}<0$である。

よって，$n=k+1$のときも成立する。

(i)(ii)より，すべての正の整数nに対して，$-1<x_n<0$が成り立つ。

(3)　$-1<a<0$のとき，(2)から$-1<x_n<0$となり，①より，

$$\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{1}{x_n+{x_n}^2}=\frac{1}{x_n(x_n+1)}=\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_n+1}$$

すると，$-\dfrac{1}{x_{n+1}}=-\dfrac{1}{x_n}+\dfrac{1}{x_n+1}$となり，ここで$y_n=-\dfrac{1}{x_n}$とおくと，

$$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{x_n+1}\ \cdots\cdots\text{②}$$

さて，$0<x_n+1<1$から$\dfrac{1}{x_n+1}>1$となり，②より，

$$y_{n+1}>y_n+1$$

すると，$y_1=-\dfrac{1}{a}$より，$n\geqq 2$で，$y_n>y_1+(n-1)\cdot 1=n-\dfrac{1}{a}-1$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}y_n=\infty$となるので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{y_n}\right)=0$である。

［解　説］

漸化式で定められた数列の極限の問題です。一般項は求まらないタイプです。(1)と(2)については，方針を立てるのに困難はありませんでしたが，(3)は結論がすぐに予測できるものの，定型的な処理ではうまくいかず，いろいろ考えてしまいました。

$\boxed{5}$ ［筑波大］

数列$\{a_n\}$を$a_n=\dfrac{1}{2^n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$で定める。以下の問いに答えよ。

(1) $t>0$のとき，$1\leqq\dfrac{e^t-1}{t}\leqq e^t$であることを示せ。

(2) 数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$を

$$x_n=\log(e^{a_n}+1),\quad y_n=\log(e^{a_n}-1),\quad z_n=y_n+\sum_{k=1}^{n}x_k\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。z_nはnによらない定数であることを示せ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\log\left(\frac{e^{a_k}+1}{2}\right)$を求めよ。

5　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［筑波大］

(1)　$f(x)=e^x$ とすると $f'(x)=e^x$ となり，$0\leqq x\leqq t$ で平均値の定理を用いると，

$$\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=f'(c)\quad(0<c<t)$$

すると，$\dfrac{e^t-1}{t}=e^c$ となり，$1=e^0<e^c<e^t$ から，$1\leqq\dfrac{e^t-1}{t}\leqq e^t$ である。

(2)　$a_n=\dfrac{1}{2^n}$ より，$n\geqq 2$ において，$a_n=\dfrac{1}{2}a_{n-1}$ すなわち $2a_n=a_{n-1}$ ………(＊)

さて，$z_n=\log(e^{a_n}-1)+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log(e^{a_k}+1)$ より，(＊)を用いると，

$$\begin{aligned}
z_n&=\log(e^{a_n}-1)+\log(e^{a_1}+1)(e^{a_2}+1)\cdots(e^{a_{n-1}}+1)(e^{a_n}+1)\\
&=\log(e^{a_1}+1)(e^{a_2}+1)\cdots(e^{a_{n-1}}+1)(e^{a_n}+1)(e^{a_n}-1)\\
&=\log(e^{a_1}+1)(e^{a_2}+1)\cdots(e^{a_{n-1}}+1)(e^{2a_n}-1)\\
&=\log(e^{a_1}+1)(e^{a_2}+1)\cdots(e^{a_{n-1}}+1)(e^{a_{n-1}}-1)\\
&=\log(e^{a_1}+1)(e^{a_2}+1)\cdots(e^{2a_{n-1}}-1)=\log(e^{a_1}+1)(e^{a_2}+1)\cdots(e^{a_{n-2}}-1)
\end{aligned}$$

同様に繰り返すと，$z_n=\log(e^{a_1}+1)(e^{a_1}-1)=\log(e^{2a_1}-1)=\log(e-1)$

よって，z_n は n によらない定数である。

(3)　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log\Big(\frac{e^{a_k}+1}{2}\Big)$ とおくと，$S_n=\log\Big(\dfrac{e^{a_1}+1}{2}\Big)\Big(\dfrac{e^{a_2}+1}{2}\Big)\cdots\Big(\dfrac{e^{a_n}+1}{2}\Big)$ となり，

$$\begin{aligned}
S_n+\log\Big(\frac{e^{a_n}-1}{2}\Big)&=\log\Big(\frac{e^{a_1}+1}{2}\Big)\Big(\frac{e^{a_2}+1}{2}\Big)\cdots\Big(\frac{e^{a_n}+1}{2}\Big)\Big(\frac{e^{a_n}-1}{2}\Big)\\
&=\log\frac{(e^{a_1}+1)(e^{a_2}+1)\cdots(e^{a_n}+1)(e^{a_n}-1)}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

すると，(2)より，$S_n+\log\Big(\dfrac{e^{a_n}-1}{2}\Big)=\log\dfrac{e-1}{2^{n+1}}$ となり，

$$\begin{aligned}
S_n&=\log\frac{e-1}{2^{n+1}}-\log\Big(\frac{e^{a_n}-1}{2}\Big)=\log\frac{e-1}{2^n(e^{a_n}-1)}=\log(e-1)+\log\Big(\frac{a_n}{e^{a_n}-1}\Big)\\
&=\log(e-1)-\log\Big(\frac{e^{a_n}-1}{a_n}\Big)
\end{aligned}$$

また，(1)から $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1$ となり，また $n\to\infty$ のとき $a_n\to 0$ から，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{a_n}-1}{a_n}=1$$

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\log\Big(\frac{e^{a_k}+1}{2}\Big)=\lim_{n\to\infty}S_n=\log(e-1)-\log 1=\log(e-1)$ である。

［解　説］

無限級数の和を求める問題です。(1)と(2)の結果が(3)にうまく繋がっています。ただ，(2)の記述はやや雑ですが。

$\boxed{6}$ ［東京大］

以下の問いに答えよ。

(1) n を 1 以上の整数とする。x についての方程式 $x^{2n-1}=\cos x$ は，ただ 1 つの実数解 a_n をもつことを示せ。

(2) (1)で定まる a_n に対し，$\cos a_n > \cos 1$ を示せ。

(3) (1)で定まる数列 a_1，a_2，a_3，…，a_n，…に対し，

$$a=\lim_{n\to\infty}a_n,\quad b=\lim_{n\to\infty}{a_n}^n,\quad c=\lim_{n\to\infty}\frac{{a_n}^n-b}{a_n-a}$$

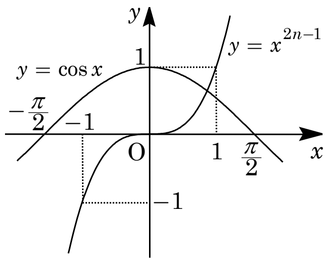
を求めよ。

6　　　　［東京大］

(1)　n を自然数とする方程式 $x^{2n-1}=\cos x$ ……①に対し,

$y=x^{2n-1}$ ………②,　$y=\cos x$ ………③

　すると，①の実数解は，曲線②と③の共有点の x 座標が対応する。



(i)　$x<-1$ のとき　$x^{2n-1}<-1\leqq\cos x$

(ii)　$-1\leqq x<0$ のとき　$x^{2n-1}<0<\cos x$

(iii)　$x>1$ のとき　$x^{2n-1}>1\geqq\cos x$

(i)〜(iii)より，$x<0$，$1<x$ では，曲線②と③は共有点をもたない。

　ここで，$0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)=x^{2n-1}-\cos x$ とおくと，

