1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大・文］

a を正の実数とする。座標平面上の曲線 C を $y = ax^3 - 2x$ で定める。原点を中心とする半径 1 の円と C の共有点の個数が 6 個であるような a の範囲を求めよ。

1 ［東京大・文］

曲線$C: y=ax^3-2x\ (a>0)\cdots\cdots$①と円$: x^2+y^2=1\cdots\cdots$②を連立して，

$$x^2+(ax^3-2x)^2=1,\ a^2x^6-4ax^4+5x^2-1=0\cdots\cdots\cdots③$$

曲線①と円②の共有点の個数が 6 個である条件は，③は 6 個の実数解をもつことに対応し，さらに$x=0$が③の解でないことに注意して，$x^2=t>0$とおくと，③より，

$$a^2t^3-4at^2+5t-1=0\cdots\cdots\cdots④$$

すると，$x=\pm\sqrt{t}$から，求める条件は，④が 3 個の正の実数解をもつことになる。

ここで，$f(t)=a^2t^3-4at^2+5t-1$とおくと，

$$f'(t)=3a^2t^2-8at+5$$
$$=(at-1)(3at-5)$$

これより，$f(t)$の増減は右表のようになり，求める条件は，

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{a}$	$\cdots$	$\frac{5}{3a}$	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	-1	↗		↘		↗

$$f\left(\frac{1}{a}\right)>0\cdots\cdots\cdots⑤,\ f\left(\frac{5}{3a}\right)<0\cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤より，$\frac{1}{a}-\frac{4}{a}+\frac{5}{a}-1<0$となり，$\frac{2}{a}>1$から$a<2$

⑥より，$\frac{125}{27a}-\frac{100}{9a}+\frac{25}{3a}-1<0$となり，$\frac{50}{27a}<1$から$a>\frac{50}{27}$

以上より，求めるaの範囲は$\frac{50}{27}<a<2$である。

［解 説］

曲線と円の共有点の個数についての基本的な問題です。方程式の実数解の個数に言い換える方針で解の流れができ，しかも導関数がうまく因数分解できるというオマケも付いています。

$\boxed{2}$ ［神戸大・理］

m を実数とする。座標平面上の放物線 $y=x^2$ と直線 $y=mx+1$ の共有点を A, B とし, 原点を O とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$ が成り立つことを示せ。

(2) 3 点 A, B, O を通る円の方程式を求めよ。

(3) 放物線 $y=x^2$ と(2)の円が A, B, O 以外の共有点をもたないような m の値をすべて求めよ。

2　　　　［神戸大・理］

(1)　放物線 $y=x^2$ ……①と直線 $y=mx+1$ ……②を連立して,

$$x^2=mx+1,\ x^2-mx-1=0 \cdots\cdots③$$

③の判別式 $D=m^2+4>0$ から，実数解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると,

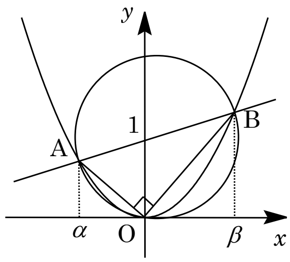
$$\alpha+\beta=m,\ \alpha\beta=-1 \cdots\cdots④$$

すると，①②の共有点は $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{B}(\beta,\ \beta^2)$ となり，④から,

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\alpha\beta+\alpha^2\beta^2=-1+1=0$$

よって，$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$ となる。

(2)　3 点 A, B, O を通る円の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，線分 AB が直径より，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$ となるので,



$$(x-\alpha)(x-\beta)+(y-\alpha^2)(y-\beta^2)=0$$

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta+y^2-(\alpha^2+\beta^2)y+\alpha^2\beta^2=0$$

④より，$x^2-mx-1+y^2-(m^2+2)y+1=0$ となり,

$$x^2+y^2-mx-(m^2+2)y=0 \cdots\cdots⑤$$

(3)　放物線①と円⑤を連立すると，$x^2+x^4-mx-(m^2+2)x^2=0$ となり,

$$x^4-(m^2+1)x^2-mx=0,\ x\{x^3-(m^2+1)x-m\}=0$$

この方程式は $x=0,\ \alpha,\ \beta$ を実数解としてもつことより,

$$x(x+m)(x^2-mx-1)=0 \cdots\cdots⑥$$

⑥の解は $x=0,\ -m,\ \alpha,\ \beta$ となり，これが $x=0,\ \alpha,\ \beta$ だけであるのは,

(i)　$-m=0$ のとき　$m=0$ となり，⑥の解は $x=0,\ \pm1$ である。

(ii)　$-m=\alpha$ または $-m=\beta$ のとき　$x=-m$ は $x^2-mx-1=0$ の解となり,

$$m^2+m^2-1=0,\ m=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(i)(ii)より，求める m の値は，$m=0,\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である。

［解　説］

放物線と直線，および円の関係についての問題です。⑥の左辺の因数分解ように，見通しをもった計算が重要です。

$\boxed{3}$ ［九州大・文］

以下の問いに答えよ。

(1) 次の条件 A をみたす座標平面上の点$(x,\ y)$全体の集合を図示せよ。

条件 A：すべての実数 t に対して $y \geqq xt-2t^2$ が成立する。

(2) 次の条件 B をみたす座標平面上の点$(x,\ y)$全体の集合を図示せよ。

条件 B：$|t| \leqq 1$ をみたすすべての実数 t に対して $y \geqq xt-2t^2$ が成立する。

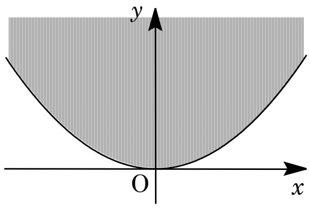
3　　［九州大・文］

(1)　まず，$f(t)=2t^2-xt+y=2\left(t-\dfrac{x}{4}\right)^2+y-\dfrac{x^2}{8}$ とおく。

すべての実数 t に対して $y\geqq xt-2t^2$ が成立する，すなわち $f(t)\geqq 0$ が成立する $(x,\ y)$ の条件は，

$$f\left(\frac{x}{4}\right)=y-\frac{x^2}{8}\geqq 0,\quad y\geqq\frac{x^2}{8}$$

これより，点 $(x,\ y)$ 全体の集合を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



(2)　$|t|\leqq 1\ (-1\leqq t\leqq 1)$ をみたすすべての実数 t に対して $y\geqq xt-2t^2$ が成立する，すなわち $f(t)\geqq 0$ が成立する $(x,\ y)$ の条件は，

(i)　$\dfrac{x}{4}<-1\ (x<-4)$ のとき　$f(-1)=2+x+y\geqq 0$ より，$y\geqq -x-2$

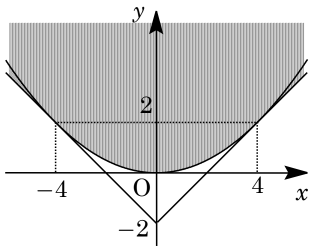
(ii)　$-1\leqq\dfrac{x}{4}\leqq 1\ (-4\leqq x\leqq 4)$ のとき　$f\left(\dfrac{x}{4}\right)=y-\dfrac{x^2}{8}\geqq 0$ より，$y\geqq\dfrac{x^2}{8}$

(iii)　$\dfrac{x}{4}>1\ (x>4)$ のとき　$f(1)=2-x+y\geqq 0$ より，$y\geqq x-2$

(i)〜(iii)より，点 $(x,\ y)$ 全体の集合は，

$$y\geqq -x-2\quad (x<-4)$$
$$y\geqq\frac{x^2}{8}\quad (-4\leqq x\leqq 4)$$
$$y\geqq x-2\quad (x>4)$$

これを図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



［解　説］

領域に関する頻出問題です。ポイントは $f(t)$ の最小値が 0 以上ということです。

$\boxed{4}$ ［大阪市大・文］

変数 t に対して，xy 平面上の曲線 $C_t : y = 3tx^2 - t^3$ を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1) t が実数全体を動くとき，曲線 C_t がちょうど 3 回通過する xy 平面上の点全体からなる領域を図示せよ。

