1 ［筑波大］

i は虚数単位とする。複素数 z に対して，その共役複素数を $\overline{z}$ で表す。複素数平面上で，次の等式を満たす点 z の全体が表す図形を C とする。

$$z\overline{z}+(1+3i)z+(1-3i)\overline{z}+9=0$$

以下の問いに答えよ。

(1) 図形 C を複素数平面上に描け。

(2) 複素数 w に対して，$\alpha=w+\overline{w}-1$，$\beta=w+\overline{w}+1$ とする。w，α，β が表す複素数平面上の点をそれぞれ P, A, B とする。点 P は C 上を動くとする。△PAB の面積が最大となる複素数 w，およびそのときの△PAB の外接円の中心と半径を求めよ。

1 ［筑波大］

(1) $z\overline{z}+(1+3i)z+(1-3i)\overline{z}+9=0$ ……(＊)に対して，$\gamma=1-3i$ とおくと，

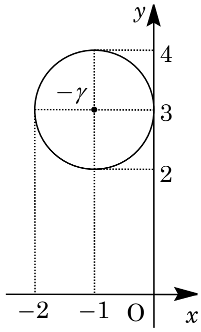
$$\overline{\gamma}=1+3i,\ \gamma\overline{\gamma}=1^2+(-3)^2=10$$

(＊)から，$z\overline{z}+\overline{\gamma}z+\gamma\overline{z}+\gamma\overline{\gamma}-1=0$，$(z+\gamma)(\overline{z}+\overline{\gamma})=1$ となり，

$$|z+\gamma|^2=1,\ |z-(-\gamma)|=1$$

よって，点 z は点 $-\gamma=-1+3i$ を中心とする半径 1 の円を描く。

そこで，点 z の全体が表す図形を C とすると，C は複素数平面上で右図のようになる。



(2) 複素数 w に対して，$\alpha=w+\overline{w}-1$，$\beta=w+\overline{w}+1$ とし，P(w)，A(α)，B(β) とおく。そして，$w=x+yi$ とおくと，

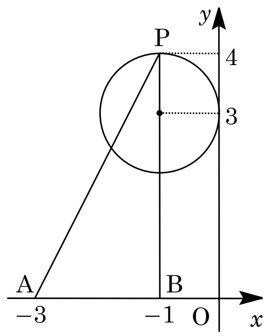
$$\alpha=(x+yi)+(x-yi)-1=2x-1,\ \beta=(x+yi)+(x-yi)+1=2x+1$$

これより，A(α)，B(β) はともに実軸上にあり，

$$\mathrm{AB}=|\beta-\alpha|=|(2x+1)-(2x-1)|=2$$

すると，△PAB の面積が最大となるのは，点 P が C 上を動くことから，P と実軸との距離が最大になるとき，すなわち $w=-1+4i$ のときである。

そして，$x=-1$ から $\alpha=-2-1=-3$，$\beta=-2+1=-1$ となり，△PAB は∠B＝90°の直角三角形である。



よって，△PAB の外接円の中心は，PA の中点となり，

$$\frac{1}{2}\{(-1+4i)+(-3)\}=-2+2i$$

また，半径は，$|(-2+2i)-(-3)|=|1+2i|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ となる。

［解 説］

複素数平面上の円のついての標準的な問題です。(1)は，結論を承知のうえでの変形ですが，普通に $z=x+yi$ を代入しても構いません。

2　　［金沢大］

実数 k と複素数 z（ただし，$z \neq -1$）に対して，$w = \dfrac{z+k}{z+1}$ とする。また，i を虚数単位とする。次の問いに答えよ。

(1)　$k=0$ とする。$z=0$ に対する w の値を α，$z=1$ に対する w の値を β，$z=\sqrt{3}i$ に対する w の値を γ とする。複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ について，$\angle\mathrm{BAC}$ の大きさを求めよ。

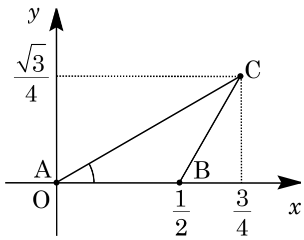
(2)　$k=-1$ とする。点 z が複素数平面の原点 O を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円の周上を動くとき，点 w の描く図形を求めよ。

(3)　$k \neq 1$ とする。複素数平面において，点 z が虚軸上を動くとき，点 w の描く図形を F とする。F が半径 $\dfrac{1}{2}$ の円の周に含まれるときの k の値をすべて求めよ。

２　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［金沢大］

(1)　複素数zに対して，$w=\dfrac{z}{z+1}$　$(z\neq -1)$

このとき，$z=0$に対して$w=\alpha=0$，$z=1$に対して$w=\beta=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$，$z=\sqrt{3}i$に対して$w=\gamma=\dfrac{\sqrt{3}i}{\sqrt{3}i+1}=\dfrac{\sqrt{3}i(-\sqrt{3}i+1)}{4}=\dfrac{3+\sqrt{3}i}{4}$



そこで，複素数平面上に 3 点A(α)，B(β)，C(γ)を定めると，右図から，

$$\angle\mathrm{BAC}=\arg\gamma=\frac{\pi}{6}$$

(2)　複素数zに対して，$w=\dfrac{z-1}{z+1}$　$(z\neq -1)$

このとき，$(z+1)w=z-1$から$(w-1)z=-w-1$となり，$w=1$では不成立より，

$$z=-\frac{w+1}{w-1}\quad (w\neq 1)$$

条件より，$|z|=\sqrt{2}$なので，$\left|-\dfrac{w+1}{w-1}\right|=\sqrt{2}$となり，$|w+1|=\sqrt{2}|w-1|$から，

$$|w+1|^2=2|w-1|^2,\ (w+1)(\overline{w}+1)=2(w-1)(\overline{w}-1)$$

まとめると，$w\overline{w}-3w-3\overline{w}+1=0$となり，$(w-3)(\overline{w}-3)=8$から，

$$|w-3|^2=8,\ |w-3|=2\sqrt{2}$$

よって，点 w の描く図形は，中心が点 3 で半径が$2\sqrt{2}$の円である。なお，このとき$w\neq 1$は満たしている。

(3)　実数$k(k\neq 1)$と複素数zに対して，$w=\dfrac{z+k}{z+1}$　$(z\neq -1)$

このとき，$(z+1)w=z+k$から$(w-1)z=-w+k$となり，$w=1$は不成立より，

$$z=-\frac{w-k}{w-1}\quad (w\neq 1)$$

点zは虚軸上を動くので，$z+\overline{z}=0$から，$-\dfrac{w-k}{w-1}-\dfrac{\overline{w}-k}{\overline{w}-1}=0$となり，

$$(w-k)(\overline{w}-1)+(w-1)(\overline{w}-k)=0$$

まとめると，$2w\overline{w}-(k+1)w-(k+1)\overline{w}+2k=0$となり，

$$w\overline{w}-\frac{k+1}{2}w-\frac{k+1}{2}\overline{w}+k=0,\ \left(w-\frac{k+1}{2}\right)\left(\overline{w}-\frac{k+1}{2}\right)=\frac{(k+1)^2}{4}-k$$

これより，$\left|w-\dfrac{k+1}{2}\right|^2=\dfrac{(k-1)^2}{4}$，$\left|w-\dfrac{k+1}{2}\right|=\dfrac{|k-1|}{2}$と変形すると，点 w の描く図形をFは，$k\neq 1$から，中心が点$\dfrac{k+1}{2}$で半径が$\dfrac{|k-1|}{2}$の円である。

そして，条件から，Fが半径$\dfrac{1}{2}$の円の周に含まれることより，

$$\frac{|k-1|}{2}=\frac{1}{2},\ |k-1|=1$$

よって，求める k の値は，$k-1=\pm1$ から $k=0,\ 2$ である。

［解 説］

複素数と図形についての頻出タイプの問題です。なお，(3)の「円の周に含まれる」という問題文には注意が必要です。

3　　　　［東京工大］

複素数平面上の異なる 3 点 A, B, C を複素数 α, β, γ で表す。ここで A, B, C は同一直線上にないと仮定する。

(1) △ABC が正三角形となる必要十分条件は，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ であることを示せ。

(2) △ABC が正三角形のとき，△ABC の外接円上に点 P を任意にとる。このとき，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ および $\mathrm{AP}^4+\mathrm{BP}^4+\mathrm{CP}^4$ を外接円の半径 R を用いて表せ。ただし 2 点 X, Y に対し，XY とは線分 XY の長さを表す。

3　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京工大］

(1)　複素数平面上で，同一直線上にない異なる 3 点$A(\alpha)$，$B(\beta)$，$C(\gamma)$に対して，$\triangle ABC$が正三角形となる条件は，以下，複号同順で，

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\cos(\pm 60^\circ)+i\sin(\pm 60^\circ)\cdots\cdots\cdots①$$

すると，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$となり，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}-\dfrac{1}{2}=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

両辺 2 乗して，$\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2-\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}+\dfrac{1}{4}=-\dfrac{3}{4}$となり，$\dfrac{(\gamma-\alpha)^2}{(\beta-\alpha)^2}-\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}+1=0$

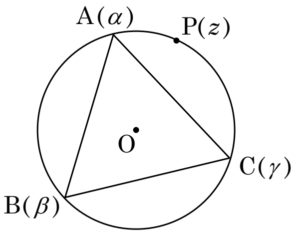
$$(\gamma-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)+(\beta-\alpha)^2=0$$