$f'(x)=(2n-1)x^{2n-2}+\sin x$

　これより，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$1-\cos 1>0$ から，$f(x)=0$ は $0<x<1$ においてただ１つの実数解をもつ。

x	0	$\cdots$	1
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	-1	↗	$1-\cos 1$

　よって，方程式①は，ただ１つの実数解を $0<x<1$ にもつ。

(2)　①の実数解を a_n とすると，(1)より $0<a_n<1$ なので，$\cos a_n>\cos 1$ である。

(3)　①より，${a_n}^{2n-1}=\cos a_n$ ……④となり，$(2n-1)\log a_n=\log(\cos a_n)$ から，

$$\log a_n=\frac{\log(\cos a_n)}{2n-1}\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

　ここで，(2)から $\cos 1<\cos a_n<1$ なので，$\dfrac{\log(\cos 1)}{2n-1}<\dfrac{\log(\cos a_n)}{2n-1}<\dfrac{\log 1}{2n-1}=0$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(\cos 1)}{2n-1}=0$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(\cos a_n)}{2n-1}=0$ となり，⑤から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log a_n=0$

$$a=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}e^{\log a_n}=e^0=1$$

　次に，④より ${a_n}^{2n}=a_n\cos a_n$ となり，${a_n}^n=\sqrt{a_n\cos a_n}$ ……⑥から，

$$b=\lim_{n\to\infty}{a_n}^n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n\cos a_n}=\sqrt{a\cos a}=\sqrt{\cos 1}\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

　また，$g(x)=\sqrt{x\cos x}$ とおくと，$g'(x)=\dfrac{\cos x-x\sin x}{2\sqrt{x\cos x}}$

　⑥から ${a_n}^n=g(a_n)$，⑦から $b=g(1)$ となり，$n\to\infty$ のとき $a_n\to 1$ なので，

$$c=\lim_{n\to\infty}\frac{{a_n}^n-b}{a_n-a}=\lim_{a_n\to 1}\frac{g(a_n)-g(1)}{a_n-1}=g'(1)=\frac{\cos 1-\sin 1}{2\sqrt{\cos 1}}$$

［解　説］

　微分の応用と極限の融合題です。(1)(2)は図の説明です。(3)が a，b だけであれば他の方法も考えられるものの，c の式を微分係数の定義式と対比させるとすると……。

7　［東北大］

xy 平面における曲線 $y=\sin x$ の 2 つの接線が直交するとき，その交点の y 座標の値をすべて求めよ。

7 ［東北大］

$y=\sin x$ に対して $y'=\cos x$ となり，点 $(\alpha,\ \sin\alpha)$ における接線の方程式は,

$$y-\sin\alpha=\cos\alpha(x-\alpha),\quad y=x\cos\alpha-\alpha\cos\alpha+\sin\alpha \cdots\cdots\cdots ①$$

同様に，$\alpha\neq\beta$ として，点 $(\beta,\ \sin\beta)$ における接線の方程式は,

$$y=x\cos\beta-\beta\cos\beta+\sin\beta \cdots\cdots\cdots ②$$

条件より，①と②が直交するので，$\cos\alpha\cos\beta=-1 \cdots\cdots\cdots ③$

ここで，③の両辺に絶対値をとると，$|\cos\alpha||\cos\beta|=1$ となり，このとき $|\cos\alpha|<1$ と仮定すると $|\cos\beta|>1$ となり不適である。これより，$|\cos\alpha|=1$ であり，③から,

$$(\cos\alpha,\ \cos\beta)=(1,\ -1),\ (-1,\ 1)$$

さらに，一般性を失うことなく，$\cos\alpha\geqq\cos\beta$ とできるので,

$$(\cos\alpha,\ \cos\beta)=(1,\ -1)$$

そこで，m, n を整数として，$(\alpha,\ \beta)=(2m\pi,\ (2n+1)\pi)$ とおくと，①②は,

$$y=x-2m\pi \cdots\cdots\cdots ③,\quad y=-x+(2n+1)\pi \cdots\cdots\cdots ④$$

③④を連立して，$2y=(-2m+2n+1)\pi$，$y=\dfrac{2(n-m)+1}{2}\pi$

$k=n-m$ とおくと，求める交点の y 座標は，整数 k を用いて $y=\dfrac{2k+1}{2}\pi$ と表せる。

［解 説］

三角関数のグラフの接線を題材にした問題です。ポイントは③の処理だけです。

8　［金沢大］

座標平面に 2 曲線 $C_1 : y=\sqrt{x}-4\ (x>0)$ と $C_2 : y=-\sqrt{1-x}\ \ (x<1)$ がある。次の問いに答えよ。

(1)　C_1 は区間 $x>0$ で上に凸であることを示せ。

(2)　点 $\mathrm{F}\left(\dfrac{1}{2},\ -2\right)$ に関して，点 P と対称な点を Q とする。点 P が C_1 上を動くとき，点 Q の軌跡が C_2 であることを示せ。

(3)　C_1 上の点 A における法線 l が点 F を通るとし，l と C_2 の共有点を B とする。このとき，A の座標 $(x_1,\ y_1)$ および B の座標 $(x_2,\ y_2)$ をそれぞれ求めよ。

(4)　C_1 上に点 X_1，C_2 上に点 X_2 をとる。線分 $\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2$ の長さの最小値を求めよ。

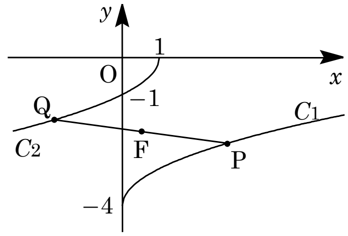
8　　　　［金沢大］

(1)　$C_1 : y=\sqrt{x}-4=x^{\frac{1}{2}}-4\ (x>0)$ ……①に対して,

$$y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}},\ \ y''=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$$

すると, $x>0$ で $y''<0$ より, C_1 は区間 $x>0$ で上に凸である。

(2)　C_1 上を動く点 $\mathrm{P}(t,\ \sqrt{t}-4)\ (t>0)$ に対し，点 $\mathrm{F}\left(\frac{1}{2},\ -2\right)$ に関して対称な点を $\mathrm{Q}(u,\ v)$ とおくと,



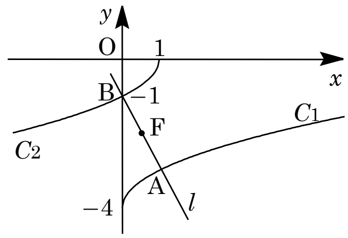
$$u=2\cdot\frac{1}{2}-t=1-t$$

$$v=2\cdot(-2)-(\sqrt{t}-4)=-\sqrt{t}$$

これより, t を消去すると $v=-\sqrt{1-u}$ となり, $t>0$ から $u<1$ となる。

すなわち, $\mathrm{Q}(u,\ v)$ の軌跡は, $C_2 : y=-\sqrt{1-x}\ (x<1)$ ……②である。

(3)　C_1 上の点 $\mathrm{A}(x_1,\ \sqrt{x_1}-4)$ での接線の傾きは $\frac{1}{2\sqrt{x_1}}$ より, 法線 l は傾きが $-2\sqrt{x_1}$ となり, その方程式は,



$$y-(\sqrt{x_1}-4)=-2\sqrt{x_1}\,(x-x_1)$$

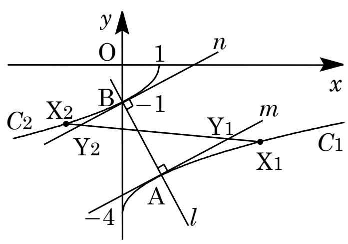
点 $\mathrm{F}\left(\frac{1}{2},\ -2\right)$ を通ることより,

$$-2-\sqrt{x_1}+4=-2\sqrt{x_1}\left(\frac{1}{2}-x_1\right)$$

すると, $-\sqrt{x_1}+2=-\sqrt{x_1}+2x_1\sqrt{x_1}$ から $x_1\sqrt{x_1}=1$ となり, $x_1^{\ 3}=1$ である。