(2) t が実数全体を動くとき，曲線 C_t がちょうど 1 回通過する xy 平面上の点全体からなる領域を図示せよ。

領域を図示する際は，その境界線や境界点が含まれるか否かがはっきりとわかるように図示せよ。

4　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［大阪市大・文］

(1)　t が実数全体を動くとき，曲線 $C_t : y = 3tx^2 - t^3$ が通過する点 $(x,\ y)$ の条件は，t についての 3 次方程式 $y = 3tx^2 - t^3$，すなわち $t^3 - 3x^2t + y = 0$ が実数解をもつ条件に対応する。そこで，$f(t) = t^3 - 3x^2t + y$ とおく。

さて，C_t がちょうど 3 回通過する点 $(x,\ y)$ の条件は，$f(t) = 0$ が 3 個の実数解をもつ条件として表され，$f'(t) = 3t^2 - 3x^2 = 3(t+x)(t-x)$ から，

(i)　$x > 0$ のとき

$f(t)$ の増減は右表より，求める条件は，

$f(-x) = 2x^3 + y > 0$，$f(x) = -2x^3 + y < 0$

となり，まとめると，

$$-2x^3 < y < 2x^3$$

t	$\cdots$	$-x$	$\cdots$	x	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

(ii)　$x = 0$ のとき

$f(t) = t^3 + y$ となり，$f(t) = 0$ が 3 個の実数解をもつことはない。

(iii)　$x < 0$ のとき

$f(t)$ の増減は右表より，求める条件は，

$f(-x) = 2x^3 + y < 0$，$f(x) = -2x^3 + y > 0$

となり，まとめると，

$$2x^3 < y < -2x^3$$

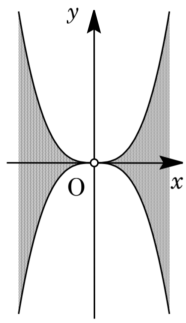
t	$\cdots$	x	$\cdots$	$-x$	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

(i)～(iii)より，点 $(x,\ y)$ の存在範囲は，

$$-2x^3 < y < 2x^3\ (x > 0),\ 2x^3 < y < -2x^3\ (x < 0)$$

図示すると，右図の網点部である。

ただし，境界は領域に含まない。



(2)　C_t がちょうど 1 回通過する点 $(x,\ y)$ の条件は，$f(t) = 0$ が 1 個の実数解をもつ条件として表され，(1)の過程を利用すると，

(i)　$x > 0$ のとき

$f(-x) = 2x^3 + y < 0$ または $f(x) = -2x^3 + y > 0$ となり，

$$y < -2x^3 \quad \text{または} \quad y > 2x^3$$

(ii)　$x = 0$ のとき

$f(t) = t^3 + y$ となり，$f(t) = 0$ はつねに 1 個の実数解をもつ。

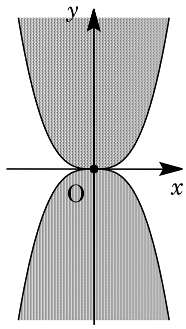
(iii)　$x < 0$ のとき

$f(-x) = 2x^3 + y > 0$ または $f(x) = -2x^3 + y < 0$ となり，

$$y > -2x^3 \quad \text{または} \quad y < 2x^3$$

(i)～(iii)より，点 $(x,\ y)$ の存在範囲は，右図の網点部である。

ただし，原点以外の境界は領域に含まない。



［解 説］

曲線の通過領域を図示する頻出題です。(2)は(1)のプロセスを流用するだけです。

5　　［東京大］

$a,\ b$ を実数とする。座標平面上の放物線 $C: y=x^2+ax+b$ は放物線 $y=-x^2$ と 2 つの共有点をもち，一方の共有点の x 座標は $-1<x<0$ を満たし，他方の共有点の x 座標は $0<x<1$ を満たす。

(1)　点 $(a,\ b)$ のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ。

(2)　放物線 C の通りうる範囲を座標平面上に図示せよ。

5　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大］

(1)　放物線$C : y = x^2 + ax + b$ ……①と放物線$y = -x^2$ ……②を連立して，

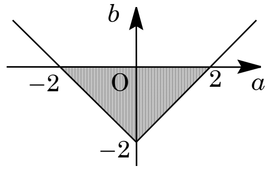
$$x^2 + ax + b = -x^2,\ \ 2x^2 + ax + b = 0 \cdots\cdots③$$

放物線①②が$-1 < x < 0$と$0 < x < 1$に 2 つの共有点をもつので，③の実数解が$-1 < x < 0$と$0 < x < 1$に存在することになり，$f(x) = 2x^2 + ax + b$とおくと，

$$f(-1) = 2 - a + b > 0,\ \ f(0) = b < 0,\ \ f(1) = 2 + a + b > 0$$

まとめると，$b > a - 2$，$b > -a - 2$，$b < 0$ ………④

これより，点$(a,\ b)$のとりうる範囲は，右図の網点部となる。ただし，境界線は領域に含まない。

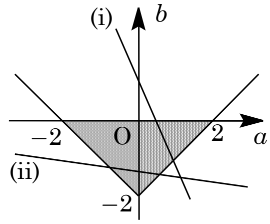


(2)　連立不等式④を満たす$(a,\ b)$のもとで，①より，

$$b = -xa - x^2 + y \cdots\cdots⑤$$

すると，放物線Cが通過する$(x,\ y)$は，直線⑤が(1)の網点部と共有点をもつ条件として求められる。まず，直線⑤の b 切片$-x^2 + y$に注意すると，通過点が$(a,\ b) = (2,\ 0)$のとき$-x^2 + y = 2x$，$(a,\ b) = (-2,\ 0)$のとき$-x^2 + y = -2x$，$(a,\ b) = (0,\ -2)$のとき$-x^2 + y = -2$となる。

これより，直線⑤の傾き$-x$の値で場合分けをすると，

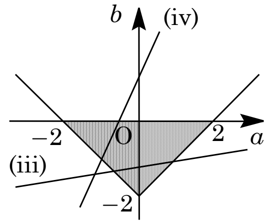


(i)　$-x < -1\ (x > 1)$のとき

$$-2x < -x^2 + y < 2x,\ \ x^2 - 2x < y < x^2 + 2x$$

(ii)　$-1 \leqq -x < 0\ (0 < x \leqq 1)$のとき

$$-2 < -x^2 + y < 2x,\ \ x^2 - 2 < y < x^2 + 2x$$



(iii)　$0 \leqq -x < 1\ (-1 < x \leqq 0)$のとき

$$-2 < -x^2 + y < -2x,\ \ x^2 - 2 < y < x^2 - 2x$$

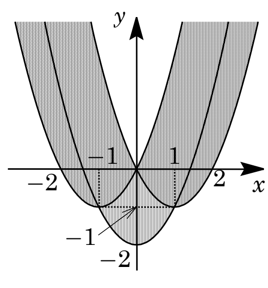
(iv)　$-x \geqq 1\ (x \leqq -1)$のとき

$$2x < -x^2 + y < -2x,\ \ x^2 + 2x < y < x^2 - 2x$$

(i)〜(iv)より，領域の境界線は，$y = x^2 - 2x$ ……⑥

$$y = x^2 + 2x \cdots\cdots⑦,\ \ y = x^2 - 2 \cdots\cdots⑧$$

⑥⑦の交点は$(0,\ 0)$，⑥⑧の交点は$(1,\ -1)$，⑦⑧の交点は$(-1,\ -1)$であることより，放物線 C の通りうる範囲は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まない。



［解　説］

放物線の通過領域についての標準的な問題です。条件が連立不等式で与えられているので，図を利用した処理をしました。要演習の１題です。

6　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［神戸大・文］

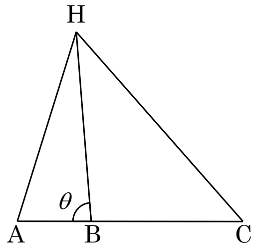
水平な地面に 1 本の塔が垂直に建っている(太さは無視する)。塔の先端を P とし，足元の地点を H とする。また，H を通らない 1 本の道が一直線に延びている(幅は無視する)。道の途中に 3 地点 A, B, C がこの順にあり，$BC = 2AB$ をみたしている。以下の問いに答えよ。