展開して，$(\gamma^2-2\gamma\alpha+\alpha^2)-(\beta\gamma-\alpha\beta-\gamma\alpha+\alpha^2)+(\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2)=0$となり，

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\cdots\cdots\cdots②$$

逆に，②が成立するとき，①が成り立つ。

(2)　まず，正三角形 ABC の外心を原点 O としても，一般性は失われない。ここで，外接円上の任意の点$P(z)$をとると，外接円の半径がRより，



$$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=|z|=R\cdots\cdots\cdots③$$

そして，$\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=0$より，$\alpha+\beta+\gamma=0\cdots\cdots\cdots④$

さらに，$(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$より，②④から，

$$0=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2),\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0\cdots\cdots\cdots⑤$$

さて，$AP^2=|z-\alpha|^2=(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})=z\overline{z}-\overline{\alpha}z-\alpha\overline{z}+\alpha\overline{\alpha}$となり，③から，

$$AP^2=|z|^2-\overline{\alpha}z-\alpha\overline{z}+|\alpha|^2=2R^2-\overline{\alpha}z-\alpha\overline{z}$$

同様に，$BP^2=2R^2-\overline{\beta}z-\beta\overline{z}$，$CP^2=2R^2-\overline{\gamma}z-\gamma\overline{z}$となるので，④から，

$$\begin{aligned}AP^2+BP^2+CP^2&=6R^2-(\overline{\alpha}+\overline{\beta}+\overline{\gamma})z-(\alpha+\beta+\gamma)\overline{z}\\&=6R^2-(\overline{\alpha+\beta+\gamma})z-(\alpha+\beta+\gamma)\overline{z}=6R^2\end{aligned}$$

また，$AP^4=(AP^2)^2=\{2R^2-(\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z})\}^2$となるので，

$$\begin{aligned}AP^4&=4R^4-4R^2(\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z})+(\overline{\alpha}z)^2+2\alpha\overline{\alpha}z\overline{z}+(\alpha\overline{z})^2\\&=4R^4-4R^2(\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z})+(\overline{\alpha})^2z^2+2|\alpha|^2|z|^2+\alpha^2(\overline{z})^2\\&=4R^4-4R^2(\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z})+(\overline{\alpha})^2z^2+2R^4+\alpha^2(\overline{z})^2\\&=6R^4-4R^2\overline{\alpha}z-4R^2\alpha\overline{z}+(\overline{\alpha})^2z^2+\alpha^2(\overline{z})^2\end{aligned}$$

同様に，$BP^4=6R^4-4R^2\overline{\beta}z-4R^2\beta\overline{z}+(\overline{\beta})^2z^2+\beta^2(\overline{z})^2$

$$CP^4=6R^4-4R^2\overline{\gamma}z-4R^2\gamma\overline{z}+(\overline{\gamma})^2z^2+\gamma^2(\overline{z})^2$$

以上より，④⑤を適用すると，$AP^4+BP^4+CP^4$は，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{AP}^4+\mathrm{BP}^4+\mathrm{CP}^4 &= 6R^4\times 3-4R^2(\overline{\alpha}+\overline{\beta}+\overline{\gamma})z-4R^2(\alpha+\beta+\gamma)\overline{z}\\
&\quad +\{(\overline{\alpha})^2+(\overline{\beta})^2+(\overline{\gamma})^2\}z^2+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\overline{z})^2\\
&= 18R^4-4R^2(\overline{\alpha+\beta+\gamma})z-4R^2(\alpha+\beta+\gamma)\overline{z}\\
&\quad +(\overline{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2})z^2+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\overline{z})^2\\
&= 18R^4
\end{aligned}
$$

［解　説］

複素数平面上の図形を題材にした問題で，(1)は有名頻出題です。ただ，(2)の後半では計算の深みにはまってしまい，xy 平面を設定した方がよかったのではないかという考えが頭をよぎりました。しかし，(1)の結論②の意味を考え，⑤を導き利用する方針で処理しました。

$\boxed{4}$　　［名古屋大］

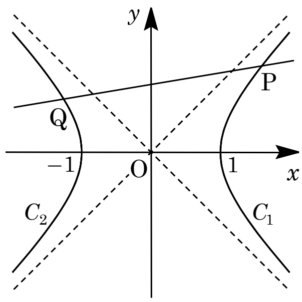
双曲線 $x^2-y^2=1$ の $x>0$ の部分を C_1，$x<0$ の部分を C_2 とする。以下の問いに答えよ。

(1)　直線 $ax-by=1$ が C_1，C_2 の両方と１点ずつで交わるための $a,\ b$ の条件を求めよ。

(2)　$a,\ b$ は(1)で求めた条件をみたすものとする。点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ をとり，直線 $ax-by=1$ と C_1，C_2 の交点をそれぞれ P，Q とする。このとき△APQ の面積 S を $a,\ b$ を用いて表せ。

(3)　面積 S の最小値を求めよ。また，その最小値をとるための $a,\ b$ の条件を求めよ。

4 ［名古屋大］



(1) 双曲線 $x^2-y^2=1$ ……①の $x>0$ の部分を C_1，$x<0$ の部分を C_2 とするとき，直線 $ax-by=1$ ……②が C_1，C_2 の両方と 1 点ずつで交わる条件について，まず $b=0$ のとき②は $x=\dfrac{1}{a}$ となり，C_1，C_2 の両方と交わることはない。

これより $b\neq 0$ となり，②は $y=\dfrac{1}{b}(ax-1)$ ………③

①③を連立して，$x^2-\dfrac{1}{b^2}(ax-1)^2=1$ から，

$$b^2x^2-(a^2x^2-2ax+1)=b^2,\ (b^2-a^2)x^2+2ax-1-b^2=0 \text{ ………④}$$

④の解が $x\leqq -1$，$1\leqq x$ に 1 つずつの条件は，$f(x)=(b^2-a^2)x^2+2ax-1-b^2$ とおき，$f(0)=-1-b^2<0$ に注意すると，

$$b^2-a^2>0,\ f(-1)=-(a+1)^2\leqq 0,\ f(1)=-(a-1)^2\leqq 0$$

よって，求める a, b の条件は $b^2-a^2>0$ となり，これは $b\neq 0$ を満たしている。

(2) ④の解は，$x=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2+(b^2-a^2)(1+b^2)}}{b^2-a^2}=\dfrac{-a\pm|b|\sqrt{b^2-a^2+1}}{b^2-a^2}$ となり，これを $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha\leqq -1,\ 1\leqq\beta)$ とおくと，

$$\alpha=\frac{-a-|b|\sqrt{b^2-a^2+1}}{b^2-a^2},\ \beta=\frac{-a+|b|\sqrt{b^2-a^2+1}}{b^2-a^2}$$

すると，③から，$\mathrm{P}\Big(\beta,\ \dfrac{1}{b}(a\beta-1)\Big)$，$\mathrm{Q}\Big(\alpha,\ \dfrac{1}{b}(a\alpha-1)\Big)$ となり，

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+\frac{a^2}{b^2}(\beta-\alpha)^2}=\frac{\beta-\alpha}{|b|}\sqrt{a^2+b^2}=\frac{2\sqrt{b^2-a^2+1}}{b^2-a^2}\sqrt{a^2+b^2}$$

点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ と直線 $ax-by=1$ の距離 h は，$h=\dfrac{|a^2-b^2-1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{b^2-a^2+1}{\sqrt{a^2+b^2}}$

これより，$\triangle\mathrm{APQ}$ の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot h=\frac{\sqrt{b^2-a^2+1}}{b^2-a^2}\sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{b^2-a^2+1}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{(b^2-a^2+1)^{\frac{3}{2}}}{b^2-a^2}$$

(3) $t=b^2-a^2>0$ とおくと，$S=\dfrac{(t+1)^{\frac{3}{2}}}{t}$ となり，

$$S'=\frac{\frac{3}{2}(t+1)^{\frac{1}{2}}\cdot t-(t+1)^{\frac{3}{2}}}{t^2}=\frac{(t+1)^{\frac{1}{2}}(t-2)}{2t^2}$$

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$
S'		$-$	0	$+$
S		$\searrow$		$\nearrow$

すると，S の増減は右上表のようになり，S の最小値は $\dfrac{3^{\frac{3}{2}}}{2}=\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ となる。このとき，$t=2$ から $b^2-a^2=2$ である。

［解 説］

双曲線と直線の関係の問題です。解の流れは明快ですので，なるべく計算量の少ない方法を採用することがポイントになります。なお，(1)の結論は，直線 $ax-by=1$ の傾きが -1 より大で 1 より小であるのと同値ですが，これは漸近線の傾きが ±1 であることと関連しています。

$\boxed{5}$ ［岡山大］

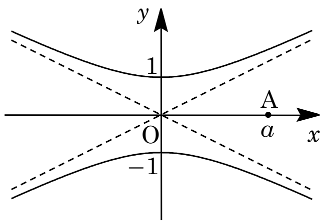
a を正の数とする。xy 平面において，点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ をとり，C_1 を双曲線 $x^2-4y^2=-4$ とし，C_2 を双曲線 $x^2-4y^2=4$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 P が C_1 上にあるとする。このとき AP を最小にする点 P とその最小値を求めよ。