これより, $x_1=1$ となり $\mathrm{A}(1,\ -3)$ である。また, C_2 と l の共有点 B は, (2)より $\mathrm{F}\left(\frac{1}{2},\ -2\right)$ に関して A と点対称なので, $\mathrm{B}(0,\ -1)$ である。

(4)　(1)より C_1 は上に凸なので, C_1 を F に関して点対称移動した C_2 は下に凸である。



ここで, A における C_1 の接線を m, B における C_2 の接線を n とおくと, n は m を F に関して点対称移動したものなので $m \mathbin{/\!/} n$ となる。そして, A を除く C_1 上の点は m の下側, B を除く C_2 上の点は n の上側に位置する。

さて, C_1 上に点 X_1, C_2 上に点 X_2 をとり, 線分 $\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2$ と m, n の交点をそれぞれ Y_1, Y_2 とおくと, $\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2 \geqq \mathrm{Y}_1\mathrm{Y}_2 \geqq \mathrm{AB}$ である。

したがって, 線分 $\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2$ の長さの最小値は,

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(0-1)^2+(-1+3)^2}=\sqrt{5}$$

［解 説］

点対称な 2 つの曲線間の距離を題材にした微分の応用問題です。(4)がメインですが，それまでの設問が誘導になっています。類題が気になったので調べたところ，線対称の場合ですが，1999 年の東大・文で出題されていました。

9　　　　［信州大］

次の問いに答えよ。

(1)　$a>1$ とする。不等式 $(1+t)^a \leqq K(1+t^a)$ がすべての $t \geqq 0$ に対して成り立つような実数 K の最小値を求めよ。

(2)　$\displaystyle\int_0^{\pi} \left(1+\sqrt[5]{1+\sin x}\,\right)^{10} dx < 6080$ を示せ。ただし，$\pi < 3.15$ であることを用いてよい。

9　　［信州大］

(1)　すべての $t \geqq 0$ に対して $(1+t)^a \leqq K(1+t^a)$ ……①から，$K \geqq \dfrac{(1+t)^a}{1+t^a}$ として，

$f(t) = \dfrac{(1+t)^a}{1+t^a}$ とおくと，①は $K \geqq f(t)$ となり，

$$f'(t) = \frac{a(1+t)^{a-1}(1+t^a) - (1+t)^a \cdot at^{a-1}}{(1+t^a)^2} = \frac{a(1+t)^{a-1}(1-t^{a-1})}{(1+t^a)^2}$$

すると，$a>1$ から $t \geqq 0$ における $f(t)$ の増減は右表のようになり，最大値は 2^{a-1} である。

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$	1	↗	2^{a-1}	↘

これより，すべての $t \geqq 0$ に対して①を満たす実数 K の最小値は，2^{a-1} となる。

(2)　(1)から，$a>1$ のとき，すべての $t \geqq 0$ に対して $(1+t)^a \leqq 2^{a-1}(1+t^a)$ が成り立ち，ここで $t = \sqrt[5]{1+\sin x} \geqq 0$，$a=10$ とおくと，

$$\left(1+\sqrt[5]{1+\sin x}\right)^{10} \leqq 2^9\{1+(1+\sin x)^2\} = 2^9(2+2\sin x+\sin^2 x)$$

すると，$\displaystyle\int_0^{\pi}\left(1+\sqrt[5]{1+\sin x}\right)^{10}dx \leqq 2^9\int_0^{\pi}(2+2\sin x+\sin^2 x)\,dx$ ……②となり，

$$\int_0^{\pi}(2+2\sin x+\sin^2 x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(4+4\sin x+1-\cos 2x)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}(5\pi+4\cdot 2-0) = \frac{1}{2}(5\pi+8) \text{………③}$$

②③より，$\pi < 3.15$ を用いると，

$$\int_0^{\pi}\left(1+\sqrt[5]{1+\sin x}\right)^{10}dx \leqq 2^8(5\pi+8) < 2^8(5\times 3.15+8) = 6080$$

［解　説］

定積分と不等式の標準的なな問題です。(1)の誘導が(2)にストレートに繋がっています。

$\boxed{10}$ ［大阪大］

以下の問いに答えよ。ただし，log は自然対数，e はその底とする。

(1) b を実数とする。関数 $f(x)=\displaystyle\int_x^b e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt-\frac{x}{x^2+1}e^{-\frac{x^2}{2}}$ は単調に減少することを示せ。

(2) $a\leqq b$ を満たす正の実数 $a,\,b$ に対し，不等式

$$\frac{a}{a^2+1}e^{-\frac{a^2}{2}}-\frac{b}{b^2+1}e^{-\frac{b^2}{2}}\leqq\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\leqq e^{-\frac{a^2}{2}}(b-a)$$

が成り立つことを示せ。

(3) 数列 $\{I_n\}$ を次のように定める。$I_n=\displaystyle\int_1^2 e^{-\frac{nt^2}{2}}\,dt\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

このとき極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log I_n$ を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(n+1)=0$ を用いてもよい。

10　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［大阪大］

(1)　b を実数とするとき，$f(x)=\displaystyle\int_x^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt-\frac{x}{x^2+1}e^{-\frac{x^2}{2}}$ に対し，

$$f'(x)=-e^{-\frac{x^2}{2}}-\frac{(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}e^{-\frac{x^2}{2}}-\frac{x}{x^2+1}\cdot(-x)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$=\frac{-(x^2+1)^2-(-x^2+1)+x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^2}e^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{-2}{(x^2+1)^2}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

これより，$f'(x)<0$ となるので，$f(x)$ は単調に減少する。

(2)　$0<a\leqq b$ のとき，(1)から $f(a)\geqq f(b)$ となり，

$$\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt-\frac{a}{a^2+1}e^{-\frac{a^2}{2}}\geqq\int_b^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt-\frac{b}{b^2+1}e^{-\frac{b^2}{2}}$$

よって，$\dfrac{a}{a^2+1}e^{-\frac{a^2}{2}}-\dfrac{b}{b^2+1}e^{-\frac{b^2}{2}}\leqq\displaystyle\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ ………①

また，$g(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$ とおくと，$g(t)$ は $t>0$ で単調に減少し，$0<a\leqq t\leqq b$ において，$e^{-\frac{t^2}{2}}\leqq e^{-\frac{a^2}{2}}$ となるので，

$$\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt\leqq\int_a^b e^{-\frac{a^2}{2}}dt=e^{-\frac{a^2}{2}}(b-a)\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\dfrac{a}{a^2+1}e^{-\frac{a^2}{2}}-\dfrac{b}{b^2+1}e^{-\frac{b^2}{2}}\leqq\displaystyle\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt\leqq e^{-\frac{a^2}{2}}(b-a)$ ………③

(3)　$I_n=\displaystyle\int_1^2 e^{-\frac{nt^2}{2}}dt$ に対し，$s=\sqrt{n}\,t$ とおくと，$ds=\sqrt{n}\,dt$ となり，

$$I_n=\int_{\sqrt{n}}^{2\sqrt{n}} e^{-\frac{s^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}ds=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{\sqrt{n}}^{2\sqrt{n}} e^{-\frac{s^2}{2}}ds$$