(1)　$2AH^2 - 3BH^2 + CH^2 = 6AB^2$ が成り立つことを示せ。

(2)　A, B, C から P を見上げた角度 $\angle PAH$，$\angle PBH$，$\angle PCH$ はそれぞれ 45°，60°，30° であった。$AB = 100$ m のとき，塔の高さ PH (m) の整数部分を求めよ。

(3)　(2)において，H と道との距離 (m) の整数部分を求めよ。

6　　［神戸大・文］



(1)　塔の足元 H と 3 地点 A, B, C を通る道によってできる $\triangle$HAC において，$\mathrm{BC}=2\mathrm{AB}$ ……①である。ここで，$\angle\mathrm{HBA}=\theta$ とおき，$\triangle$HAB に余弦定理を適用すると，

$$\mathrm{AH}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BH}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BH}\cos\theta\ \cdots\cdots\cdots②$$

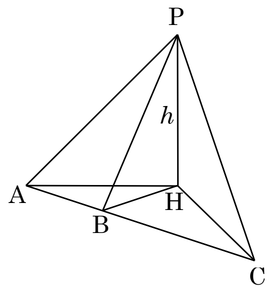
また，$\triangle$HBC に余弦定理を適用すると，

$$\mathrm{CH}^2=\mathrm{BC}^2+\mathrm{BH}^2-2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{BH}\cos(180^\circ-\theta)$$
$$=\mathrm{BC}^2+\mathrm{BH}^2+2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{BH}\cos\theta$$

ここで，①より，$\mathrm{CH}^2=4\mathrm{AB}^2+\mathrm{BH}^2+4\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BH}\cos\theta\ \cdots\cdots\cdots③$

②③より，$2\mathrm{AH}^2+\mathrm{CH}^2=(2\mathrm{AB}^2+2\mathrm{BH}^2)+(4\mathrm{AB}^2+\mathrm{BH}^2)$ となり，

$$2\mathrm{AH}^2-3\mathrm{BH}^2+\mathrm{CH}^2=6\mathrm{AB}^2\ \cdots\cdots\cdots④$$



(2)　右図において，$\mathrm{PH}=h$ とおく。条件より，$\angle\mathrm{PAH}=45^\circ$，$\angle\mathrm{PBH}=60^\circ$，$\angle\mathrm{PCH}=30^\circ$ なので，$\mathrm{AH}=\dfrac{h}{\tan 45^\circ}=h$

$$\mathrm{BH}=\frac{h}{\tan 60^\circ}=\frac{h}{\sqrt{3}},\ \ \mathrm{CH}=\frac{h}{\tan 30^\circ}=\sqrt{3}h$$

また，$\mathrm{AB}=100$ であり，これらを④に代入すると，

$$2h^2-3\cdot\frac{h^2}{3}+3h^2=6\cdot10^4,\ \ 4h^2=6\cdot10^4$$

これより，$h^2=3\cdot5\cdot10^3$ から $h=50\sqrt{6}=10\sqrt{150}$ となり，

$$12.2^2<150<12.3^2,\ \ 12.2<\sqrt{150}<12.3$$

よって，$122<h<123$ より，h の整数部分は 122 である。

(3)　(2)より，$\mathrm{AH}=50\sqrt{6}$，$\mathrm{BH}=\dfrac{50\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=50\sqrt{2}$，$\mathrm{AB}=100$ を②に代入すると，

$$15\cdot10^3=10^4+5\cdot10^3-2\cdot10^2\cdot50\sqrt{2}\cos\theta,\ \ \cos\theta=\frac{10^4+5\cdot10^3-15\cdot10^3}{10^4\sqrt{2}}=0$$

すると，$\cos\theta=0$ から $\theta=90^\circ$ となり，H と道との距離は $\mathrm{BH}=50\sqrt{2}=10\sqrt{50}$

$$7.0^2<50<7.1^2,\ \ 7.0<\sqrt{50}<7.1$$

よって，$70<\mathrm{BH}<71$ より，BH の整数部分は 70 である。

［解　説］

三角比の応用についての基本題です。ただ，数値計算が煩雑です。なお，上の解答例は余弦定理より始めましたが，まず座標を設定する方法も考えられます。

$\boxed{7}$ ［神戸大・理］

$\vec{0}$でない 2 つのベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$が垂直であるとする。$\vec{a}+\vec{b}$と$\vec{a}+3\vec{b}$のなす角をθ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$とする。以下の問いに答えよ。

(1) $|\vec{a}|=x$，$|\vec{b}|=y$とするとき，$\sin^2\theta$をx, yを用いて表せ。

(2) θの最大値を求めよ。

7　［神戸大・理］

(1)　$\vec{a}$，$\vec{b}$ が，$|\vec{a}|=x>0$，$|\vec{b}|=y>0$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ を満たすとき，$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}+3\vec{b}$ のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると，

$$\cos\theta=\frac{(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+3\vec{b})}{|\vec{a}+\vec{b}||\vec{a}+3\vec{b}|}=\frac{x^2+3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+9y^2}}\cdots\cdots\cdots①$$

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ より，

$$\sin^2\theta=1-\frac{x^4+6x^2y^2+9y^4}{(x^2+y^2)(x^2+9y^2)}=\frac{4x^2y^2}{x^4+10x^2y^2+9y^4}\cdots\cdots\cdots②$$

(2)　$t=\dfrac{y}{x}$ とおくと，t は $t>0$ の任意の値をとり，②から，

$$\sin^2\theta=\frac{4}{\frac{x^2}{y^2}+10+\frac{9y^2}{x^2}}=\frac{4}{9t^2+\frac{1}{t^2}+10}$$

ここで，①から $\cos\theta>0$ であるので $0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ となり，$\sin\theta\geqq0$ から，

$$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{9t^2+\frac{1}{t^2}+10}}\cdots\cdots\cdots③$$

相加平均と相乗平均の関係から，$9t^2+\dfrac{1}{t^2}\geqq2\sqrt{9t^2\cdot\dfrac{1}{t^2}}=6$ なので，③から，

$$0<\sin\theta\leqq\frac{2}{\sqrt{6+10}}=\frac{1}{2}$$

等号は，$9t^2=\dfrac{1}{t^2}\left(t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$，すなわち $x=\sqrt{3}y$ のときに成立する。

よって，$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ から $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，θ は最大値 $\dfrac{\pi}{6}$ をとる。

［解　説］

ベクトルの内積についての基本的な問題です。相加平均と相乗平均の関係を利用することが，式変形のポイントです。

8 ［北海道大・理］

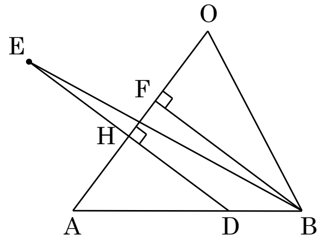
三角形 OAB において，辺 AB を $2:1$ に内分する点を D とし，直線 OA に関して点 D と対称な点を E とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とし，$|\vec{a}|=4$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=6$ を満たすとする。

(1) 点 B から直線 OA に下ろした垂線と直線 OA との交点を F とする。$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(3) 三角形 BDE の面積が $\dfrac{5}{9}$ になるとき，$|\vec{b}|$ の値を求めよ。

8　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［北海道大・理］



(1)　右図の$\triangle$OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とし，$|\vec{a}|=4$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=6$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=k\vec{a}$ (k は実数)とおくと，

BF$\perp$OA から，

$$(k\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{a}=0,\ \ k|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$16k-6=0$ から $k=\dfrac{3}{8}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\dfrac{3}{8}\vec{a}$ である。

(2)　AD : DB $=2:1$，直線 OA に関して点 D と対称な点を E とし，OA と DE の交点を H とすると，DH // BF，DH $=\dfrac{2}{3}$BF に注意して，

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=2\overrightarrow{\mathrm{DH}}=2\cdot\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\frac{4}{3}\left(\frac{3}{8}\vec{a}-\vec{b}\right)=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{4}{3}\vec{b}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}\right)+\left(\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{4}{3}\vec{b}\right)=\dfrac{5}{6}\vec{a}-\dfrac{2}{3}\vec{b}$ である。