(2) 点 P が C_2 上にあるとする。このとき AP を最小にする点 P とその最小値を求めよ。

(3) 点 P が C_1 または C_2 上にあるとする。このとき点 $(2,\ 0)$ が, AP の最小値を与える点 P となるような a の値の範囲を求めよ。

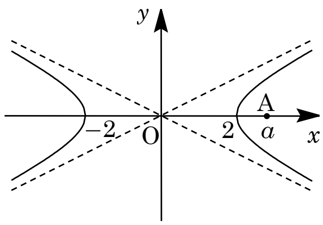
5　　　　［岡山大］



(1)　点 $\mathrm{A}(a,\ 0)\ (a>0)$ に対して，$C_1: x^2-4y^2=-4$ 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ \pm\sqrt{\dfrac{t^2}{4}+1}\right)$ とおくと，

$$\mathrm{AP}^2=(t-a)^2+\frac{t^2}{4}+1=\frac{5}{4}t^2-2at+a^2+1$$
$$=\frac{5}{4}\left(t-\frac{4}{5}a\right)^2+\frac{1}{5}a^2+1$$

これより，$t=\dfrac{4}{5}a$ のとき AP は最小値 $\sqrt{\dfrac{1}{5}a^2+1}$ をとる。また，このとき $\mathrm{P}\left(\dfrac{4}{5}a,\ \pm\sqrt{\dfrac{4}{25}a^2+1}\right)$ となる。



(2)　$C_2: x^2-4y^2=4$ 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ \pm\sqrt{\dfrac{t^2}{4}-1}\right)$ とおくと，

$$\mathrm{AP}^2=(t-a)^2+\frac{t^2}{4}-1=\frac{5}{4}t^2-2at+a^2-1$$
$$=\frac{5}{4}\left(t-\frac{4}{5}a\right)^2+\frac{1}{5}a^2-1$$

ここで，$a>0$ から $t\geqq 2$ で最小値を調べると，

(i)　$\dfrac{4}{5}a\geqq 2\ \left(a\geqq\dfrac{5}{2}\right)$ のとき

$t=\dfrac{4}{5}a$ のとき AP^2 は最小となり, AP は最小値 $\sqrt{\dfrac{1}{5}a^2-1}$ をとる。そして，このとき $\mathrm{P}\left(\dfrac{4}{5}a,\ \pm\sqrt{\dfrac{4}{25}a^2-1}\right)$ である。

(ii)　$\dfrac{4}{5}a<2\ \left(0<a<\dfrac{5}{2}\right)$ のとき

$t=2$ のとき AP^2 は最小となり, AP は最小値 $\sqrt{(2-a)^2}=|2-a|$ をとる。そして，このとき $\mathrm{P}(2,\ 0)$ である。

(3)　点 A と C_1 上の点の距離の最小値を $m_1(a)$ とおくと，(1)より，$m_1(a)=\sqrt{\dfrac{1}{5}a^2+1}$

また，点 A と C_2 上の点の距離の最小値を $m_2(a)$ とおくと，(2)より，

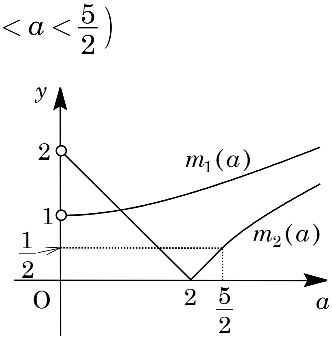
$$m_2(a)=\sqrt{\frac{1}{5}a^2-1}\ \left(a\geqq\frac{5}{2}\right),\ m_2(a)=|2-a|\left(0<a<\frac{5}{2}\right)$$

ここで，$y=m_1(a)$，$y=m_2(a)$ のグラフを描くと右図のようになる。さて，$0<a<2$ において，$y=m_1(a)$，$y=m_2(a)$ を連立すると，

$$\sqrt{\frac{1}{5}a^2+1}=|2-a|,\ \frac{1}{5}a^2+1=4-4a+a^2$$

すると，$4a^2-20a+15=0$ となり，$0<a<2$ から，

$$a=\frac{5-\sqrt{10}}{2}$$



そこで，点 P が C_1 または C_2 上にあるとき，AP の最小値を m とすると，

$$m = m_1(a)\left(0 < a < \frac{5-\sqrt{10}}{2}\right),\ \ m = m_2(a)\left(a \geqq \frac{5-\sqrt{10}}{2}\right)$$

これより，点$(2,\ 0)$が，AP の最小値を与える点 P となるような a の値の範囲は，

$$\frac{5-\sqrt{10}}{2} \leqq a \leqq \frac{5}{2}$$

［解 説］

双曲線を題材にした問題です。(3)では「m は $m_1(a)$ と $m_2(a)$ の大きくない方」ということに着目して考えました。ただ，やや複雑な関数が現れたので，グラフを書いて整理しています。

6 ［大阪大］

3 辺の長さの和が 2 である三角形 ABC において，辺 BC の長さを a，辺 CA の長さを b で表す。三角形 ABC を辺 BC を軸として 1 回転させてできる回転体の体積を V とする。以下の問いに答えよ。

(1) a の値を固定して b の値を変化させたとき，V が最大になるのは，三角形 ABC が辺 BC を底辺とする二等辺三角形となるときである。これを示せ。

(2) a，b の値をともに変化させるとき，V の最大値と，最大値を与える a，b の値をそれぞれ求めよ。

$\boxed{6}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［大阪大］

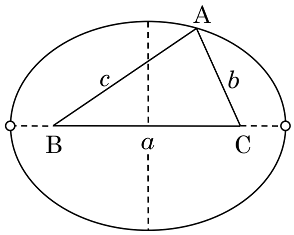
(1)　$\triangle$ABC において，BC$=a$，CA$=b$，AB$=c$ とすると，$a+b+c=2$ のもとで，三角形の形成条件 $|b-c|<a<b+c$ から，$|a+2b-2|<a<2-a$ となる。

すると，$-a<a+2b-2<a$ かつ $a<2-a$ より，

$$0<a<1,\ 1-a<b<1\cdots\cdots\cdots(*)$$

そこで，a の値を $0<a<1$ で固定し，b の値を $1-a<b<1$ で変化させるとき，

$$b+c=2-a,\ \mathrm{AC}+\mathrm{AB}=2-a$$



これより，点 A の描く軌跡は, 2 点 B, C を焦点とする楕円になる。

ここで，長軸の長さを $2p$ とおくと，$2p=2-a$ から，

$$p=1-\frac{a}{2}$$

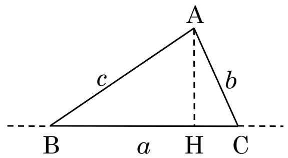
また，短軸の長さを $2q$ とおくと，$q=\sqrt{\left(1-\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{1-a}$

さて，$\triangle$ABC を辺 BC を軸として 1 回転させてできる回転体の体積 V は，A から直線 BC に垂線を下ろし，直線 BC との交点を H として，

(i)　$\angle$B と $\angle$C がともに 90° 以下のとき

AH$=h$，CH$=x$ とおくと，

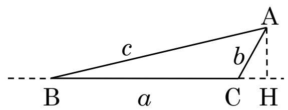
$$V=\frac{1}{3}\pi h^2(a-x)+\frac{1}{3}\pi h^2x=\frac{1}{3}\pi h^2a$$



(ii)　$\angle$B または $\angle$C が 90° より大のとき

AH$=h$，CH$=x$ とおくと，$\angle\mathrm{C}>90^\circ$ のとき，

$$V=\frac{1}{3}\pi h^2(a+x)-\frac{1}{3}\pi h^2x=\frac{1}{3}\pi h^2a$$



なお，$\angle\mathrm{B}>90^\circ$ のときも同様になる。

(i)(ii)のいずれの場合も，$V=\frac{1}{3}\pi h^2a$ である。

これより，V が最大になるのは $h=$ AH が最大のとき，すなわち A が楕円の短軸上に位置するときであり，$\triangle$ABC は辺 BC を底辺とする二等辺三角形となる。

なお，このとき $a+2b=2$ から $b=1-\frac{a}{2}$ となり，$(*)$を満たしている。

(2)　a の値を固定したとき，V が最大になるのは，(1)から $h=q=\sqrt{1-a}$ のときより，

$$V=\frac{1}{3}\pi(1-a)a=\frac{1}{3}\pi(-a^2+a)=\frac{1}{3}\pi\left\{-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right\}$$

次に，a を $0<a<1$ で変化させると，V は $a=\frac{1}{2}\left(b=\frac{3}{4}\right)$ のとき最大になり，最大値は $\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{12}$ である。

［解 説］

1 文字固定型の最大・最小問題です。この問題の山場は，(1)の誘導において，2 点からの距離の和が一定という条件を，楕円の軌跡に翻訳する点です。

$\boxed{7}$ ［京都大］

p を正の整数とする。α，β は x に関する方程式 $x^2-2px-1=0$ の 2 つの解で，$|\alpha|>1$ であるとする。

(1) すべての正の整数 n に対し，$\alpha^n+\beta^n$ は整数であり，さらに偶数であることを証明せよ。

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-\alpha)^n\sin(\alpha^n\pi)$ を求めよ。