すると，③から，$\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}e^{-\frac{n}{2}}-\dfrac{2\sqrt{n}}{4n+1}e^{-\frac{4n}{2}}\leqq\sqrt{n}I_n\leqq e^{-\frac{n}{2}}(2\sqrt{n}-\sqrt{n})$ となり，

$$\frac{1}{n+1}e^{-\frac{n}{2}}-\frac{2}{4n+1}e^{-2n}\leqq I_n\leqq e^{-\frac{n}{2}}\ \cdots\cdots\cdots④$$

ここで，$\dfrac{1}{n+1}e^{-\frac{n}{2}}-\dfrac{2}{4n+1}e^{-2n}=\dfrac{1}{n+1}\Big(1-\dfrac{2n+2}{4n+1}e^{-\frac{3n}{2}}\Big)e^{-\frac{n}{2}}$ なので，④から，

$$-\log(n+1)+\log\Big(1-\frac{2n+2}{4n+1}e^{-\frac{3n}{2}}\Big)-\frac{n}{2}\leqq\log I_n\leqq-\frac{n}{2}$$

$$-\frac{1}{n}\log(n+1)+\frac{1}{n}\log\Big(1-\frac{2n+2}{4n+1}e^{-\frac{3n}{2}}\Big)-\frac{1}{2}\leqq\frac{1}{n}\log I_n\leqq-\frac{1}{2}\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

そこで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(n+1)=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\Big(1-\frac{2n+2}{4n+1}e^{-\frac{3n}{2}}\Big)=0$ なので，⑤から，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log I_n=-\frac{1}{2}$$

［解 説］

定積分と不等式および極限に関する標準的な問題です。(3)は，(2)の結果を利用するために，冒頭での置換がポイントになっています。なお，⑤式への変形は，問題文のコメントからヒントを得ています。

$\boxed{11}$ ［広島大］

関数 $f(x)$ は実数全体で連続で，すべての実数 x に対して

$$f(x)=(1-x)\cos x+x\sin x-\int_0^x e^{x-t}f(t)\,dt$$

を満たすとする。ただし，e は自然対数の底である。次の問いに答えよ。

(1) $f(0)$ の値を求めよ。また，$f'(x)=2(x-1)\cos x$ が成り立つことを示せ。

(2) $f(x)$ を求めよ。

(3) 方程式 $f(x)=0$ は，$0<x<\pi$ の範囲でただ 1 つの解をもつことを示せ。

(4) (3)のただ 1 つの解を α とする。曲線 $y=f(x)$ $(0\leqq x\leqq\alpha)$，x 軸および y 軸によって囲まれる部分の面積を S_1 とし，曲線 $y=f(x)$ $(\alpha\leqq x\leqq\pi)$，x 軸および直線 $x=\pi$ によって囲まれる部分の面積を S_2 とする。S_1 と S_2 の大小を判定せよ。

11　　　　［広島大］

(1)　連続関数 $f(x)$ は，$f(x)=(1-x)\cos x+x\sin x-\int_0^x e^{x-t}f(t)\,dt$ を満たし，

$$f(x)=(1-x)\cos x+x\sin x-e^x\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt\cdots\cdots\cdots①$$

すると，$f(0)=\cos 0=1$ となり，①の両辺を微分すると，

$$f'(x)=-\cos x-(1-x)\sin x+\sin x+x\cos x-e^x\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt-e^xe^{-x}f(x)$$

$$=(x-1)\cos x+x\sin x-e^x\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt-f(x)\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$f(x)+e^x\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt=(1-x)\cos x+x\sin x$ なので，②に代入して，

$$f'(x)=(x-1)\cos x+x\sin x-(1-x)\cos x-x\sin x=2(x-1)\cos x\cdots\cdots\cdots③$$

(2)　③より，$f(x)=\int 2(x-1)\cos x\,dx$ となり，C を定数として，

$$f(x)=2(x-1)\sin x-2\int\sin x\,dx=2(x-1)\sin x+2\cos x+C$$

ここで，$f(0)=1$ から，$2+C=1$ すなわち $C=-1$ となり，

$$f(x)=2(x-1)\sin x+2\cos x-1$$

(3)　③より，$0\leqq x\leqq\pi$ での $f(x)$ の増減は右表のようになる。

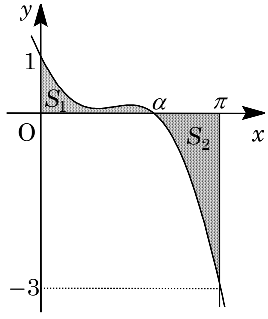
x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↘		↗		↘	-3

ここで，$1<\frac{\pi}{3}$ に注意すると，

$$\cos 1>\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

すると，$f(1)=2\cos 1-1>2\cdot\frac{1}{2}-1=0$ となり，方程式 $f(x)=0$ は，$0<x<\pi$ の範囲でただ１つの解をもつ。

(4)　$f(\alpha)=0$ として，右図の網点部の面積を S_1，S_2 とすると，



$S_1=\int_0^\alpha f(x)\,dx$，$S_2=-\int_\alpha^\pi f(x)\,dx$ となり，

$$S_1-S_2=\int_0^\alpha f(x)\,dx+\int_\alpha^\pi f(x)\,dx=\int_0^\pi f(x)\,dx$$

$$=\int_0^\pi\{2(x-1)\sin x+2\cos x-1\}\,dx$$

$$=-2\Big[(x-1)\cos x\Big]_0^\pi+2\int_0^\pi\cos x\,dx+0-\pi$$

$$=2(\pi-1)-2+0-\pi=\pi-4<0$$

よって，$S_1<S_2$ である。

［解 説］

微積分の総合問題です。微分型の積分方程式を解くことから始め，面積計算へと繋ぐ構図になっています。いずれも，頻出題です。

12 ［東京工大］

次の等式が$1 \leqq x \leqq 2$で成り立つような関数$f(x)$と定数A, Bを求めよ。

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} |\log y| f(xy)\,dy = 3x(\log x - 1) + A + \frac{B}{x}$$

ただし，$f(x)$は$1 \leqq x \leqq 2$に対して定義される連続関数とする。

12　　［東京工大］

$1 \leqq x \leqq 2$ のとき，$\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} |\log y| f(xy)dy = 3x(\log x - 1) + A + \frac{B}{x}$ ………①

ここで，$xy = t$ とおくと $x\,dy = dt$ となり，$y = \dfrac{1}{x} \to \dfrac{2}{x}$ は $t = 1 \to 2$ に対応し，

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} |\log y| f(xy)dy = \int_1^2 \left|\log\frac{t}{x}\right| f(t)\cdot\frac{1}{x}dt = \frac{1}{x}\int_1^2 |\log t - \log x| f(t)dt$$

$$= -\frac{1}{x}\int_1^x (\log t - \log x) f(t)dt + \frac{1}{x}\int_x^2 (\log t - \log x) f(t)dt$$

$$= -\frac{1}{x}\int_1^x (\log t) f(t)dt + \frac{\log x}{x}\int_1^x f(t)dt + \frac{1}{x}\int_x^2 (\log t) f(t)dt - \frac{\log x}{x}\int_x^2 f(t)dt$$

①の両辺を x 倍すると，$x\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} |\log y| f(xy)dy = 3x^2(\log x - 1) + Ax + B$ となり，

$$-\int_1^x (\log t) f(t)dt + (\log x)\int_1^x f(t)dt + \int_x^2 (\log t) f(t)dt - (\log x)\int_x^2 f(t)dt$$

$$= 3x^2(\log x - 1) + Ax + B \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