(3)　(2)から，$|\overrightarrow{\mathrm{DE}}|=\left|\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{4}{3}\vec{b}\right|=\dfrac{1}{6}|3\vec{a}-8\vec{b}|$ となり，

$$|3\vec{a}-8\vec{b}|^2=9|\vec{a}|^2-48\vec{a}\cdot\vec{b}+64|\vec{b}|^2=144-288+64|\vec{b}|^2=64|\vec{b}|^2-144$$

すると，$|\overrightarrow{\mathrm{DE}}|=\dfrac{1}{6}\sqrt{64|\vec{b}|^2-144}=\dfrac{2}{3}\sqrt{4|\vec{b}|^2-9}$ となる。

また，AH : HF $=2:1$，AF : AO $=\left(1-\dfrac{3}{8}\right):1=5:8$ より，

$$\mathrm{HF}=\frac{1}{3}\mathrm{AF}=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{8}\mathrm{AO}=\frac{5}{24}\cdot4=\frac{5}{6}$$

条件より，$\triangle\mathrm{BDE}=\dfrac{5}{9}$ なので，$\dfrac{1}{2}\mathrm{DE}\cdot\mathrm{HF}=\dfrac{5}{9}$ となり，

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{4|\vec{b}|^2-9}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{9},\ \ \sqrt{4|\vec{b}|^2-9}=2$$

これより，$4|\vec{b}|^2=13$ となり，$|\vec{b}|=\sqrt{\dfrac{13}{4}}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ である。

［解　説］

平面ベクトルの三角形への応用に関する基本題です。解答例は，計算で押し通すのではなく，相似を利用したもので記述しました。

9 ［金沢大・文］

平面上の△ABC で $AB=4$，$BC=5$，$AC=3$ となるものを考え，△ABC の外接円の中心を O とする。また，辺 AC を $1:5$ に内分する点を P とする。このとき，次の問いに答えよ。

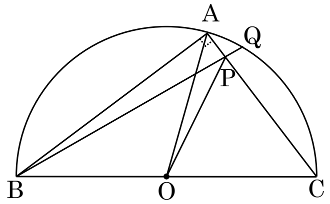
(1) $\cos\angle ABC$ と $\cos\angle AOC$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) $\left|\overrightarrow{OP}\right|$ と $\cos\angle POC$ の値をそれぞれ求めよ。

(3) 内積 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}$ の値を求めよ。

(4) 点 B と点 P を通る直線が△ABC の外接円と交わる点で B と異なる点を Q とする。$\overrightarrow{OQ}$ を $\overrightarrow{OB}$ と $\overrightarrow{OP}$ を用いて表せ。

9 ［金沢大・文］



(1) $\triangle$ABC において，$AB=4$，$BC=5$，$AC=3$ より $\angle BAC=90^\circ$ となり，$\cos\angle ABC=\dfrac{BA}{BC}=\dfrac{4}{5}$ である。

また，外接円の中心 O は斜辺 BC の中点であり，

$$\cos\angle AOC=\cos 2\angle ABC=2\cos^2\angle ABC-1$$
$$=2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2-1=\frac{7}{25}$$

(2) (1)より，$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=\dfrac{5}{2}$ であり，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{7}{25}=\dfrac{7}{4}$

さて，$AP:PC=1:5$ より，$\overrightarrow{OP}=\dfrac{5}{6}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{OC}=\dfrac{1}{6}(5\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$ となり，

$$|5\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}|^2=5^2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2+10\cdot\frac{7}{4}+\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{720}{4}=180$$

よって，$|\overrightarrow{OP}|=\dfrac{1}{6}|5\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}|=\dfrac{1}{6}\sqrt{180}=\sqrt{5}$ である。

また，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}\cdot\left(\dfrac{5}{6}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{OC}\right)=\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{7}{4}+\dfrac{1}{6}\cdot\left(\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{60}{24}=\dfrac{5}{2}$ から，

$$\cos\angle POC=\frac{\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{OP}|}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}\cdot\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

(3) (2)から，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}=-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OP}=-\dfrac{5}{2}$

(4) $|\overrightarrow{BP}|^2=|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}|^2=5-2\cdot\left(-\dfrac{5}{2}\right)+\left(\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{65}{4}$ となり，$BP=\dfrac{\sqrt{65}}{2}$ である。

ここで，方べきの定理から $BP\cdot QP=AP\cdot CP$ となり，$AP=\dfrac{1}{2}$，$CP=\dfrac{5}{2}$ から，

$$QP=\frac{AP\cdot CP}{BP}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}}{\frac{\sqrt{65}}{2}}=\frac{5}{2\sqrt{65}}=\frac{\sqrt{65}}{26}$$

これより，$BP:QP=\dfrac{\sqrt{65}}{2}:\dfrac{\sqrt{65}}{26}=13:1$ となり，点 Q は線分 BP を $(13+1):1$，すなわち $14:1$ に外分することより，

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{-\overrightarrow{OB}+14\overrightarrow{OP}}{14-1}=-\frac{1}{13}\overrightarrow{OB}+\frac{14}{13}\overrightarrow{OP}$$

［解 説］

平面ベクトルの図形への応用問題です。上記の解答例以外に，いろいろな方法が考えられます。

10　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京工大］

S を，座標空間内の原点 O を中心とする半径 1 の球面とする。S 上を動く点 A, B, C, D に対して，$F=2(\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2)-3(\mathrm{AD}^2+\mathrm{BD}^2+\mathrm{CD}^2)$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とするとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ によらない定数 k によって，$F=k(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-3\vec{d})$ と書けることを示し，定数 k を求めよ。

(2)　点 A, B, C, D が球面 S 上を動くときの，F の最大値 M を求めよ。

(3)　点 C の座標が $\left(-\frac{1}{4},\ \frac{\sqrt{15}}{4},\ 0\right)$，点 D の座標が $(1,\ 0,\ 0)$ であるとき，$F=M$ となる S 上の点 A, B の組をすべて求めよ。

$\boxed{10}$ ［東京工大］

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$のとき，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=1$であり，

$$\mathrm{AB}^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=2-2\vec{a}\cdot\vec{b},\ \mathrm{BC}^2=|\vec{c}-\vec{b}|^2=2-2\vec{b}\cdot\vec{c}$$

$$\mathrm{CA}^2=|\vec{a}-\vec{c}|^2=2-2\vec{c}\cdot\vec{a},\ \mathrm{AD}^2=|\vec{d}-\vec{a}|^2=2-2\vec{a}\cdot\vec{d}$$

$$\mathrm{BD}^2=|\vec{d}-\vec{b}|^2=2-2\vec{b}\cdot\vec{d},\ \mathrm{CD}^2=|\vec{d}-\vec{c}|^2=2-2\vec{c}\cdot\vec{d}$$

ここで，$F=2(\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2)-3(\mathrm{AD}^2+\mathrm{BD}^2+\mathrm{CD}^2)$より，

$$\begin{aligned}F&=4(3-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a})-6(3-\vec{a}\cdot\vec{d}-\vec{b}\cdot\vec{d}-\vec{c}\cdot\vec{d})\\&=-6-4(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})+6(\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{d}+\vec{c}\cdot\vec{d})\\&=-2\{3+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})-3(\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{d}+\vec{c}\cdot\vec{d})\}\\&=-2\{|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2-3(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{d}\}=-2(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-3\vec{d})\end{aligned}$$

よって，$k=-2$となる。

(2) $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$とおくと，(1)より，$F=-2(|\vec{p}|^2-3\vec{p}\cdot\vec{d})$となり，

$$F=-2|\vec{p}|^2+6\vec{d}\cdot\vec{p}=-2\left|\vec{p}-\frac{3}{2}\vec{d}\right|^2+\frac{9}{2}|\vec{d}|^2=-2\left|\vec{p}-\frac{3}{2}\vec{d}\right|^2+\frac{9}{2}$$

すると，$F\leqq\frac{9}{2}$となり，等号成立は$\vec{p}=\frac{3}{2}\vec{d}$のとき，すなわち$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\frac{3}{2}\vec{d}$を満たす場合で，例えば$\vec{a}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$，$\vec{b}=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{4},\ \frac{3}{4}\right)$，$\vec{c}=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{4},\ -\frac{3}{4}\right)$，$\vec{d}=(1,\ 0,\ 0)$とすればよい。