７　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［京都大］

(1)　正の整数 p に対して，方程式 $x^2-2px-1=0$ の解を α，β とすると，

$$\alpha+\beta=2p,\ \ \alpha\beta=-1$$

以下，すべての正の整数 n に対し，$\alpha^n+\beta^n$ は偶数であることを証明する。

(i)　$n=1,\ 2$ のとき

$\alpha^1+\beta^1=2p$，$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4p^2+2$ となり，ともに偶数である。

(ii)　$n=k,\ k+1$ のとき

$\alpha^k+\beta^k$，$\alpha^{k+1}+\beta^{k+1}$ はともに偶数であると仮定すると，

$$\begin{aligned}\alpha^{k+2}+\beta^{k+2}&=(\alpha+\beta)(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1})-\alpha\beta(\alpha^k+\beta^k)\\&=2p(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1})+(\alpha^k+\beta^k)\end{aligned}$$

これより，$\alpha^{k+2}+\beta^{k+2}$ は偶数となり，$n=k+2$ のときも成り立つ。

(i)(ii)より，すべての正の整数 n に対し，$\alpha^n+\beta^n$ は偶数である。

(2)　まず，与えられた方程式の解は $x=p\pm\sqrt{p^2+1}$ より，ともに実数である。

そこで，$\alpha\beta=-1$ より $\beta=-\dfrac{1}{\alpha}$ となり，$|\beta|=\dfrac{1}{|\alpha|}$ である。

さらに，$|\alpha|>1$ なので $0<|\beta|<1$ となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\beta^n=0$ である。

さて，(1)より l_n を整数として，$\alpha^n+\beta^n=2l_n$ と表すことができるので，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(-\alpha)^n\sin(\alpha^n\pi)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\beta^n}\sin\big((2l_n-\beta^n)\pi\big)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\beta^n}\sin(-\beta^n\pi)\\&=-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\beta^n}\sin(\beta^n\pi)=-\pi\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\beta^n\pi)}{\beta^n\pi}\end{aligned}$$

すると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\beta^n\pi)=0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-\alpha)^n\sin(\alpha^n\pi)=-\pi$ である。

［解　説］

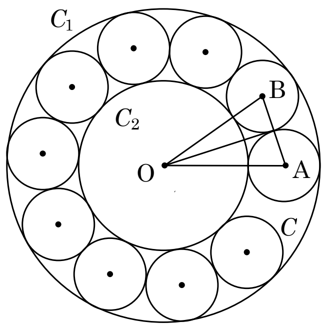
極限についての頻出題です。(2)は，条件の $|\alpha|>1$ から，$|\beta|<1$ を導き $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\beta^n=0$ を利用するという道筋が見えてきます。なお，(1)は有名題です。

8 ［信州大］

$0<r<1$とし，半径 1 の円C_1と半径 r の円C_2の中心は一致しているとする。円C_1に内接し，円C_2に外接する円をできるだけたくさん描く。ただし，どの 2 つの円も共有点の個数は 1 以下とする。描いた円の円周の長さの総和を$f(r)$とするとき，$\displaystyle\lim_{r\to1-0} f(r)$を求めよ。

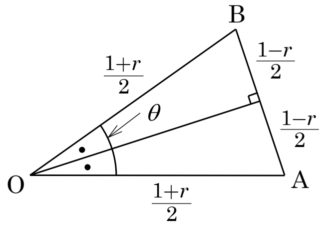
８　　　［信州大］

ともに中心が O である半径 1 の円 C_1 と半径 r $(0<r<1)$ の円 C_2 に対し，円 C_1 に内接し，円 C_2 に外接する円を C とする。そして，C のどの円も共有点の個数が 1 以下として，右図のようにできるだけたくさん描く。このとき，C の個数を n とする。



ここで，隣接する C の中心 A，B に対し，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とおくと，$n\theta \leqq 2\pi$ かつ $(n+1)\theta > 2\pi$ より，

$$\frac{2\pi}{\theta}-1 < n \leqq \frac{2\pi}{\theta} \cdots\cdots\cdots ①$$



そして，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\dfrac{1+r}{2}$ で，C の半径は $\dfrac{1-r}{2}$ より，

$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1-r}{1+r} \cdots\cdots\cdots ②$$

このとき，C の円周の長さの総和 $f(r)$ は，

$$f(r)=2\pi\cdot\frac{1-r}{2}\cdot n = n\pi(1-r) \cdots\cdots\cdots ③$$

②より，$(1+r)\sin\dfrac{\theta}{2}=1-r$ となり，$\left(1+\sin\dfrac{\theta}{2}\right)r=1-\sin\dfrac{\theta}{2}$ から，$r=\dfrac{1-\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}$

③に代入すると，$f(r)=n\pi\left(1-\dfrac{1-\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}\right)=2n\pi\cdot\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}$ となり，①から，

$$2\pi\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}\left(\frac{2\pi}{\theta}-1\right) < f(r) \leqq 2\pi\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{2\pi}{\theta} \cdots\cdots\cdots ④$$

ここで，$r\to 1-0$ のとき，②から $\theta\to 0$ となり，

$$2\pi\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{2\pi}{\theta}=2\pi^2\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{1}{1+\sin\frac{\theta}{2}}\to 2\pi^2$$

$$2\pi\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}\left(\frac{2\pi}{\theta}-1\right)=2\pi\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{2\pi}{\theta}-2\pi\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}\to 2\pi^2$$

したがって，④から，$\displaystyle\lim_{r\to 1-0} f(r)=2\pi^2$ である。

［解　説］

興味深い内容の図形と極限の問題です。ポイントは，①②③をまとめて $f(r)$ の評価式を作ることです。

9　　　　［北海道大］

α を $0<\alpha<1$ を満たす実数とし，$f(x)=\sin\dfrac{\pi x}{2}$ とする。数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1=\alpha\ ,\ \ a_{n+1}=f(a_n)\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

で定義されるとき，次の問いに答えよ。

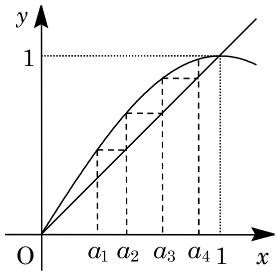
(1)　すべての自然数 n に対して，$0<a_n<1$ かつ $a_{n+1}>a_n$ が成り立つことを示せ。

(2)　$b_n=\dfrac{1-a_{n+1}}{1-a_n}$ とおくとき，すべての自然数 n に対して，$b_{n+1}<b_n$ が成り立つことを示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ および(2)で定めた $\{b_n\}$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n$ を求めよ。

9　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［北海道大］

(1)　$f(x)=\sin\dfrac{\pi x}{2}$ とするとき，数列 $\{a_n\}$ について，



$$a_1=\alpha\ (0<\alpha<1),\ a_{n+1}=f(a_n)$$

まず，すべての自然数 n に対して，$0<a_n<1$ であることを，数学的帰納法で示す。

(i)　$n=1$ のとき　$a_1=\alpha\ (0<\alpha<1)$ より成り立つ。

(ii)　$n=k$ のとき　$0<a_k<1$ と仮定する。

$0<\sin\dfrac{\pi a_k}{2}<\sin\dfrac{\pi}{2}=1$ より，$0<a_{k+1}<1$ となり，$n=k+1$ のときも成り立つ。

(i)(ii)より，すべての自然数 n に対して，$0<a_n<1$ である。

次に，$0<x<1$ において，$g(x)=f(x)-x=\sin\dfrac{\pi x}{2}-x$ とおくと，

$$g'(x)=\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}-1,\ g''(x)=-\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi x}{2}<0$$

すると，$g'(x)$ は単調に減少し，$g'(0)=\dfrac{\pi}{2}-1>0$，$g'(1)=-1<0$

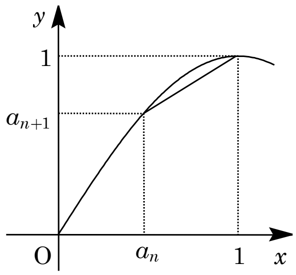
これより，$0<x<1$ に，$g'(x)=0$ となる x がただ 1 つ存在し，これを $x=\beta$ とおくと，$g(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	β	$\cdots$	1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

したがって，$0<x<1$ のとき $g(x)>0$ となり，

$0<a_n<1$ から，$g(a_n)=f(a_n)-a_n=a_{n+1}-a_n>0$ すなわち $a_{n+1}>a_n$ である。

(2)　$0<x<1$ において，$h(x)=\dfrac{1-f(x)}{1-x}$ とおくと，



$$h'(x)=\frac{-f'(x)(1-x)+\{1-f(x)\}}{(1-x)^2}$$

さらに，$k(x)=-f'(x)(1-x)+\{1-f(x)\}$ とおくと，

$$k'(x)=-f''(x)(1-x)+f'(x)-f'(x)$$
$$=-f''(x)(1-x)=\frac{\pi^2}{4}(1-x)\sin\frac{\pi x}{2}>0$$

これより，$0<x<1$ で $k(x)$ は単調に増加し，$k(x)<k(1)=1-f(1)=0$

すると，$h'(x)<0$ となり，$h(x)$ は単調に減少し，$0<a_n<a_{n+1}<1$ から，

$$h(a_n)>h(a_{n+1}),\ \frac{1-f(a_n)}{1-a_n}>\frac{1-f(a_{n+1})}{1-a_{n+1}}$$

よって，$b_n=\dfrac{1-a_{n+1}}{1-a_n}=\dfrac{1-f(a_n)}{1-a_n}$ から，$b_n>b_{n+1}$ すなわち $b_{n+1}<b_n$ となる。