ここで，②の左辺を $F(x)$，右辺を $G(x)$ とおくと，

$$F'(x) = -(\log x) f(x) + \frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt + (\log x) f(x) - (\log x) f(x)$$

$$- \frac{1}{x}\int_x^2 f(t)dt + (\log x) f(x)$$

$$= \frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt - \frac{1}{x}\int_x^2 f(t)dt$$

$$G'(x) = 6x(\log x - 1) + 3x^2\cdot\frac{1}{x} + A = 6x\log x - 3x + A$$

すると，$\displaystyle\frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt - \frac{1}{x}\int_x^2 f(t)dt = 6x\log x - 3x + A$ から，両辺を x 倍すると，

$$\int_1^x f(t)dt - \int_x^2 f(t)dt = 6x^2\log x - 3x^2 + Ax \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

さらに，③の両辺を x で微分して，

$$f(x) + f(x) = 12x\log x + 6x^2\cdot\frac{1}{x} - 6x + A$$

$$f(x) = 6x\log x + \frac{A}{2} \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

さて，②に $x = 1$ を代入すると，$\displaystyle\int_1^2 (\log t) f(t)dt = -3 + A + B$ ………⑤

また，③に $x = 1$ を代入すると，$\displaystyle -\int_1^2 f(t)dt = -3 + A$

$$3 - A = \int_1^2 f(t)dt \quad \cdots\cdots\cdots ⑥$$

④を⑥に代入して,

$$3-A=\int_1^2\Big(6t\log t+\frac{A}{2}\Big)dt=\big[\,3t^2\log t\,\big]_1^2-\int_1^2 3t\,dt+\frac{A}{2}(2-1)$$

$$=12\log 2-\frac{3}{2}(2^2-1^2)+\frac{A}{2}=12\log 2-\frac{9}{2}+\frac{A}{2}$$

よって，$\dfrac{3}{2}A=\dfrac{15}{2}-12\log 2$ より，$A=5-8\log 2$ となり，④から,

$$f(x)=6x\log x+\frac{5}{2}-4\log 2$$

⑤に代入して，$\displaystyle\int_1^2(\log t)f(t)\,dt=-3+(5-8\log 2)+B$ となり,

$$B=\int_1^2(\log t)\Big(6t\log t+\frac{5}{2}-4\log 2\Big)dt-2+8\log 2$$

$$=6\int_1^2 t(\log t)^2dt+\Big(\frac{5}{2}-4\log 2\Big)\int_1^2\log t\,dt-2+8\log 2$$

ここで，$\displaystyle\int_1^2\log t\,dt=\big[\,t\log t-t\,\big]_1^2=2\log 2-1$

$$\int_1^2 t(\log t)^2dt=\Big[\,\frac{t^2}{2}(\log t)^2\,\Big]_1^2-\int_1^2\frac{t^2}{2}\cdot 2(\log t)\cdot\frac{1}{t}dt$$

$$=2(\log 2)^2-\int_1^2 t\log t\,dt=2(\log 2)^2-2\log 2+\frac{3}{4}$$

以上，まとめると,

$$B=6\Big\{2(\log 2)^2-2\log 2+\frac{3}{4}\Big\}+\Big(\frac{5}{2}-4\log 2\Big)(2\log 2-1)-2+8\log 2$$

$$=12(\log 2)^2-12\log 2+\frac{9}{2}-8(\log 2)^2+9\log 2-\frac{5}{2}-2+8\log 2$$

$$=4(\log 2)^2+5\log 2$$

［解 説］

いわゆる微分型と呼ばれるタイプの積分方程式です。解の構図は，微分して初期条件を求めることを 2 回くり返すという定型的なものです。それ以外のポイントとしては，分数関数は微分すると一般的に複雑になるので，その前に両辺を x 倍するというぐらいです。それでも，計算量は半端ではありませんが。

$\boxed{13}$ ［東北大］

(1) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_{-1}^{1}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}dx=\int_0^1\sin^2(\pi x)\,dx=\frac{1}{2}$$

(2) 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$(1+e^x)f(x)=\sin^2(\pi x)+\int_{-1}^{1}(e^x-e^t+1)f(t)\,dt$$

13　　［東北大］

(1) $I=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}dx$ とおくと，$I=\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}dx+\int_{0}^{1}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}dx$

ここで，$x=-t$ とおくと，$dx=-dt$ となり，

$$\int_{-1}^{0}\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}dx=-\int_{1}^{0}\frac{\sin^2(-\pi t)}{1+e^{-t}}dt=\int_{0}^{1}\frac{e^t\sin^2(\pi t)}{e^t+1}dt$$

すると，$\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{e^t\sin^2(\pi t)}{e^t+1}dt=\int_{0}^{1}\frac{e^x\sin^2(\pi x)}{1+e^x}dx$ なので，

$$I=\int_{0}^{1}\Big\{\frac{e^x\sin^2(\pi x)}{1+e^x}+\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}\Big\}dx=\int_{0}^{1}\sin^2(\pi x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\{1-\cos(2\pi x)\}dx=\frac{1}{2}\Big[x-\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi}\Big]_0^1=\frac{1}{2}$$

(2) 条件より，$(1+e^x)f(x)=\sin^2(\pi x)+\displaystyle\int_{-1}^{1}(e^x-e^t+1)f(t)dt$

$$(1+e^x)f(x)=\sin^2(\pi x)+(e^x+1)\int_{-1}^{1}f(t)dt-\int_{-1}^{1}e^tf(t)dt$$

ここで，$a=\displaystyle\int_{-1}^{1}f(t)dt$ ……①，$b=\displaystyle\int_{-1}^{1}e^tf(t)dt$ ……②とおくと，

$$(1+e^x)f(x)=\sin^2(\pi x)+a(e^x+1)-b$$

$$f(x)=\frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}+a-\frac{b}{1+e^x}\ \cdots\cdots\cdots③$$

①③より，$a=\displaystyle\int_{-1}^{1}\Big\{\frac{\sin^2(\pi t)}{1+e^t}+a-\frac{b}{1+e^t}\Big\}dt=\frac{1}{2}+2a-b\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+e^t}dt$ となり，

$$a=-\frac{1}{2}+b\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+e^t}dt$$

ここで，$J=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+e^t}dt$ として，$t=-s$ とおくと $dt=-ds$ となり，

$$J=-\int_{1}^{-1}\frac{1}{1+e^{-s}}ds=\int_{-1}^{1}\frac{e^s}{e^s+1}ds=\int_{-1}^{1}\frac{e^t}{1+e^t}dt$$

これより，$J+J=\displaystyle\int_{-1}^{1}\Big\{\frac{1}{1+e^t}+\frac{e^t}{1+e^t}\Big\}dt=\int_{-1}^{1}dt=2$ となり，$J=1$ なので，

$$a=-\frac{1}{2}+b\ \cdots\cdots\cdots④$$

②③より，$b=\displaystyle\int_{-1}^{1}\Big\{\frac{e^t\sin^2(\pi t)}{1+e^t}+ae^t-\frac{be^t}{1+e^t}\Big\}dt$ となり，$\displaystyle\int_{-1}^{1}e^t\,dt=e-\frac{1}{e}$

$$\int_{-1}^{1}\frac{e^t}{1+e^t}dt=\big[\log(1+e^t)\big]_{-1}^{1}=\log\frac{1+e}{1+e^{-1}}=\log e=1$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{e^t\sin^2(\pi t)}{1+e^t}dt=\int_{-1}^{1}\Big\{\sin^2(\pi t)-\frac{\sin^2(\pi t)}{1+e^t}\Big\}dt=2\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