したがって，Fの最大値Mは$M=\frac{9}{2}$である。

(3) $\vec{c}=\left(-\frac{1}{4},\ \frac{\sqrt{15}}{4},\ 0\right)$，$\vec{d}=(1,\ 0,\ 0)$のとき，$F=M$では$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\frac{3}{2}\vec{d}$から，

$$\vec{a}+\vec{b}=\frac{3}{2}\vec{d}-\vec{c}=\frac{3}{2}(1,\ 0,\ 0)-\left(-\frac{1}{4},\ \frac{\sqrt{15}}{4},\ 0\right)=\left(\frac{7}{4},\ -\frac{\sqrt{15}}{4},\ 0\right)\cdots\cdots\cdots(*)$$

これより，$|\vec{a}+\vec{b}|^2=\frac{49}{16}+\frac{15}{16}=4$となり，$\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角を$\theta$とおくと，

$$2+2\cdot1^2\cdot\cos\theta=4,\ \cos\theta=1$$

よって，$\theta=0$から$\vec{a}=\vec{b}$となり，(＊)より$\vec{a}=\vec{b}=\left(\frac{7}{8},\ -\frac{\sqrt{15}}{8},\ 0\right)$なので，

$$\mathrm{A}\left(\frac{7}{8},\ -\frac{\sqrt{15}}{8},\ 0\right),\ \mathrm{B}\left(\frac{7}{8},\ -\frac{\sqrt{15}}{8},\ 0\right)$$

［解　説］

空間ベクトルの応用題です。(3)では，(＊)だけで，$\vec{a}$と$\vec{b}$の成分が決まるように，数値が設定されていました。なお，(2)の等号成立の例は，(3)の結論でも構いません。

11 ［一橋大］

実数 x に対し，x を超えない最大の整数を $[\,x\,]$ で表す。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_k = 2^{[\sqrt{k}]} \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定義する。正の整数 n に対して，$b_n = \sum_{k=1}^{n^2} a_k$ を求めよ。

11　　　　[一橋大]

l を整数として，$l \leqq \sqrt{k} < l+1$ すなわち $l^2 \leqq k < (l+1)^2$ のとき，$[\sqrt{k}] = l$ である。

すると，$a_k = 2^{[\sqrt{k}]}$ から，

$$a_{l^2} = a_{l^2+1} = a_{l^2+2} = \cdots = a_{(l+1)^2-1} = 2^l$$

ここで，$s_l = a_{l^2} + a_{l^2+1} + a_{l^2+2} + \cdots + a_{(l+1)^2-1}$ とおくと，

$$s_l = \{(l+1)^2 - 1 - l^2 + 1\}\cdot 2^l = (2l+1)\cdot 2^l$$

すると，正の整数 n に対して，$b_n = \sum_{k=1}^{n^2} a_k$ より，$n \geqq 2$ のとき，

$$b_n = \sum_{l=1}^{n-1} s_l + 2^n = \sum_{l=1}^{n-1}(2l+1)\cdot 2^l + 2^n \cdots\cdots\cdots①$$

そこで，$t_{n-1} = \sum_{l=1}^{n-1}(2l+1)\cdot 2^l = 3\cdot 2^1 + 5\cdot 2^2 + 7\cdot 2^3 + \cdots + (2n-1)\cdot 2^{n-1}$ とおくと，

$$\begin{aligned} t_{n-1} - 2t_{n-1} &= 3\cdot 2^1 + 2(2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}) - (2n-1)\cdot 2^n \\ &= 6 + 2\cdot\frac{2^2(2^{n-2}-1)}{2-1} - (2n-1)\cdot 2^n = 6 + (2^{n+1} - 8) - (2n-1)\cdot 2^n \\ &= -2 - (2n-3)\cdot 2^n \end{aligned}$$

これより，$t_{n-1} = 2 + (2n-3)\cdot 2^n$ となり，①より，

$$b_n = 2 + (2n-3)\cdot 2^n + 2^n = 2 + (n-1)\cdot 2^{n+1} \cdots\cdots\cdots②$$

なお，$n = 1$ のときも①は成立している。

[解　説]

数列の和の問題です。見かけは複雑そうですが，具体的に考えると，内容は群数列の和であることがわかります。

$\boxed{12}$　　［京都大・文］

p が素数ならば p^4+14 は素数でないことを示せ。

$\boxed{12}$ ［京都大・文］

まず，素数 p について，$p=2$ のとき，$p \geqq 3$ のときで場合分けをする。

(i) $p=2$ のとき

このとき，$p^4+14=30=2\cdot3\cdot5$ となり，p^4+14 は素数でない。

(ii) $p \geqq 3$ のとき

$p=3$ では，$p^4+14=95=5\cdot19$ となり，p^4+14 は素数でない。

$p \neq 3$ では，以下 mod 3 で記すと，$p \equiv 1$ または $p \equiv 2$ で，$p < p^4+14$ に注意すると，

・$p \equiv 1$ のとき　$p^4+14 \equiv 1^4+14 \equiv 15 \equiv 0$ より，p^4+14 は素数でない。

・$p \equiv 2$ のとき　$p^4+14 \equiv 2^4+14 \equiv 30 \equiv 0$ より，p^4+14 は素数でない。

(i)(ii)より，p が素数ならば p^4+14 は素数でない。

［解 説］

京大らしい整数問題です。ただ，2018 年に同様な考え方をする類題があり，その経験がものを言います。

$\boxed{13}$ ［神戸大・理］

iを虚数単位とする。以下の問いに答えよ。

(1) $n=2,\ 3,\ 4,\ 5$のとき$(2+i)^n$を求めよ。またそれらの虚部の整数を 10 で割った余りを求めよ。

(2) nを正の整数とするとき$(2+i)^n$は虚数であることを示せ。

13　　［神戸大・理］

(1)　$(2+i)^2=4+4i+i^2=3+4i$，$(2+i)^3=8+12i+6i^2+i^3=2+11i$

$$(2+i)^4=(3+4i)^2=9+24i+16i^2=-7+24i$$

$$(2+i)^5=(3+4i)(2+11i)=6+33i+8i+44i^2=-38+41i$$

$(2+i)^n$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ 5)$ の虚部の整数を 10 で割った余りは，$n=2,\ 4$ のとき 4，$n=3,\ 5$ のとき 1 である。

(2)　まず，$(2+i)^n=a_n+b_ni$ とおくとき，$a_1=2$，$b_1=1$ で，

$$a_{n+1}+b_{n+1}i=(2+i)^{n+1}=(a_n+b_ni)(2+i)=(2a_n-b_n)+(a_n+2b_n)i$$

すると，$a_{n+1}=2a_n-b_n$ ……①，$b_{n+1}=a_n+2b_n$ ……②となり，これより，帰納的に，a_n，b_n は整数である。

そこで，②より $a_n=b_{n+1}-2b_n$ なので，この式を①に代入すると，

$$b_{n+2}-2b_{n+1}=2(b_{n+1}-2b_n)-b_n,\ b_{n+2}=4b_{n+1}-5b_n\ \cdots\cdots\cdots③$$

以下，mod10 として，n が奇数のとき $b_n\equiv1$，n が偶数のとき $b_n\equiv4$，すなわち k を自然数として $b_{2k-1}\equiv1$，$b_{2k}\equiv4$ であることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$k=1$ のとき　$b_1=1$，$b_2=4$ より，成立している。

(ii)　$k=l$ のとき　$b_{2l-1}\equiv1$，$b_{2l}\equiv4$ と仮定すると，③より，

$$b_{2l+1}=4b_{2l}-5b_{2l-1}\equiv4\cdot4-5\cdot1\equiv16-5\equiv11\equiv1$$

$$b_{2l+2}=4b_{2l+1}-5b_{2l}\equiv4\cdot1-5\cdot4\equiv4-20\equiv-16\equiv4$$

よって，$k=l+1$ のときも成立している。

(i)(ii)より，n が奇数のとき $b_n\equiv1$，n が偶数のとき $b_n\equiv4$ である。

すると，n の偶奇にかかわらず $b_n\neq0$ なので，$(2+i)^n$ は虚数である。

［解　説］

複素数の n 乗を題材にした整数問題です。(1)の誘導により(2)の方針が決定できます。なお，実部を 10 で割った余りにも周期性があり，これと連立漸化式①②を組み合わせて証明する方法も考えられます。