(3)　(2)より，$n\geqq 2$ のとき，$\dfrac{1-a_{n+1}}{1-a_n}=b_n<b_1$ となり，$0<a_n<1$ から，

$$0<1-a_{n+1}<b_1(1-a_n)$$

これより，$0<1-a_n<(1-a_1)b_1^{\,n-1}$ となり，$0<a_1<a_2<1$ から，

$$0<b_1=\frac{1-a_2}{1-a_1}<\frac{1-a_1}{1-a_1}=1$$

すると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1-a_1)b_1^{\,n-1}=0$ となるので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1-a_n)=0$ すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1$

また，$\displaystyle b_n=\frac{1-a_{n+1}}{1-a_n}=\frac{f(1)-f(a_n)}{1-a_n}$ となり，平均値の定理から，

$$b_n=f'(c_n)=\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi c_n}{2}\quad(a_n<c_n<1)$$

$n\to\infty$ のとき，$c_n\to 1$ となるので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}=0$ である。

［解 説］

漸化式と極限の問題です。解答例の 2 つの図から，(3)の結論は容易に推測できます。ただ，(1)と(2)は証明が題意ですので，それなりのスタイルで記述しています。

$\boxed{10}$ ［信州大］

$a > -3$ とする。関数 $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+1}$ の閉区間 $[-3,\ a]$ における最大値と最小値の差が $\dfrac{11}{5}$ であるとき，a の値を求めよ。

10 ［信州大］

$f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+1}$ に対して，$f'(x)=\dfrac{(x^2+1)-(x+2)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=-\dfrac{x^2+4x-1}{(x^2+1)^2}$

ここで，$f'(x)=0$ の解は $x=-2\pm\sqrt{5}$ から，$x\geqq -3$ における $f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	-3	$\cdots$	$-2+\sqrt{5}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

さて，$f(-3)=-\dfrac{1}{10}$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ に注意すると，$a>-3$ のとき，$-3\leqq x\leqq a$ における $f(x)$ の最小値は $-\dfrac{1}{10}$ である。

条件より，最大値と最小値の差が $\dfrac{11}{5}$ から，$-3\leqq x\leqq a$ における $f(x)$ の最大値は $-\dfrac{1}{10}+\dfrac{11}{5}=\dfrac{21}{10}$ となるので，$f(x)=\dfrac{21}{10}$ すなわち $\dfrac{x+2}{x^2+1}=\dfrac{21}{10}$ を計算すると，

$$21(x^2+1)=10(x+2)\,,\ 21x^2-10x+1=0\,,\ (7x-1)(3x-1)=0$$

よって，$x=\dfrac{1}{7}$，$\dfrac{1}{3}$ となり，$f\left(\dfrac{1}{7}\right)=f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{21}{10}$ である。

ここで，$\dfrac{1}{7}<-2+\sqrt{5}<\dfrac{1}{3}$ に注意すると，求める a の値は $a=\dfrac{1}{7}$ である。

［解 説］

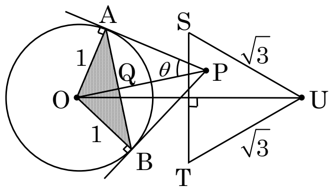
微分と増減についての基本的な問題です。解答例では省略しましたが，グラフを念頭において処理をしています。

$\boxed{11}$ ［金沢大］

平面上に 2 つの定点 O と U があり，OU$=3$を満たしている。点 O を中心とする半径 1 の円 C と 1 辺の長さが$\sqrt{3}$の正三角形△STU があり，辺 ST の中点が線分 OU 上にあるものとする。

△STU の内部または周上の点 P から円 C へ異なる 2 本の接線を引き，それらの接点をそれぞれ A，B とする。△OAB を直線 OP のまわりに 1 回転してできる円すいの体積を V とする。点 P が△STU の内部および周上を動くとき，V の最大値と最小値を求めよ。また，V の最大値，最小値をとるような点 P の存在範囲をそれぞれ△STU の内部および周上に図示せよ。

11　　［金沢大］



右図のように，点 O を中心とする半径 1 の円 C と 1 辺の長さが $\sqrt{3}$ の正三角形 STU がある。OU$=3$ のとき，△STU の内部または周上の点 P から円 C へ異なる 2 本の接線 PA, PB を引く。

さて，辺 ST は線分 OU を垂直に二等分し，OP$=x$，$\angle\mathrm{APO}=\theta$ とおくと，$\dfrac{3}{2}\leqq x\leqq 3$ のもとで $\sin\theta=\dfrac{1}{x}$ となる。また, OP と AB の交点を Q とおくと，AB⊥OP から $\angle\mathrm{OAQ}=\theta$ となり,

$$\mathrm{OQ}=\mathrm{OA}\sin\theta=\frac{1}{x},\ \ \mathrm{AQ}=\mathrm{BQ}=\mathrm{OA}\cos\theta=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

すると，△OAB を直線 OP のまわりに 1 回転してできる円すいの体積 V は,

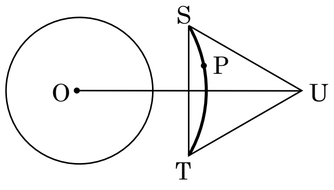
$$V=\frac{1}{3}\pi\mathrm{AQ}^2\cdot\mathrm{OQ}=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{x^2-1}{x^3}$$

$$V'=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{2x\cdot x^3-(x^2-1)\cdot 3x^2}{x^6}$$

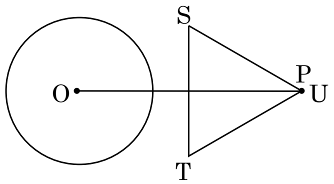
$$=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{-x^2+3}{x^4}$$

x	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	3
V'		$+$	0	$-$	
V	$\frac{10}{81}\pi$	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi$	↘	$\frac{8}{81}\pi$

これより，$\dfrac{3}{2}\leqq x\leqq 3$ における V の増減は右上表のようになり，V は $x=\sqrt{3}$ のとき最大値 $\dfrac{2\sqrt{3}}{27}\pi$ をとり，$x=3$ のとき最小値 $\dfrac{8}{81}\pi$ をとる。



また，V が最大値をとるような点 P の存在範囲は，OP$=\sqrt{3}$ から，点 O を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の円のうち，△STU の内部および周上の部分である。OS$=$OT$=\sqrt{3}$ に留意すると，右図の太線部となる。



さらに，V が最小値をとるような点 P の存在範囲は，OP$=3$ から，点 O を中心とする半径 3 の円のうち，△STU の内部および周上の部分である。OU$=3$ から，点 P が点 U と一致する場合となる。

［解 説］

微分と最大・最小についての問題です。最初, 座標系を設定しようかとも思いましたが, それには及びませんでした。

$\boxed{12}$ ［北海道大］

a を正の定数とする。微分可能な関数 $f(x)$ はすべての実数 x に対して次の条件を満たしているとする。

$$0<f(x)<1,\ \int_0^x \frac{f'(t)}{\{1-f(t)\}f(t)}dt=ax$$

さらに，$f(0)=\dfrac{1}{3}$ であるとする。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=0$，$x=1$ で囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ。さらに，$\displaystyle\lim_{a\to+0}S(a)$ を求めよ。

$\boxed{12}$　　［北海道大］

(1)　$0 < f(x) < 1$，$\displaystyle\int_0^x \frac{f'(t)}{\{1-f(t)\}f(t)}dt = ax\ (a>0)$，さらに $f(0)=\dfrac{1}{3}$ に対して，

$F(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{f'(t)}{\{1-f(t)\}f(t)}dt$ とおくと，

$$F(x)=\int_0^x\Big\{\frac{f'(t)}{1-f(t)}+\frac{f'(t)}{f(t)}\Big\}dt=\Big[-\log\big(1-f(t)\big)+\log f(t)\Big]_0^x$$

$$=\Big[\log\frac{f(t)}{1-f(t)}\Big]_0^x=\log\frac{f(x)}{1-f(x)}-\log\frac{f(0)}{1-f(0)}=\log\frac{f(x)}{1-f(x)}-\log\frac{1}{2}$$

$$=\log\frac{2f(x)}{1-f(x)}$$

すると，$F(x)=ax$ より $\dfrac{2f(x)}{1-f(x)}=e^{ax}$ となり，$2f(x)=e^{ax}\big(1-f(x)\big)$ から，

$$f(x)=\frac{e^{ax}}{e^{ax}+2}$$

(2)　$0\leqq x\leqq 1$ において $f(x)>0$ なので，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=0$，$x=1$ で囲まれる図形の面積 $S(a)$ は，

$$S(a)=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{e^{ax}}{e^{ax}+2}dx=\Big[\frac{1}{a}\log(e^{ax}+2)\Big]_0^1$$

$$=\frac{1}{a}\{\log(e^a+2)-\log 3\}=\frac{1}{a}\log\frac{e^a+2}{3}$$

ここで，$g(a)=\log(e^a+2)$ とおくと，$g'(a)=\dfrac{e^a}{e^a+2}$ となり，

$$\lim_{a\to+0}S(a)=\lim_{a\to+0}\frac{g(a)-g(0)}{a}=g'(0)=\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$$