よって，$b=\dfrac{1}{2}+\left(e-\dfrac{1}{e}\right)a-b$ から，$b=\dfrac{1}{4}+\dfrac{e^2-1}{2e}a$ ………⑤

④⑤より，$a=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{e^2-1}{2e}a$ となり，$\dfrac{e^2-2e-1}{2e}a=\dfrac{1}{4}$ となり，

$$a=\frac{e}{2(e^2-2e-1)},\ b=\frac{e}{2(e^2-2e-1)}+\frac{1}{2}=\frac{e^2-e-1}{2(e^2-2e-1)}$$

以上より，$f(x)=\dfrac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x}-\dfrac{e^2-e-1}{2(e^2-2e-1)}\cdot\dfrac{1}{1+e^x}+\dfrac{e}{2(e^2-2e-1)}$ である。

［解 説］

積分方程式の問題です。置換え型と呼ばれるタイプの典型題ですが，ただ計算量は中途半端ではありません。(1)の誘導も含めてですが。

14 ［金沢大］

座標平面において,

$$x=\sin t,\quad y=\cos t-\sin t \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

で表される曲線をC_1とし, x 軸に関してC_1と対称な曲線をC_2とする。C_1で囲まれる図形とC_2で囲まれる図形の共通部分の面積Sを求めよ。

14 ［金沢大］

曲線C_1：$x=\sin t$，$y=\cos t-\sin t$ $(0\leqq t\leqq 2\pi)$に対して，対称性を調べるために，まず，$x=f(t)$，$y=g(t)$とおくと，

$$f(t+\pi)=-f(t),\ g(t+\pi)=-g(t)$$

これより，C_1の$0\leqq t\leqq \pi$の部分と$\pi\leqq t\leqq 2\pi$の部分は原点対称になり，$0\leqq t\leqq \pi$において，

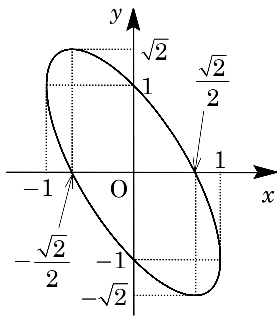
$$f'(t)=\cos t$$
$$g'(t)=-\sin t-\cos t=-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$f'(t)$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	0
$g'(t)$		$-$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	1	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	-1

すると，x，yの増減は右上表のようになり，C_1とx軸との交点について，$g(t)=0$から，

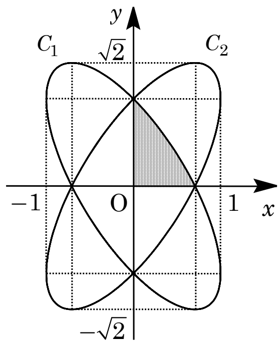
$$\cos t-\sin t=0,\ t=\frac{\pi}{4}$$

このとき，$(x,\ y)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$である。



そこで，$0\leqq t\leqq \pi$の部分を原点対称移動して$\pi\leqq t\leqq 2\pi$の部分も合わせて描くと，C_1の概形は右図のようになる。

さらに，x軸に関してC_1と対称な曲線C_2も合わせて描くと，右下図のようになる。そして，C_1とC_2で囲まれる図形の共通部分の面積Sは，対称性より，図の網点部の面積の４倍になるので，



$$\frac{S}{4}=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}y\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos t-\sin t)\cos t\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t-\sin 2t)\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{\pi}{8}$$

よって，$S=4\cdot\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$である。

［解 説］

パラメータ曲線に囲まれた部分の面積を求める頻出題です。対称性に注意すると，計算量は穏やかです。

$\boxed{15}$ ［神戸大］

媒介変数表示 $x=\sin t$, $y=(1+\cos t)\sin t$ $(0 \leqq t \leqq \pi)$ で表される曲線を C とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{dy}{dx}$ および $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t の関数として表せ。

(2) C の凹凸を調べ, C の概形を描け。

(3) C で囲まれる領域の面積 S を求めよ。

$\boxed{15}$　　［神戸大］

(1)　曲線C: $x=\sin t$, $y=(1+\cos t)\sin t$　$(0\leqq t\leqq\pi)$に対して,

$$\frac{dx}{dt}=\cos t,\ \frac{dy}{dt}=-\sin^2 t+(1+\cos t)\cos t=2\cos^2 t+\cos t-1$$

これより, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2\cos^2 t+\cos t-1}{\cos t}$ となり, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\cdot\dfrac{dt}{dx}$ から,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(-4\cos t\sin t-\sin t)\cos t-(2\cos^2 t+\cos t-1)(-\sin t)}{\cos^2 t}\cdot\frac{1}{\cos t}$$

$$=\frac{-2\cos^2 t\sin t-\sin t}{\cos^3 t}=\frac{-\sin t(2\cos^2 t+1)}{\cos^3 t}$$

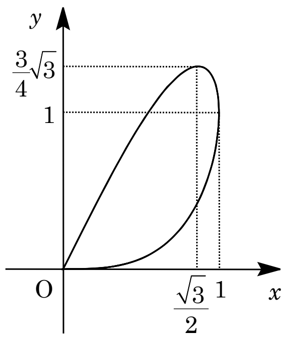
(2)　(1)から, $0<t<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\dfrac{d^2y}{dx^2}<0$ なので C は上に凸, $\dfrac{\pi}{2}<t<\pi$ のとき $\dfrac{d^2y}{dx^2}>0$ なのでCは下に凸である。

また $\dfrac{dy}{dt}=(2\cos t-1)(\cos t+1)$ に注意して, $0\leqq t\leqq\pi$ における x, y の増減を調べると, 右表のようになる。さらに$\dfrac{dy}{dx}$について,

$$\lim_{t\to+0}\frac{dy}{dx}=2,\ \lim_{t\to\pi-0}\frac{dy}{dx}=0$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$	1	$+$		$+$	0	$-$	-1
x	0	↗	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	1	↘	0
$\frac{dy}{dt}$	2	$+$	0	$-$		$-$	0
y	0	↗	$\frac{3}{4}\sqrt{3}$	↘	1	↘	0

以上より, C の概形は右下図のようになる。



(3)　まず, $0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき $y=y_1(x)$, $\dfrac{\pi}{2}\leqq t\leqq\pi$ のとき $y=y_2(x)$ とおくと, Cで囲まれる領域の面積Sは,

$$S=\int_0^1\{y_1(x)-y_2(x)\}dx$$

$$=\int_0^1 y_1(x)dx-\int_0^1 y_2(x)dx$$

ここで, 変数をxからtに置き換えて積分すると,

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos t)\sin t\cdot\cos t\,dt-\int_\pi^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos t)\sin t\cdot\cos t\,dt$$

$$=\int_0^{\pi}(\cos t+\cos^2 t)\sin t\,dt=\left[-\frac{1}{2}\cos^2 t-\frac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^{\pi}=-\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot 2=\frac{2}{3}$$

［解　説］

パラメータ曲線で囲まれる領域の面積を求める頻出題です。計算はやや多めです。

16 ［岡山大］

座標平面において線分$L: y=x$ $(0\leqq x\leqq 1)$，曲線$C: y=x^2-x+1$ $(0\leqq x\leqq 1)$およびy軸で囲まれた図形をDとする。以下の問いに答えよ。