14 ［岡山大］

以下の問いに答えよ。

(1) n が整数のとき，n を 6 で割ったときの余りと n^3 を 6 で割ったときの余りは等しいことを示せ。

(2) 整数 a，b，c が条件$(*)$: $a^3+b^3+c^3=(c+1)^3$ を満たすとき，$a+b$ を 6 で割った余りは 1 であることを示せ。

(3) $1\leqq a\leqq b\leqq c\leqq 10$ を満たす整数の組$(a,\ b,\ c)$で，(2)の条件$(*)$を満たすものをすべて求めよ。

14

［岡山大］

(1) 整数nに対して，$n^3-n=(n-1)n(n+1)$………①

ここで，連続3整数$n-1$，n，$n+1$は，いずれかが2の倍数，いずれかが3の倍数であり，2と3は互いに素なので，その積$(n-1)n(n+1)$は6の倍数である。

よって，①から，nを6で割ったときの余りと，n^3を6で割ったときの余りは等しくなる。

(2) 整数a, b, cに対して，以下$\bmod 6$で記すと，(1)から$a\equiv a^3$かつ$b\equiv b^3$より，

$$a+b\equiv a^3+b^3\text{………②}$$

さて，条件(＊)から，$a^3+b^3+c^3=(c+1)^3$なので，

$$a^3+b^3=(c+1)^3-c^3=3c^2+3c+1=3c(c+1)+1\text{………③}$$

ここで，$c(c+1)$は2の倍数より，$3c(c+1)$は6の倍数となり，

$$a^3+b^3\equiv 3c(c+1)+1\equiv 1\text{………④}$$

②④より，$a+b\equiv 1$すなわち$a+b$を6で割った余りは1である。

(3) $1\leqq a\leqq b\leqq c\leqq 10$を満たす整数$a, b, c$に対して，③より，

$$b^3<a^3+b^3=3c(c+1)+1\leqq 3\times 10\times 11+1=331$$

ここで，$6^3=216$，$7^3=343$より，$b\leqq 6$となる。

これより，$2\leqq a+b\leqq 12$となり，(1)の結論から$a+b=6\cdot 1+1=7$

$$(a,\ b)=(1,\ 6),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4)$$

(i) $(a,\ b)=(1,\ 6)$のとき　$a^3+b^3=217$となり，③より$3c^2+3c+1=217$

$c^2+c-72=0$となり，$(c-8)(c+9)=0$から$c=8$

(ii) $(a,\ b)=(2,\ 5)$のとき　$a^3+b^3=133$となり，③より$3c^2+3c+1=133$

$c^2+c-44=0$となり，この方程式を満たす整数cは存在しない。

(iii) $(a,\ b)=(3,\ 4)$のとき　$a^3+b^3=91$となり，③より$3c^2+3c+1=91$

$c^2+c-30=0$となり，$(c-5)(c+6)=0$から$c=5$

(i)～(iii)より，$(a,\ b,\ c)=(1,\ 6,\ 8),\ (3,\ 4,\ 5)$

［解 説］

標準的な整数問題です。ポイントは，(3)の値を絞り込む作業です。また，(1)は6で割った余りで場合分けをして処理する方法も考えられます。

15　［金沢大・文］

次の問いに答えよ。

(1) n を整数とするとき，1 次不定方程式 $3x+5y=n$ の整数解をすべて求めよ。

(2) 0 以上 7 以下の整数 n のうち，0 以上の整数 x, y を用いて $n=3x+5y$ と表せないものの個数を求めよ。

(3) 8 以上のすべての整数 n は，0 以上の整数 x, y を用いて $n=3x+5y$ と表せることを示せ。

$\boxed{15}$　　　　［金沢大・文］

(1)　不定方程式$3x+5y=n$ (n は整数)……①に対して，①を満たす 1 組の$(x,\ y)$として，$(x,\ y)=(2n,\ -n)$をとると，

$$3\cdot 2n+5\cdot(-n)=n \ \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$3(x-2n)+5(y+n)=0$，$3(x-2n)=-5(y+n)$

3 と 5 は互いに素なので，k を整数として，$x-2n=5k$，$y+n=-3k$ と表せ，

$$x=5k+2n,\ \ y=-3k-n$$

(2)　整数 $x,\ y\,(x\geqq 0,\ y\geqq 0)$ を用いて，$n=3x+5y$ と表せる整数n $(0\leqq n\leqq 7)$ について，$y\geqq 2$のときは$n\geqq 10$ となり不適なので，$y=0,\ 1$のときを考えると，

(i)　$y=0$のとき

$n=3x$ かつ$0\leqq n\leqq 7$から$x=0,\ 1,\ 2$となり，$n=0,\ 3,\ 6$を表すことができる。

(ii)　$y=1$のとき

$n=3x+5$かつ$0\leqq n\leqq 7$から$x=0$となり，$n=5$を表すことができる。

(i)〜(ii)より，$n=3x+5y$ と表せる整数nは，$n=0,\ 3,\ 5,\ 6$である。

したがって，$n=3x+5y$ と表せない整数n $(0\leqq n\leqq 7)$ は，$n=1,\ 2,\ 4,\ 7$ となり，その個数は 4 である。

(3)　整数$x,\ y\,(x\geqq 0,\ y\geqq 0)$を用いて，$n=3x+5y$ と表せる整数n $(n\geqq 8)$ について，

(i)　$y=0$のとき

$n=3x$ かつ$n\geqq 8$から$x\geqq 3$となり，nは 9 以上の 3 の倍数$(n=9,\ 12,\ 15,\ \cdots)$を表すことができる。

(ii)　$y=1$のとき

$n=3x+5=3(x+1)+2$かつ$n\geqq 8$から$x\geqq 1$となり，nは 8 以上の 3 で割った余りが 2 の整数$(n=8,\ 11,\ 14,\ \cdots)$を表すことができる。

(iii)　$y=2$のとき

$n=3x+10=3(x+3)+1$かつ$n\geqq 8$から$x\geqq 0$となり，nは 10 以上の 3 で割った余りが 1 の整数$(n=10,\ 13,\ 16,\ \cdots)$を表すことができる。

(i)〜(iii)より，$n=3x+5y$ は 8 以上のすべての整数を表すことができる。

［解　説］

有名な整数問題の 1 つです。なお，2000 年度の阪大・理系に誘導なしで同じ問題が出題されていますので「2 次数学ランドマーク／整数と数列」を参照してください。

16　　［千葉大・理］

m を正の整数とする。座標平面上の点$(x,\ y)$で，xn^3+yn^2 $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$がすべて整数であるようなものは，連立不等式 $x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$x+y\leqq m$ の表す領域に何個あるか答えよ。

$\boxed{16}$　　［千葉大・理］

自然数 n に対して $f(n)=xn^3+yn^2$ とし，$g(n)=f(n+1)-f(n)$ とおくと，

$$g(n)=x(n+1)^3+y(n+1)^2-(xn^3+yn^2)=x(3n^2+3n+1)+y(2n+1)$$
$$=3xn^2+(3x+2y)n+x+y$$

さらに，$h(n)=g(n+1)-g(n)$ とおくと，

$$h(n)=3x(n+1)^2+(3x+2y)(n+1)+x+y-\{3xn^2+(3x+2y)n+x+y\}$$
$$=3x(2n+1)+(3x+2y)=6xn+6x+2y$$

ここで，任意の n に対し，$f(n)$ がつねに整数である条件は，

$f(1)=x+y$ が整数 かつ $g(n)$ がつねに整数

そして，任意の n に対し，$g(n)$ がつねに整数である条件は，

$g(1)=7x+3y$ が整数 かつ $h(n)$ がつねに整数

さらに，任意の n に対し，$h(n)$ がつねに整数である条件は，

$6x$ が整数 かつ $6x+2y$ が整数

すると，$f(n)$ がつねに整数である条件は，$x+y$，$7x+3y$，$6x$，$6x+2y$ が整数となり，$7x+3y=(x+y)+(6x+2y)$，$2y=(6x+2y)-6x$ に注意すると，$x+y$ と $6x$ と $2y$ が整数，さらに $6x=6(x+y)-3\cdot 2y$ から，$x+y$ と $2y$ が整数となる。