［解　説］

積分方程式と関数の極限の融合問題です。(1)については，与えられた式の両辺を x で微分しても，その後は上の解答例と同様な作業になります。また, (2)の後半は，式変形でも極限値が求められますが，ここでは $S(a)$ の形から微分係数の定義と関連させました。

$\boxed{13}$ ［熊本大］

xy 平面において，x，y がともに整数であるとき，点$(x,\ y)$を格子点とよぶ。2 以上の整数 n に対し，

$$0 < x < n,\ 1 < 2^y < \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

をみたす格子点$(x,\ y)$の個数を$P(n)$で表す。以下の問いに答えよ。

(1) 不等式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left\{n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)-1\right\} \leqq P(n) < \sum_{k=1}^{n-1} n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)$ を示せ。

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{P(n)}{n^2}$ を求めよ。

(3) (2)で求めた極限値を L とする。不等式 $L-\dfrac{P(n)}{n^2} > \dfrac{1}{2n}$ を示せ。

$\boxed{13}$ ［熊本大］

(1) n が２以上の整数のとき，整数 x, y に対して，

$$0<x<n\cdots\cdots\cdots①,\ 1<2^y<\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\cdots\cdots\cdots②$$

①より $1\leqq x\leqq n-1$，②より $0<y<\log_2\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ から，$1\leqq y<n\log_2\left(1+\frac{x}{n}\right)$

ここで，①②をみたす格子点 $(x,\ y)$ について，直線 $x=k$ $(1\leqq k\leqq n-1)$ 上の個数を N_k とおくと，

$$n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)-1\leqq N_k<n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

①②をみたす格子点の個数 $P(n)$ は，$P(n)=\sum_{k=1}^{n-1}N_k$ なので，

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left\{n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)-1\right\}\leqq P(n)<\sum_{k=1}^{n-1}n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdots\cdots\cdots①$$

(2) ①より，$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)-1\right\}\leqq\frac{P(n)}{n^2}<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdots\cdots②$となり，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\log_2(1+x)\,dx$$

$$=\frac{1}{\log 2}\int_0^1\log(1+x)\,dx$$

$$=\frac{1}{\log 2}\Big[(1+x)\log(1+x)-x\Big]_0^1=\frac{1}{\log 2}(2\log 2-1)$$

$$=2-\frac{1}{\log 2}$$

また，$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)-1\right\}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)-\frac{n-1}{n^2}$ から，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)-1\right\}=\int_0^1\log_2(1+x)\,dx-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)$$

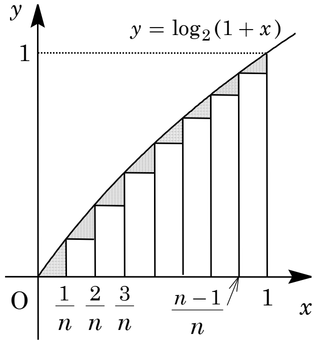
$$=2-\frac{1}{\log 2}$$

したがって，②から，$\lim_{n\to\infty}\frac{P(n)}{n^2}=2-\frac{1}{\log 2}$ である。

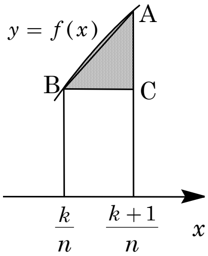
(3) $L=2-\frac{1}{\log 2}=\int_0^1\log_2(1+x)\,dx$ となり，②から，

$$L-\frac{P(n)}{n^2}>L-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$=\int_0^1\log_2(1+x)\,dx-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)$$



ここで，上式の右辺は，右図の網点部の面積の和になり，この値を S_n とおく。



そこで，$f(x)=\log_2(1+x)$が単調に増加し，曲線$y=f(x)$が上に凸であることに注意すると，$\dfrac{k}{n}\leqq x\leqq\dfrac{k+1}{n}$ $(0\leqq k\leqq n-1)$において，右図より，

$$(\text{網点部の面積})>\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}$$

これより，S_nは，

$$S_n>\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{2}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right\}+\cdots+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\left\{f(1)-f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\cdot f(1)=\frac{1}{2n}$$

以上より，$L-\dfrac{P(n)}{n^2}>\dfrac{1}{2n}$である。

［解　説］

格子点の個数に区分求積法をドッキングし，さらに誤差の評価を組み合わせた盛りだくさんの問題です。ただ，(1)で結論が与えられているので，手のつけようがないものではありません。なお，(3)は図での処理に依存した方法で記しています。

$\boxed{14}$ ［名古屋大］

以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ は，区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ で第 2 次導関数 $f''(x)$ をもち $f''(x) > 0$ をみたしているとする。区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ で関数 $F(x)$ を

$$F(x) = f(x) - f(\pi - x) - f(\pi + x) + f(2\pi - x)$$

と定義するとき，区間 $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で $F(x) \geqq 0$ であることを示せ。

(2) $f(x)$ を(1)の関数とするとき，$\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx \geqq 0$ を示せ。

(3) 関数 $g(x)$ は，区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ で導関数 $g'(x)$ をもち $g'(x) < 0$ をみたしているとする。このとき，$\displaystyle\int_0^{2\pi} g(x)\sin x\,dx \geqq 0$ を示せ。

14　　［名古屋大］

(1)　関数 $f(x)$ が $0 \leqq x \leqq 2\pi$ において $f''(x) > 0$ を満たすとき,

$$F(x) = f(x) - f(\pi - x) - f(\pi + x) + f(2\pi - x) \quad (0 \leqq x \leqq \pi) \cdots\cdots\cdots ①$$

まず，$F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - f\left(\dfrac{3}{2}\pi\right) + f\left(\dfrac{3}{2}\pi\right) = 0 \cdots\cdots\cdots ②$

また，$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ のときは，$x < \pi - x$，$\pi + x < 2\pi - x$ となり，平均値の定理から,

$$\frac{f(\pi - x) - f(x)}{(\pi - x) - x} = f'(c_1) \quad (x < c_1 < \pi - x)$$

$$\frac{f(2\pi - x) - f(\pi + x)}{(2\pi - x) - (\pi + x)} = f'(c_2) \quad (\pi + x < c_2 < 2\pi - x)$$

$f(\pi - x) - f(x) = (\pi - 2x) f'(c_1)$，$f(2\pi - x) - f(\pi + x) = (\pi - 2x) f'(c_2)$ となり，この式を①に代入すると,

$$F(x) = -(\pi - 2x) f'(c_1) + (\pi - 2x) f'(c_2) = (\pi - 2x)\{f'(c_2) - f'(c_1)\}$$

ここで，$f''(x) > 0$ より $f'(x)$ は単調に増加し，$c_1 < c_2$ から $f'(c_1) < f'(c_2)$ となり，しかも $\pi - 2x > 0$ なので，$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ において $F(x) > 0 \cdots\cdots ③$となる。

②③より，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，$F(x) \geqq 0$ である。

(2)　$I = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx$ とおいて，積分区間を分割すると,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos x\,dx + \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} f(x)\cos x\,dx + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} f(x)\cos x\,dx$$

ここで，$x = \pi - t$ とおくと，$dx = -dt$ となり,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos x\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\pi - t)\cos(\pi - t)(-dt) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi - t)\cos t\,dt$$

また，$x = \pi + s$ とおくと，$dx = ds$ となり,

$$\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} f(x)\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi + s)\cos(\pi + s)\,ds = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi + s)\cos s\,ds$$

さらに，$x = 2\pi - r$ とおくと，$dx = -dr$ となり,

$$\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} f(x)\cos x\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(2\pi - r)\cos(2\pi - r)(-dr) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\pi - r)\cos r\,dr$$

そして，定積分の積分変数をすべて x に変更すると,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(x) - f(\pi - x) - f(\pi + x) + f(2\pi - x)\}\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x)\cos x\,dx$$

すると，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，(1)から $F(x) \geqq 0$ なので $F(x)\cos x \geqq 0$ となり,

$$I = \int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x)\cos x\,dx \geqq 0$$

(3) 関数$g(x)$が$0 \leqq x \leqq 2\pi$において$g'(x) < 0$を満たすとき，$J = \int_0^{2\pi} g(x)\sin x\,dx$とおく。さらに，$G'(x) = g(x)$と設定すると，

$$J = \Big[\,G(x)\sin x\,\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} G(x)\cos x\,dx = \int_0^{2\pi} \{-G(x)\}\cos x\,dx$$

すると，$-G''(x) = -g'(x) > 0$となるので，(2)の結果から，

$$J = \int_0^{2\pi} g(x)\sin x\,dx = \int_0^{2\pi} \{-G(x)\}\cos x\,dx \geqq 0$$

［解 説］

定積分についての論証問題です。(1)の結論を(2)の誘導としてみると，$F(x)$の形をつくるために，定積分の積分区間を分割するという発見が重要になります。なお，(3)は(2)の結論を利用した方法で記しています。

$\boxed{15}$ ［金沢大］

$-2\pi \leqq x \leqq \pi$ のとき，関数 $f(x)=\dfrac{2\sqrt{2}\pi}{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{3}\right)+\dfrac{(3-2\sqrt{2})\pi}{3}$ を考える。次の問いに答えよ。必要であれば，$\pi^2<10$ を用いてよい。

(1) $f(x)$ は閉区間 $[-2\pi,\ \pi]$ で増加することを示せ。

(2) 開区間 $(-2\pi,\ \pi)$ で，つねに $f(x)>x$ が成り立つことを示せ。

(3) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ について，定積分 $\displaystyle\int_{f(0)}^{f(\pi)} f^{-1}(x)\,dx$ の値を求めよ。