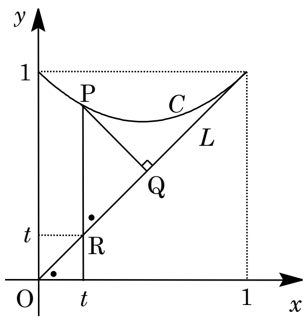
(1) C 上の点$\mathrm{P}(t,\ t^2-t+1)$から L に下ろした垂線と L の交点を Q とする。線分OQ の長さuをtで表せ。ただし O は原点とする。

(2) (1)の P, Q について線分 PQ の長さをtを用いて表せ。

(3) 図形Dを直線$y=x$のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

16 ［岡山大］

(1) 曲線 $C: y=x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\ (0\leqq x\leqq 1)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2-t+1)$ から，線分 $L: y=x\ (0\leqq x\leqq 1)$ に下ろした垂線と L の交点を Q, P から x 軸に下ろした垂線と L との交点を R とする。

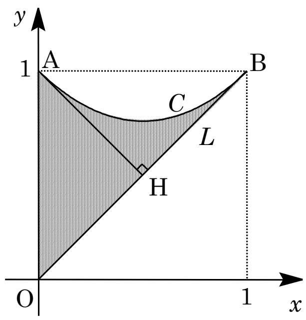


このとき，L と x 軸の正の向きとのなす角が $45°$ より，

$$u=\mathrm{OQ}=\mathrm{OR}+\mathrm{RQ}$$
$$=\frac{t}{\cos 45°}+\{(t^2-t+1)-t\}\cos 45°$$
$$=\sqrt{2}t+\frac{\sqrt{2}}{2}(t^2-2t+1)=\frac{\sqrt{2}}{2}(t^2+1)$$

(2) $\mathrm{PQ}=\mathrm{RQ}\tan 45°=\mathrm{RQ}=\frac{\sqrt{2}}{2}(t^2-2t+1)=\frac{\sqrt{2}}{2}(t-1)^2$

(3) $\mathrm{A}(0,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ 1)$ とし，A から L に下ろした垂線と L との交点を H とすると，$\mathrm{H}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ となり，



$$\mathrm{OH}=\mathrm{AH}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

さて，図形 D を直線 $y=x$ のまわりに 1 回転してできる立体のうち，△AHO を回転した円錐の体積を V_1，図形 AHB を回転した立体の体積を V_2 とすると，

$$V_1=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{12}\pi,\quad V_2=\pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}}\mathrm{PQ}^2\,du$$

ここで，(1)より $du=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2t\,dt=\sqrt{2}t\,dt$ となり，$u=\frac{\sqrt{2}}{2}\to\sqrt{2}$ は $t=0\to 1$ から，

$$V_2=\pi\int_0^1\frac{1}{2}(t-1)^4\cdot\sqrt{2}t\,dt=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\int_0^1 t(t-1)^4\,dt$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\left\{\frac{1}{5}\Big[t(t-1)^5\Big]_0^1-\frac{1}{5}\int_0^1(t-1)^5\,dt\right\}=-\frac{\sqrt{2}}{10}\pi\cdot\frac{1}{6}\Big[(t-1)^6\Big]_0^1=\frac{\sqrt{2}}{60}\pi$$

よって，求める立体の体積は，$V_1+V_2=\frac{\sqrt{2}}{12}\pi+\frac{\sqrt{2}}{60}\pi=\frac{\sqrt{2}}{10}\pi$ である。

［解 説］

斜回転体の体積を求める典型的な問題です。誘導が詳しく付いているので，方針を誤ることはないでしょう。

17 ［東京医歯大］

a と b を実数として，xy 平面において，2 つの曲線

$$C_1 : y = x^4 - x^2,\ C_2 : y = a(x^2 - 1)$$

および直線 $l : y = b$ を考える。ただし C_1 と l は相異なる 4 点で交わるとする。また C_1 と C_2 は $0 < x_0 < 1$ となる交点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ をひとつもつとする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) a のとりうる値の範囲を求めよ。また x_0，y_0 を a を用いて表せ。

(2) b のとりうる値の範囲を求めよ。また C_1 と l の交点の x 座標を b を用いて表せ。

(3) C_1 と l で囲まれる領域のうち，$y \leqq b$ の部分を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_1 とする。V_1 を b を用いて表せ。

(4) $b = y_0$ として，C_2 と l で囲まれる領域のうち，$y \leqq y_0$ の部分を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_2 とする。$3V_1 = V_2$ のとき，a の値を求めよ。

17　　　　［東京医歯大］

(1)　$C_1: y=x^4-x^2$ ……①，$C_2: y=a(x^2-1)$ ……②，$l: y=b$ ……③に対し，①と②を連立すると，$x^4-x^2=a(x^2-1)$ となり，

$$x^2(x+1)(x-1)=a(x+1)(x-1),\ (x+1)(x-1)(x^2-a)=0\ \cdots\cdots\cdots④$$

ここで，C_1 と C_2 が $0<x_0<1$ となる交点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ をひとつもつ条件は,

(i)　$a=0$ のとき　④の実数解は $x=0,\ \pm1$ より不適。

(ii)　$a<0$ のとき　④の実数解は $x=\pm1$ より不適。

(iii)　$a>0$ のとき　④の実数解は $x=\pm1,\ \pm\sqrt{a}$ となり，$0<\sqrt{a}<1$ から $0<a<1$

(i)〜(iii)より，求める条件は $0<a<1$ であり，このとき $(x_0,\ y_0)=(\sqrt{a},\ a^2-a)$

(2)　①は偶関数なので，C_1 は y 軸対称になり，

$$y'=4x^3-2x=2x(2x^2-1)$$

すると，$x\geqq0$ での増減は右表のようになり，$x<0$ の範囲も合わせて考えると，C_1 と l が相異なる 4 点で交わる条件は，$-\dfrac{1}{4}<b<0$ である。

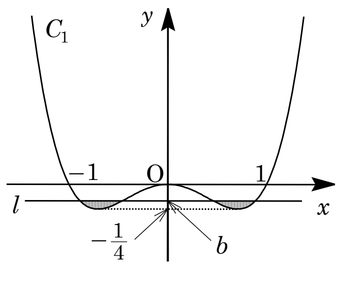
x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
y'	0	$-$	0	$+$
y	0	↘	$-\dfrac{1}{4}$	↗

このとき，C_1 と l の交点の x 座標は，①と③を連立して，$x^4-x^2=b$ より，

$$x^4-x^2-b=0,\ x^2=\frac{1\pm\sqrt{1+4b}}{2}$$

よって，$x=\sqrt{\dfrac{1\pm\sqrt{1+4b}}{2}},\ -\sqrt{\dfrac{1\pm\sqrt{1+4b}}{2}}$ となる。

(3)　C_1 と l で囲まれる領域のうち，$y\leqq b$ の部分を y 軸のまわりに回転してできる立体について，$y=t$ $\left(-\dfrac{1}{4}\leqq t\leqq b\right)$ における断面積は, (2)を利用して,



$$\pi\left(\frac{1+\sqrt{1+4t}}{2}-\frac{1-\sqrt{1+4t}}{2}\right)=\pi\sqrt{1+4t}$$

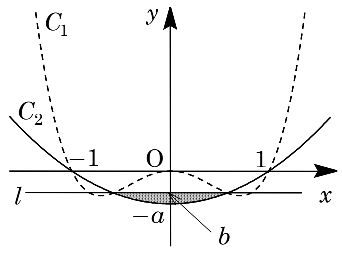
これより，この立体の体積 V_1 は,

$$V_1=\pi\int_{-\frac{1}{4}}^{b}\sqrt{1+4t}\,dt=\pi\left[\frac{2}{3}(1+4t)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{4}\right]_{-\frac{1}{4}}^{b}=\frac{\pi}{6}(1+4b)^{\frac{3}{2}}\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