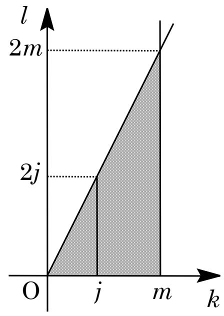
これより，$k,\,l$ を整数として，$x+y=k$，$2y=l$ とおくと，

$$(x,\ y)=\left(k-\frac{l}{2},\ \frac{l}{2}\right)$$

さて，点 $(x,\ y)$ が，連立不等式 $x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$x+y\leqq m$ の表す領域にあるのは，

$$k-\frac{l}{2}\geqq 0,\ \frac{l}{2}\geqq 0,\ k\leqq m$$

まとめると，$0\leqq l\leqq 2k$ かつ $k\leqq m$ となり，kl 平面上に図示すると右図の網点部になる。ただし，境界は領域に含む。



そして，求める点 $(x,\ y)$ の個数は，この領域に含まれる格子点 $(k,\ l)$ の個数として数えられ，その個数を N とする。すると，線分 $k=j\ (j=0,\ 1,\ \cdots,\ m)$ 上には格子点が $2j+1$ 個あることより，

$$N=\sum_{j=0}^{m}(2j+1)=\frac{1+(2m+1)}{2}\cdot(m+1)=(m+1)^2$$

［解　説］

誘導のない整数問題です。前半は必要条件を求め十分性を確認する解法も考えられますが，解答例では必要十分条件を求め，それをまとめる方法をとっています。

$\boxed{17}$ ［九州大・理］

以下の問いに答えよ。

(1) 自然数 $n,\ k$ が $2 \leqq k \leqq n-2$ をみたすとき，${}_n\mathrm{C}_k > n$ であることを示せ。

(2) p を素数とする。$k \leqq n$ をみたす自然数の組 $(n,\ k)$ で ${}_n\mathrm{C}_k = p$ となるものをすべて求めよ。

$\boxed{17}$ ［九州大・理］

(1) 自然数 n,k が $2 \leqq k \leqq n-2$ をみたすとき,

$$ {}_n\mathrm{C}_k - n = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 2\cdot 1} - n = n\left(\frac{n-1}{k}\cdot\frac{n-2}{k-1}\cdots\frac{n-k+1}{2} - 1\right)$$

ここで，$n \geqq k+2$ より，$\dfrac{n-1}{k} - 1 = \dfrac{n-k-1}{k} \geqq \dfrac{k+2-k-1}{k} = \dfrac{1}{k} > 0$

$$\frac{n-2}{k-1} - 1 = \frac{n-k-1}{k-1} \geqq \frac{k+2-k-1}{k-1} = \frac{1}{k-1} > 0$$

$$\frac{n-k+1}{2} - 1 = \frac{n-k-1}{2} \geqq \frac{k+2-k-1}{2} = \frac{1}{2} > 0$$

一般的に，$0 \leqq l \leqq k-2$ をみたす整数 l に対して,

$$\frac{n-l-1}{k-l} - 1 = \frac{n-k-1}{k-l} \geqq \frac{k+2-k-1}{k-l} = \frac{1}{k-l} > 0$$

これより，$\dfrac{n-1}{k} > 1$，$\dfrac{n-2}{k-1} > 1$，$\cdots$，$\dfrac{n-k+1}{2} > 1$ となるので,

$$\frac{n-1}{k}\cdot\frac{n-2}{k-1}\cdots\frac{n-k+1}{2} - 1 > 0$$

よって，${}_n\mathrm{C}_k - n > 0$ から，${}_n\mathrm{C}_k > n$……①である。

(2) 自然数 $n,k\,(k \leqq n)$，素数 p に対して，${}_n\mathrm{C}_k = p$……②のとき,

(i) $k=1$ のとき　②から ${}_n\mathrm{C}_1 = p$ となり，$n=p$ である。

(ii) $2 \leqq k \leqq n-2$ のとき

まず，①から ${}_n\mathrm{C}_k > n$ なので，②より $p > n$ である。

また，②から $\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} = p$ となり，$n! = p\cdot k!\,(n-k)!$ である。すると，$n!$ は素数 p の倍数になり，これより $n \geqq p$ であるが，$p > n$ に反する。

よって，$2 \leqq k \leqq n-2$ のとき，②をみたす $(n,\ k)$ は存在しない。

(iii) $k=n-1$ のとき　②から ${}_n\mathrm{C}_{n-1} = p$ となり，$n=p$ である。

(iv) $k=n$ のとき　②から ${}_n\mathrm{C}_n = p$ となり，$1=p$ から成立しない。

(i)～(iv)より，②をみたす $(n,\ k)$ は，$(n,\ k) = (p,\ 1)$，$(p,\ p-1)$ である。

［解 説］

二項係数を題材にした整数問題です。(2)の結論は，具体例を考えたり，(1)の不等式を誘導としてみると，予想可能なものです。

18 ［信州大・医］

箱の中に，2 と書かれた札 1 枚と，3 と書かれた札 2 枚が入っている。この箱から札を 1 枚引き，書かれている数字を見てからもとにもどす。この試行を n 回繰り返す。このとき，j 回目の試行で引いた札に書かれている数字を a_j とし，a_1，a_2，…，a_n の積を A_n とおく。さらに，A_n を 12 で割った余りを r_n とする。$n \geqq 3$ のとき，以下の問いに答えよ。

(1) 2 と書かれた札が出る回数を p とする。このとき，$r_n = 6$ となるための p がみたす必要十分条件を求めよ。

(2) $r_n = 6$ となる確率を n を用いて表せ。

(3) $r_n = 0$ となる確率を n を用いて表せ。

$\boxed{18}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［信州大・医］

(1)　2 と書かれた札 1 枚と，3 と書かれた札 2 枚が入っている箱から札を 1 枚引き，数字を見てからもとにもどす試行を n 回繰り返すとき，引いた札に書かれている n 個の数字の積を A_n とおく。そして，A_n $(n \geqq 3)$ を 12 で割った余りを r_n とする。

$r_n = 6$ であるとき，$A_n = 12k+6 = 6(2k+1)$ (k は自然数)と表せる。

ここで，2 と書かれた札が出る回数を p とすると，3 と書かれた札が出る回数は $n-p$ となるので，

$$A_n = 2^p \cdot 3^{n-p} = 6\cdot 2^{p-1}\cdot 3^{n-p-1}$$

すると，$2^{p-1}\cdot 3^{n-p-1}$ は奇数より，$p-1=0$ から $p=1$ が必要である。

このとき，$n-p-1 = n-2 \geqq 1$ となるので，A_n は $6\times$(奇数)と表せ $r_n = 6$ である。

よって，$r_n = 6$ の条件は $p=1$ である。

(2)　$r_n = 6$ であるのは，(1)より $p=1$ なので，その確率は，

$${}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{n\cdot 2^{n-1}}{3^n}$$

(3)　$r_n = 0$ であるのは $A_n = 12k = 12\cdot 2^{p-2}\cdot 3^{n-p-1}$ から，$p-2 \geqq 0$ かつ $n-p-1 \geqq 0$，すなわち $p \geqq 2$ かつ $n-p \geqq 1$ である。

ここで，2 と書かれた札が少なくとも 2 回出る事象を E，3 と書かれた札が少なくとも 1 回出る事象を F とおくと，$r_n = 0$ となる事象は $E\cap F$ と表せる。

すると，$P(\overline{E}) = \left(\frac{2}{3}\right)^n + {}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{(2+n)\cdot 2^{n-1}}{3^n}$，$P(\overline{F}) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ であり，$n \geqq 3$ から $\overline{E}\cap\overline{F}$ は空事象なので $P(\overline{E}\cap\overline{F}) = 0$ となり，

$$\begin{aligned}P(E\cap F) &= 1 - P(\overline{E\cap F}) = 1 - P(\overline{E}\cup\overline{F})\\ &= 1 - \{P(\overline{E}) + P(\overline{F}) - P(\overline{E}\cap\overline{F})\} = 1 - \frac{(2+n)\cdot 2^{n-1}}{3^n} - \frac{1}{3^n} + 0\\ &= \frac{3^n - (2+n)\cdot 2^{n-1} - 1}{3^n}\end{aligned}$$