(4) $f(x)$ とその逆関数 $f^{-1}(x)$ について，2 つの曲線

$$C_1 : y=f(x)\ (0 \leqq x \leqq \pi),\quad C_2 : y=f^{-1}(x)\ \bigl(f(0) \leqq x \leqq f(\pi)\bigr)$$

を考える。C_1，C_2 および直線 $x+y=f(0)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

15 ［金沢大］

(1) $f(x)=\dfrac{2\sqrt{2}\pi}{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{3}\right)+\dfrac{(3-2\sqrt{2})\pi}{3}$ $(-2\pi\leqq x\leqq\pi)$に対して,

$$f(x)=\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{(3-2\sqrt{2})\pi}{3}$$

ここで，$-2\pi\leqq x\leqq\pi$のとき$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{\pi}{2}$となるので，$\sin\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)$の値は単調に増加する。すなわち，$f(x)$は閉区間$[-2\pi,\ \pi]$で増加する。

(2) $g(x)=f(x)-x$とおくと，$g'(x)=f'(x)-1=\dfrac{2\sqrt{2}\pi}{9}\cos\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)-1$

ここで，$\pi^2<10$から$8\pi^2<80<81$となり，$2\sqrt{2}\pi<9$から$\dfrac{2\sqrt{2}\pi}{9}<1$である。

すると，$-2\pi<x<\pi$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{2}\right)$において，$g'(x)<0$となるので,

$$g(x)>g(\pi)=f(\pi)-\pi=\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}+\frac{(3-2\sqrt{2})\pi}{3}-\pi=0$$

よって，開区間$(-2\pi,\ \pi)$で$f(x)>x$が成り立つ。

(3) $I=\displaystyle\int_{f(0)}^{f(\pi)}f^{-1}(x)dx$に対して，$t=f^{-1}(x)$すなわち$x=f(t)$とおく。

すると，$dx=f'(t)dt$となり，$x=f(0)\to f(\pi)$は$t=0\to\pi$に対応し,

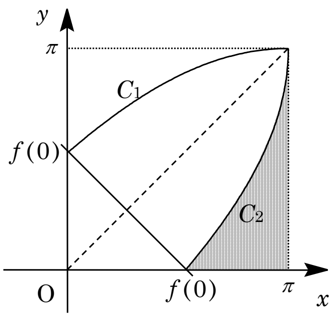
$$I=\int_0^{\pi}tf'(t)dt=\bigl[tf(t)\bigr]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}f(t)dt$$

$$=\pi f(\pi)-\left[-2\sqrt{2}\pi\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{(3-2\sqrt{2})\pi}{3}x\right]_0^{\pi}$$

$$=\pi\cdot\pi+2\sqrt{2}\pi\left(0-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{(3-2\sqrt{2})\pi}{3}\cdot\pi=\pi^2-\sqrt{6}\pi-\frac{3-2\sqrt{2}}{3}\pi^2$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi^2-\sqrt{6}\pi$$

(4) 直線 $x+y=f(0)$ と $C_1:y=f(x)$ $(0\leqq x\leqq\pi)$，$C_2:y=f^{-1}(x)$ $(f(0)\leqq x\leqq f(\pi))$で囲まれた図形の面積を$S$とおく。すると，網点部の面積が(3)の$I$の値に対応し，さらに直線$y=x$についての対称性から,



$$S=\pi^2-\frac{1}{2}\{f(0)\}^2-2I$$

$f(0)=\dfrac{2\sqrt{2}\pi}{3}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{(3-2\sqrt{2})\pi}{3}=\dfrac{3-\sqrt{2}}{3}\pi$から,

$$S=\pi^2-\frac{1}{2}\left(\frac{3-\sqrt{2}}{3}\pi\right)^2-2\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi^2-\sqrt{6}\pi\right)$$

$$=\pi^2-\frac{11-6\sqrt{2}}{18}\pi^2-\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi^2+2\sqrt{6}\pi=\frac{7-18\sqrt{2}}{18}\pi^2+2\sqrt{6}\pi$$

［解 説］

逆関数の絡んだ微積分の総合問題です。(3)の定積分の値を，(4)で利用する点がポイントです。

$\boxed{16}$ ［九州大］

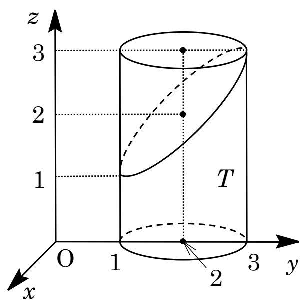
座標空間において，中心$(0,\ 2,\ 0)$，半径 1 で xy 平面内にある円を D とする。D を底面とし，$z \geqq 0$ の部分にある高さ 3 の直円柱（内部を含む）を E とする。点$(0,\ 2,\ 2)$と x 軸を含む平面で E を 2 つの立体に分け，D を含む方を T とする。以下の問いに答えよ。

(1) $-1 \leqq t \leqq 1$ とする。平面 $x = t$ で T を切ったときの断面積 $S(t)$ を求めよ。また，T の体積を求めよ。

(2) T を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

16　　　　［九州大］

(1) xy 平面内にある中心 $(0,\ 2,\ 0)$，半径 1 の円を底面とし，$z \geqq 0$ の部分にある高さ 3 の直円柱（内部を含む）を E とする。このとき，点 $(0,\ 2,\ 2)$ と x 軸を含む平面で E を 2 つの立体に分け，下側の部分を T とする。



このとき，T を表す連立不等式は，

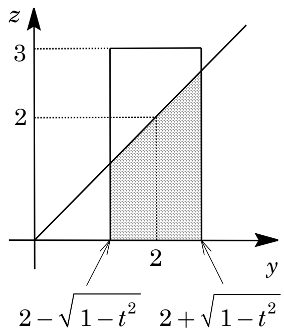
$x^2+(y-2)^2 \leqq 1$ ………①，$0 \leqq z \leqq 3$ ………②

$z \leqq y$ ………③

さて，平面 $x=t\ (-1 \leqq t \leqq 1)$ で T を切ったとき，①より，

$t^2+(y-2)^2 \leqq 1$，$(y-2)^2 \leqq 1-t^2$，$2-\sqrt{1-t^2} \leqq y \leqq 2+\sqrt{1-t^2}$ ………④

そして，②③④から，断面を $x=t$ 上に図示すると，右図の網点部となり，この面積 $S(t)$ は，



$$S(t)=\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{1-t^2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(2-\sqrt{1-t^2}\right)^2$$

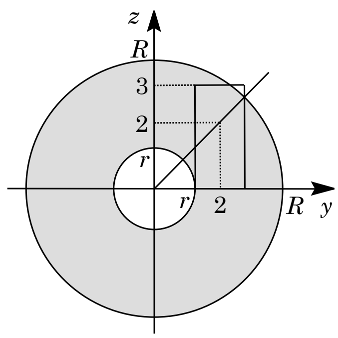
$$=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{1-t^2}\cdot 2=4\sqrt{1-t^2}$$

また，T の体積 V は，

$$V=\int_{-1}^{1} S(t)\,dt=4\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt$$

$$=8\int_{0}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt=8\cdot\frac{\pi}{4}=2\pi$$

(2) 平面 $x=t$ 上で，T の断面を x 軸のまわりに 1 回転させてできるドーナツ形の外径を R，内径を r とおくと，



$$R=\sqrt{2}\left(2+\sqrt{1-t^2}\right),\quad r=2-\sqrt{1-t^2}$$

このドーナツ形の面積 $U(t)$ は，

$$U(t)=\pi(R^2-r^2)$$

$$=\pi\left\{4+12\sqrt{1-t^2}+(1-t^2)\right\}$$

$$=\pi\left(5-t^2+12\sqrt{1-t^2}\right)$$

すると，T を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 W は，

$$W=\int_{-1}^{1} U(t)\,dt=\pi\int_{-1}^{1}\left(5-t^2+12\sqrt{1-t^2}\right)dt$$

$$=2\pi\int_{0}^{1}\left(5-t^2+12\sqrt{1-t^2}\right)dt=2\pi\left(5-\frac{1}{3}\right)+24\pi\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{2}{3}\pi(14+9\pi)$$

［解 説］

立体の体積についての標準的な問題です。計算も複雑ではありません。

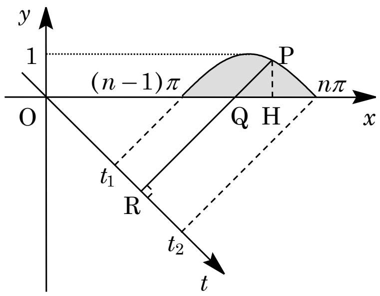
17　　［東京工大］

n を正の奇数とする。曲線 $y=\sin x$ $\left((n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi\right)$ と x 軸で囲まれた部分を D_n とする。直線 $x+y=0$ を l とおき，l のまわりに D_n を 1 回転させてできる回転体を V_n とする。

(1)　$(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$ に対して，点 $(x,\ \sin x)$ を P とおく。また P から l に下ろした垂線と x 軸の交点を Q とする。線分 PQ を l のまわりに 1 回転させてできる図形の面積を x の式で表せ。