(4)　$b=y_0=a^2-a$ のとき，C_2 と $y=t$ との交点の x 座標は, ②より $a(x^2-1)=t$ となり,

$$x^2=\frac{t+a}{a},\ x=\pm\sqrt{\frac{t+a}{a}}$$

すると，C_2 と l で囲まれる領域のうち，$y\leqq b$ の部分を y 軸のまわりに回転してできる立体について，



$y=t\ (-a\leqq t\leqq b)$ における断面積は $\pi\cdot\dfrac{t+a}{a}$ となるので，この立体の体積 V_2 は,

$$V_2=\pi\int_{-a}^{b}\frac{t+a}{a}dt=\frac{\pi}{a}\Big[\frac{1}{2}(t+a)^2\Big]_{-a}^{b}=\frac{\pi}{2a}(b+a)^2\cdots\cdots\cdots⑥$$

ここで，$b=a^2-a$ を代入すると，⑤⑥より，

$$V_1=\frac{\pi}{6}(1+4a^2-4a)^{\frac{3}{2}}=\frac{\pi}{6}\{(2a-1)^2\}^{\frac{3}{2}},\ V_2=\frac{\pi}{2a}(a^2-a+a)^2=\frac{\pi}{2}a^3$$

さて，条件より，$3V_1=V_2$ なので，

(i)　$0<a<\frac{1}{2}$ のとき

$3\cdot\frac{\pi}{6}(1-2a)^3=\frac{\pi}{2}a^3$ より $1-2a=a$ となり，$a=\frac{1}{3}$ で適する。

(ii)　$\frac{1}{2}\leqq a<1$ のとき

$3\cdot\frac{\pi}{6}(2a-1)^3=\frac{\pi}{2}a^3$ より $2a-1=a$ となり，$a=1$ で適さない。

(i)(ii)より，求める a の値は，$a=\frac{1}{3}$ である。

［解　説］

回転体の体積を求める問題です。ただ，与えられた曲線がどちらも y 軸対称であるため，複雑な構図ではありません。なお，最後の詰めは要注意です。

$\boxed{18}$ ［名古屋大］

正の整数 n に対し，$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\theta}{\cos^n\theta}$ とする。

(1)　I_1 を求めよ。必要ならば $\dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\right)$ を使ってよい。

(2)　$n \geqq 3$ のとき，I_n を I_{n-2} と n で表せ。

(3)　xyz 空間において xy 平面内の原点を中心とする半径 1 の円板を D とする。D を底面とし，点 $(0,\ 0,\ 1)$ を頂点とする円錐を C とする。C を平面 $x = \dfrac{1}{2}$ で 2 つの部分に切断したとき，小さい方を S とする。z 軸に垂直な平面による切り口を考えて S の体積を求めよ。

$\boxed{18}$ ［名古屋大］

(1) $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\Big(\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\Big)d\theta$

$=\frac{1}{2}\Big[\log|1+\sin\theta|-\log|1-\sin\theta|\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}\Big[\log\Big|\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\Big|\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$=\frac{1}{2}\log\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})^2=\log(2+\sqrt{3})$ ………①

(2) $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\theta}{\cos^n\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^{n-2}\theta}d\theta$

$=\Big[\tan\theta\cdot\frac{1}{\cos^{n-2}\theta}\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}-(-n+2)\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan\theta\cdot\frac{-\sin\theta}{\cos^{n-1}\theta}d\theta$

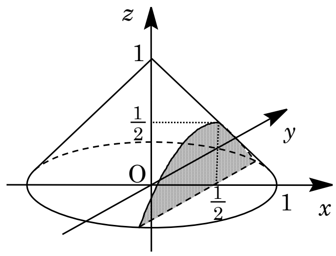
$=\sqrt{3}\cdot 2^{n-2}-(n-2)\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2\theta}{\cos^n\theta}d\theta=\sqrt{3}\cdot 2^{n-2}-(n-2)\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^n\theta}d\theta$

$=\sqrt{3}\cdot 2^{n-2}-(n-2)\int_0^{\frac{\pi}{3}}\Big(\frac{1}{\cos^n\theta}-\frac{1}{\cos^{n-2}\theta}\Big)d\theta=\sqrt{3}\cdot 2^{n-2}-(n-2)(I_n-I_{n-2})$

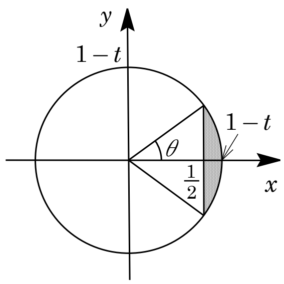
すると，$(1+n-2)I_n=\sqrt{3}\cdot 2^{n-2}+(n-2)I_{n-2}$ となり，

$I_n=\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}+\frac{\sqrt{3}}{n-1}\cdot 2^{n-2}$ ………②

(3) xy 平面内の原点を中心とする半径 1 の円板を底面とし，点 $(0,\ 0,\ 1)$ を頂点とする円錐 C の $x\geqq\frac{1}{2}$ の部分 S を，平面 $z=t$ $\left(0\leqq t\leqq\frac{1}{2}\right)$ で切断したとき，その切り口は点 $(0,\ 0,\ t)$ を中心とする半径 $1-t$ の円板の $x\geqq\frac{1}{2}$ の部分になる。



そして，右図の網点部で表される切り口について，θ を $(1-t)\cos\theta=\frac{1}{2}$ で設定し，切り口の面積を $T(t)$ とおくと，



$T(t)=2\Big\{\frac{1}{2}(1-t)^2\theta-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(1-t)\sin\theta\Big\}$

$=(1-t)^2\theta-\frac{1}{2}(1-t)\sin\theta=\frac{\theta}{4\cos^2\theta}-\frac{\sin\theta}{4\cos\theta}$

すると，求める S の体積 V は，

$V=\int_0^{\frac{1}{2}}T(t)dt$

ここで，$t=1-\frac{1}{2\cos\theta}$ から $dt=-\frac{\sin\theta}{2\cos^2\theta}d\theta$ となり，また $t=0\to\frac{1}{2}$ のとき $\theta=\frac{\pi}{3}\to 0$ であるので，

$$V=-\int_{\frac{\pi}{3}}^{0}\left(\frac{\theta}{4\cos^2\theta}-\frac{\sin\theta}{4\cos\theta}\right)\cdot\frac{\sin\theta}{2\cos^2\theta}d\theta=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\theta\sin\theta}{\cos^4\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\cos^3\theta}\right)d\theta$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2\theta}{\cos^3\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^3\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^3\theta}-\frac{1}{\cos\theta}\right)d\theta=I_3-I_1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\theta\sin\theta}{\cos^4\theta}d\theta=\left[\frac{\theta}{3\cos^3\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^3\theta}d\theta=\frac{8}{9}\pi-\frac{1}{3}I_3$$

すると，①②を利用して，

$$V=\frac{1}{8}\left(\frac{8}{9}\pi-\frac{1}{3}I_3-I_3+I_1\right)=\frac{\pi}{9}-\frac{1}{6}I_3+\frac{1}{8}I_1=\frac{\pi}{9}-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}I_1+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot2\right)+\frac{1}{8}I_1$$

$$=\frac{\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{24}I_1=\frac{\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{24}\log(2+\sqrt{3})$$

［解　説］

立体の体積計算についての有名問題です。(1)(2)の定積分を誘導として考えると，中心角を設定して，切り口の弓形の面積を求めるという流れが見えてきます。計算はやや面倒ですが。