［解　説］

確率の標準的な問題です。(3)は余事象と加法定理を利用する有名な方法です。

19　　[新潟大・理]

平面上に正五角形 ABCDE があり，頂点 A, B, C, D, E は時計回りに配置されている。点 P をまず頂点 A の位置に置き，この正五角形の辺にそって時計回りに頂点から頂点へ与えられた正の整数 n だけ動かす。たとえば，$n=2$ ならば点 P は頂点 C の位置にあり，$n=6$ ならば点 P は頂点 B の位置にある。次の問いに答えよ。

(1)　さいころを 2 回投げて出た目の積で n を与えるとき，点 P が頂点 A の位置にある確率および点 P が頂点 B の位置にある確率をそれぞれ求めよ。

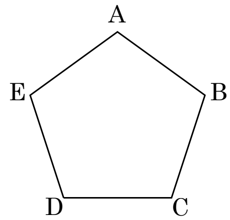
(2)　さいころを k 回投げて出た目の積で n を与えるとき，点 P が頂点 A の位置にある確率を求めよ。

(3)　さいころを k 回投げて出た目の積で n を与えるとき，点 P が頂点 B の位置にある確率を b_k とする。b_{k+1} を b_k を用いて表せ。

(4)　(3)で与えた b_k に対して，$f_k=6^k b_k$ とおく。数列 $\{f_k\}$ と $\{b_k\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。

19　　［新潟大・理］

(1) 正五角形 ABCDE に対して，点 P をまず頂点 A の位置に置き，この正五角形の辺にそって時計回りに頂点から頂点へ与えられた正の整数 n だけ動かす。



さいころを 2 回投げて出た目の積で n を与えるとき，さいころの目とその積 n の関係をまとめると，右下表のようになる。

すると，点 P が頂点 A の位置にあるのは，n が 5 の倍数，すなわち $n=5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30$ より，その確率は，

$$\frac{2+2+2+2+1+2}{6^2}=\frac{11}{36}$$

また，点 P が頂点 B の位置にあるのは，n を 5 で割った余りが 1，すなわち $n=1,\ 6,\ 16,\ 36$ より，その確率は，

$$\frac{1+4+1+1}{6^2}=\frac{7}{36}$$

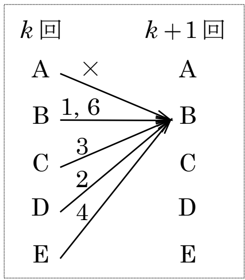
	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

(2) さいころを k 回投げて出た目の積で n を与えるとき，点 P が頂点 A, B, C, D, E の位置にある確率をそれぞれ a_k，b_k，c_k，d_k，e_k とおく。

すると，点 P が頂点 A の位置にあるのは，k 回のうち少なくとも 1 回は 5 が出るときなので，その確率 a_k は，$a_k=1-\left(\frac{5}{6}\right)^k$ である。

(3) (2)と同様に，点 P が頂点 B の位置にある確率 b_k に対して，

$$b_{k+1}=\frac{2}{6}b_k+\frac{1}{6}c_k+\frac{1}{6}d_k+\frac{1}{6}e_k=\frac{1}{3}b_k+\frac{1}{6}(1-a_k-b_k)$$
$$=\frac{1}{6}b_k+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^k\right\}=\frac{1}{6}b_k+\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^k\cdots\cdots①$$



(4) $f_k=6^kb_k$ とおくと $b_k=\frac{f_k}{6^k}$ となり，①より，

$$\frac{f_{k+1}}{6^{k+1}}=\frac{1}{6}\cdot\frac{f_k}{6^k}+\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^k,\quad f_{k+1}=f_k+5^k$$

ここで，$b_1=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ から $f_1=6^1\cdot\frac{1}{3}=2$ となり，$k\geqq 2$ において，

$$f_k=f_1+\sum_{j=1}^{k-1}5^j=2+\frac{5(5^{k-1}-1)}{5-1}=\frac{5^k}{4}+\frac{3}{4}\cdots\cdots\cdots②$$

なお，②に $k=1$ をあてはめると，$f_1=\frac{5^1}{4}+\frac{3}{4}=2$ となり成り立っている。

これより，$b_k=\frac{f_k}{6^k}=\frac{1}{4}\left(\frac{5}{6}\right)^k+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^k$ である。

［解 説］

確率と漸化式の標準的な問題です。(1)は直接的に数え上げましたが，5 で割った余りに注目して処理すると記述量が少なくなり，(2)以降とのつながりもよくなります。

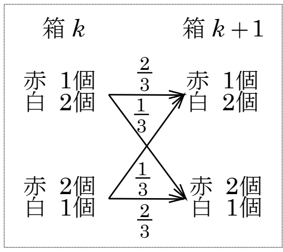
20 ［京都大・文］

n を 2 以上の整数とする。1 から n までの番号が付いた n 個の箱があり，それぞれの箱には赤玉と白玉が 1 個ずつ入っている。このとき操作(＊)を $k=1,\ \cdots,\ n-1$ に対して，k が小さい方から順に 1 回ずつ行う。

(＊) 番号 k の箱から玉を 1 個取り出し，番号 $k+1$ の箱に入れてよくかきまぜる。

一連の操作がすべて終了した後，番号 n の箱から玉を 1 個取り出し，番号 1 の箱に入れる。このとき番号 1 の箱に赤玉と白玉が 1 個ずつ入っている確率を求めよ。

$\boxed{20}$ ［京都大・文］



操作(＊)を行い，$n \geqq 3$ のとき，箱 $k(2 \leqq k \leqq n-1)$ に 3 個の玉が入っているとし，赤玉 1 個，白玉 2 個入っている確率を p_k，赤玉 2 個，白玉 1 個入っている確率を q_k とおくと，

$$p_{k+1} = \frac{2}{3}p_k + \frac{1}{3}q_k\,,\quad q_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{2}{3}q_k$$

すると，$p_{k+1} + q_{k+1} = p_k + q_k$ より，

$$p_k + q_k = p_2 + q_2 \cdots\cdots\cdots①$$

また，$p_{k+1} - q_{k+1} = \frac{1}{3}(p_k - q_k)$ より，$p_k - q_k = (p_2 - q_2)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} \cdots\cdots\cdots②$

さて，箱 1 から取り出して箱 2 に入れた玉の色で場合分けをすると，

(i) 箱 1 から赤玉を取り出して箱 2 に入れたとき

まず，箱 1 で赤玉を選ぶ確率が $\frac{1}{2}$ で，このとき $p_2 = 0$，$q_2 = \frac{1}{2}$ となり，①②より，

$$p_n + q_n = \frac{1}{2}\,,\quad p_n - q_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$$

これより，$p_n = \frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right\}$，$q_n = \frac{1}{4}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right\}$ となる。

そして，箱 n から赤玉を取り出し箱 1 に入れると，箱 1 は赤玉と白玉 1 個ずつ入っている状態になり，その確率は，

$$\frac{1}{3}p_n + \frac{2}{3}q_n = \frac{1}{12}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right\} + \frac{1}{6}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$$

(ii) 箱 1 から白玉を取り出して箱 2 に入れたとき

まず，箱 1 で白玉を選ぶ確率が $\frac{1}{2}$ で，このとき $p_2 = \frac{1}{2}$，$q_2 = 0$ となり，①②より，

$$p_n + q_n = \frac{1}{2}\,,\quad p_n - q_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$$

これより，$p_n = \frac{1}{4}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right\}$，$q_n = \frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right\}$ となる。

そして，箱 n から白玉を取り出し箱 1 に入れると，箱 1 は赤玉と白玉 1 個ずつ入っている状態になり，その確率は，

$$\frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n = \frac{1}{6}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right\} + \frac{1}{12}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$$

(i)(ii)より，箱 1 に赤玉と白玉 1 個ずつ入っている確率は，

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdots\cdots\cdots③$$

なお，③は $n=2$ のときも成立している。

［解 説］

確率と漸化式の問題です。解答例では箱の中の状態に着目して漸化式を立てました。