(2)　(1)の結果を用いて，回転体 V_n の体積を n の式で表せ。

17　　　　［東京工大］



(1)　n を正の奇数とするとき，曲線 $C: y=\sin x$ $\left((n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi\right)$ と x 軸で囲まれた部分 D_n を，直線 $l: x+y=0$ のまわりに 1 回転させてできる回転体 V_n を考える。

ここで，C に対し $y'=\cos x$ から，$x=(n-1)\pi$ では $y'=1$ となり，点 $((n-1)\pi,\ 0)$ における接線は傾きが 1 であり，l と直交することに留意する。

さて，$\mathrm{P}(x,\ \sin x)$ から l に垂線を下ろし，その垂線と x 軸，l との交点をそれぞれ Q, R とし，また $\mathrm{H}(x,\ 0)$ とおくと，

$$\mathrm{PR}=\frac{|x+\sin x|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{x+\sin x}{\sqrt{2}},\ \ \mathrm{PQ}=\sqrt{2}\mathrm{PH}=\sqrt{2}\sin x$$

これより，$\mathrm{QR}=\dfrac{x+\sin x}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\sin x=\dfrac{x-\sin x}{\sqrt{2}}$ となり，線分 PQ を l のまわりに 1 回転させてできるドーナツ形の面積を S とすると，$S=\pi(\mathrm{PR}^2-\mathrm{QR}^2)$ となり，

$$S=\pi\left\{\frac{(x+\sin x)^2}{2}-\frac{(x-\sin x)^2}{2}\right\}=\frac{\pi}{2}\cdot 4x\sin x=2\pi x\sin x$$

(2)　まず，$t=\mathrm{OR}$ とすると，$\mathrm{OR}=\mathrm{QR}$ から $t=\dfrac{x-\sin x}{\sqrt{2}}$ ……(＊)である。

さて，$t_1=\dfrac{(n-1)\pi}{\sqrt{2}}$，$t_2=\dfrac{n\pi}{\sqrt{2}}$ とおくと，V_n の体積 W_n は $W_n=\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}S\,dt$ となる。

ここで，(＊)から $dt=\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{2}}dx$ となり，$t=t_1\to t_2$ は $x=(n-1)\pi\to n\pi$ に対応するので，(1)の結果を代入して，

$$\begin{aligned}
W_n&=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}2\pi x\sin x\cdot\frac{1-\cos x}{\sqrt{2}}dx=\sqrt{2}\pi\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}x\sin x(1-\cos x)\,dx\\
&=\sqrt{2}\pi\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}x\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx\\
&=\sqrt{2}\pi\left\{\left[-x\left(\cos x-\frac{1}{4}\cos 2x\right)\right]_{(n-1)\pi}^{n\pi}+\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\left(\cos x-\frac{1}{4}\cos 2x\right)dx\right\}\\
&=\sqrt{2}\pi\left\{-n\pi\left(-1-\frac{1}{4}\right)+(n-1)\pi\left(1-\frac{1}{4}\right)\right\}+\sqrt{2}\pi\left[\sin x-\frac{1}{8}\sin 2x\right]_{(n-1)\pi}^{n\pi}\\
&=\sqrt{2}\pi\left\{\frac{5}{4}n\pi+\frac{3}{4}(n-1)\pi\right\}=\sqrt{2}\pi\left(2n\pi-\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi^2(8n-3)
\end{aligned}$$

［解　説］

斜回転体の体積を求める典型題です。誘導も丁寧ですし，計算も標準的です。

$\boxed{18}$ ［東京大］

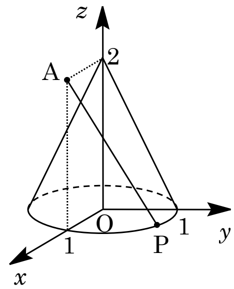
座標空間において，xy 平面上の原点を中心とする半径 1 の円を考える。この円を底面とし，点 $(0,\ 0,\ 2)$ を頂点とする円錐（内部を含む）を S とする。また，点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 2)$ を考える。

(1) 点 P が S の底面を動くとき，線分 AP が通過する部分を T とする。平面 $z=1$ による S の切り口，および平面 $z=1$ による T の切り口を同一平面上に図示せよ。

(2) 点 P が S を動くとき，線分 AP が通過する部分の体積を求めよ。

$\boxed{18}$ ［東京大］

(1) xy 平面上の原点を中心とする半径 1 の円を底面とし，点 $(0,\ 0,\ 2)$ を頂点とする内部を含む円錐 S を，平面 $z=1$ により切断したとき，その切り口は，中心 $(0,\ 0,\ 1)$ で半径 $\dfrac{1}{2}$ の円の内部または周上である。



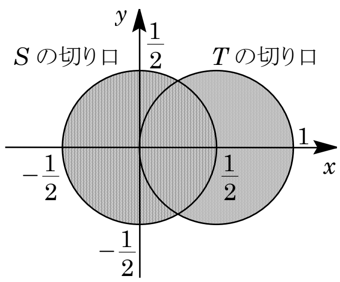
また，$A(1,\ 0,\ 2)$ に対し，θ を任意の実数として，円錐 S の底面上の点 P を，$P(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ 0)$ $(0\leqq r\leqq 1)$ とおく。このとき，線分 AP の通過する部分 T を，平面 $z=1$ により切断したときの切り口を考える。ここで，線分 AP と平面 $z=1$ との交点を $Q(x,\ y,\ 1)$ とおくと，点 P は線分 AQ を $2:1$ に外分する点なので，

$$(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ 0)=(-1+2x,\ 2y,\ 0)$$

すると，点 Q の軌跡は，$(-1+2x)^2+(2y)^2=r^2$ かつ $z=1$ と表すことができ，$0\leqq r\leqq 1$ から $r^2\leqq 1$ となるので，

$$(-1+2x)^2+(2y)^2\leqq 1 \text{ かつ } z=1$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\leqq\frac{1}{4} \text{ かつ } z=1$$



以上より，平面 $z=1$ による S の切り口および T の切り口を $z=1$ 上に図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は含む。

(2) (1)と同様に，平面 $z=k$ による S の切り口を動く点 P を $P(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ k)$ とし，線分 AP と平面 $z=t$ との交点を $Q(x,\ y,\ t)$ とおく。ただし，$0\leqq k\leqq t\leqq 2$ である。

さて，平面 $z=k$ による S の切り口の円の半径 r_0 は，$(2-k):2=r_0:1$ より，$r_0=\dfrac{2-k}{2}$ となるので，$0\leqq r\leqq\dfrac{2-k}{2}$ である。

そして，点 P は線分 AQ を $(2-k):(t-k)$ に外分する点なので，

$$(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ k)=\left(\frac{(2-k)x-(t-k)}{2-t},\ \frac{(2-k)y}{2-t},\ k\right)$$

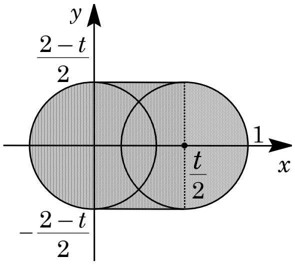
すると，点 Q の軌跡は，$\left\{\dfrac{(2-k)x-(t-k)}{2-t}\right\}^2+\left\{\dfrac{(2-k)y}{2-t}\right\}^2=r^2$ かつ $z=t$ と表すことができ，$0\leqq r\leqq\dfrac{2-k}{2}$ から $r^2\leqq\left(\dfrac{2-k}{2}\right)^2$ となるので，

$$\left\{\frac{(2-k)x-(t-k)}{2-t}\right\}^2+\left\{\frac{(2-k)y}{2-t}\right\}^2\leqq\left(\frac{2-k}{2}\right)^2 \text{ かつ } z=t$$

$$\left(x-\frac{t-k}{2-k}\right)^2+y^2\leqq\left(\frac{2-t}{2}\right)^2 \text{ かつ } z=t$$

これより，点 Q は平面 $z=t$ 上で，中心 $\left(\dfrac{t-k}{2-k},\ 0,\ t\right)$ で半径 $\dfrac{2-t}{2}$ の円の内部または周上を描くことになる。

ここで，t を $0\leqq t\leqq 2$ で固定し，k を $0\leqq k\leqq t$ で動かすと，$z=t$ 上の点 Q の軌跡である半径 $\dfrac{2-t}{2}$ の円は，その中心が $\left(\dfrac{t}{2},\ 0,\ t\right)$ から $(0,\ 0,\ t)$ に動くので，その通過領域は右図の網点部となる。そして，この網点部の面積は，



$$\pi\left(\frac{2-t}{2}\right)^2+\frac{t}{2}\cdot\frac{2-t}{2}\cdot 2=\frac{\pi}{4}(2-t)^2+\frac{1}{2}t(2-t)$$

したがって，点 P が S を動くとき線分 AP が通過する部分の体積 V は，

$$V=\int_0^2\left\{\frac{\pi}{4}(2-t)^2+\frac{1}{2}t(2-t)\right\}dt=-\frac{\pi}{4}\left[\frac{(2-t)^3}{3}\right]_0^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot 2^3=\frac{2}{3}\pi+\frac{2}{3}$$

［解 説］

立体の体積を求める東大で頻出の問題です。(2)は，(1)の誘導を利用するのでしょうが，上の解答例では，重複をいとわず，少し丁寧に記述してみました。なお，A，P，Q の位置関係を内分ではなく，外分で処理したのは，計算量を減少させるためです。