1 ［筑波大］

i は虚数単位とする。複素数平面において，複素数 z の表す点 P をP(z) または点 z とかく。$\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ とおき，3 点A(1)，B(ω)，C(ω^2) を頂点とする△ABC を考える。

(1) △ABC は正三角形であることを示せ。

(2) 点 z が辺 AC 上を動くとき，点 $-z$ が描く図形を複素数平面上に図示せよ。

(3) 点 z が辺 AB 上を動くとき，点 z^2 が描く図形を E_1 とする。また，点 z が辺 AC 上を動くとき，点 z^2 が描く図形を E_2 とする。E_1 と E_2 の共有点をすべて求めよ。

1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［筑波大］

(1)　$\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ のとき，A(1)，B(ω)，C(ω^2) を頂点とする△ABC について，

$$\omega^2-1=(\omega+1)(\omega-1)=\Big(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\Big)(\omega-1)=\Big(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\Big)(\omega-1)$$

これより,頂点 A のまわりに辺 AB を $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転すると辺 AC に一致するので,

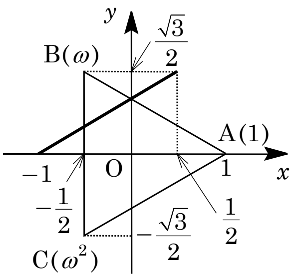
AB $=$ AC かつ $\angle$BAC $=\dfrac{\pi}{3}$ から，△ABC は正三角形である。

(2)　辺 AC 上を動く点 z を，$z=t\omega^2+(1-t)$ $(0\leqq t\leqq 1)$ とおくと，

$$-z=-t\omega^2-(1-t)=t(-\omega^2)+(1-t)(-1)$$

これより，点 $-z$ が描く図形は，点 -1 と点 $-\omega^2$ を両端とする線分，すなわち辺 AC を原点対称した線分である。

図示すると，右図の太線部となる。



(3)　辺 AB 上を動く点 z を $z_1=s\omega+(1-s)$ $(0\leqq s\leqq 1)$ とし，点 ${z_1}^2$ が描く図形を E_1 とする。また，辺 AC 上を動く点 z を $z_2=t\omega^2+(1-t)$ $(0\leqq t\leqq 1)$ とし，点 ${z_2}^2$ が描く図形を E_2 とする。

さて，E_1 と E_2 の共有点は，${z_1}^2={z_2}^2$ より $z_1=\pm z_2$ となり，

(i)　$z_1=z_2$ のとき

$s\omega+(1-s)=t\omega^2+(1-t)$ より，$s(\omega-1)=t(\omega^2-1)$ となり，$\omega\neq 1$ から，

$$s=t(\omega+1),\ t\omega+t-s=0$$

ω は虚数より $t=t-s=0$ となり，$s=t=0$ から $z_1=z_2=1$ なので，${z_1}^2={z_2}^2=1$

(ii)　$z_1=-z_2$ のとき

$s\omega+(1-s)=-t\omega^2-(1-t)$ より，$s(\omega-1)+2=-t(\omega^2-1)$

ここで，$\omega^3=1$ かつ $\omega\neq 1$ から $\omega^2+\omega+1=0$ となり，$\omega^2=-\omega-1$ より，

$$s(\omega-1)+2=-t(-\omega-2),\ (s-t)\omega-2t-s+2=0$$

ω は虚数より $s-t=-2t-s+2=0$ となり，$s=t=\dfrac{2}{3}$ から，

$$z_1=z_2=\frac{2}{3}\omega+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\Big(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\Big)+\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}i,\ {z_1}^2={z_2}^2=-\frac{1}{3}$$

(i)(ii)より，E_1 と E_2 の共有点は，点 1 と点 $-\dfrac{1}{3}$ である。

［解　説］

複素数平面上の軌跡の問題です。(1)は 3 辺の長さが等しいことを示しても構いません。また，(2)と(3)はパラメータ表示しましたが，図形的な解法も考えられます。

2 ［東北大］

z を複素数とする。複素数平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{A}(z)$，$\mathrm{B}(z^2)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) 3 点 O, A, B が同一直線上にあるための z の必要十分条件を求めよ。

(2) 3 点 O, A, B が二等辺三角形の頂点になるような z 全体を複素数平面上に図示せよ。

(3) 3 点 O, A, B が二等辺三角形の頂点であり，かつ z の偏角 θ が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$ を満たすとき，三角形 OAB の面積の最大値とそのときの z の値を求めよ。

2　　　　［東北大］

(1)　3 点 $\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{A}(z)$，$\mathrm{B}(z^2)$ が同一直線上にある条件は，$z=0$ または（$z\neq 0$ かつ k を実数として $z^2=kz$）より，

(i)　$z=0$ のとき　$\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{A}(0)$，$\mathrm{B}(0)$ より，すべて一致する。

(ii)　$z=k$ のとき　$\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{A}(k)$，$\mathrm{B}(k^2)$ より，すべて実軸上にある。

(i)(ii)より，O, A, B が同一直線上にある条件は「z が実数」である。

(2)　3 点 O, A, B が二等辺三角形の頂点になる条件は，z が虚数のもとで，

(i)　$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$ のとき　$|z|=|z^2|$ より $|z|=|z|^2$

$z\neq 0$ から $|z|=1$ となり，点 z は原点が中心で半径 1 の円周上にある。

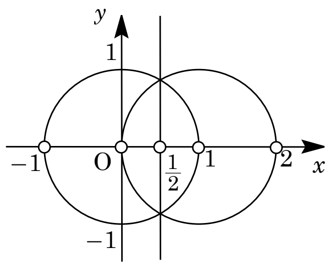
(ii)　$\mathrm{OA}=\mathrm{AB}$ のとき　$|z|=|z^2-z|$ より $|z|=|z||z-1|$

$z\neq 0$ から $|z-1|=1$ となり，点 z は点 1 が中心で半径 1 の円周上にある。

(iii)　$\mathrm{OB}=\mathrm{AB}$ のとき　$|z^2|=|z^2-z|$ より，

$$|z|^2=|z||z-1|$$

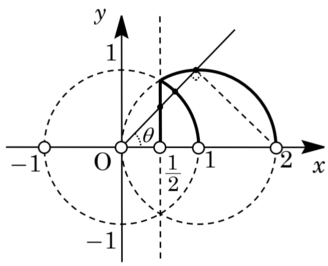
$z\neq 0$ から $|z|=|z-1|$ となり，点 z は原点と点 1 を結ぶ線分の垂直二等分線上にある。



(i)～(iii)より，点 z の存在範囲は右図のようになる。

ただし，白丸は除く。

(3)　3 点 O, A, B が二等辺三角形の頂点であり，z の偏角 θ が $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$ のとき，点 z は右図の太線部にある。



$\angle\mathrm{AOB}=\left|\arg\dfrac{z^2}{z}\right|=|\arg z|=\theta$ より，$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積を S とおくと，

$$S=\frac{1}{2}|z||z^2|\sin\theta=\frac{1}{2}|z|^3\sin\theta$$

これより，θ を $0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$ で固定すると，S が最大になるのは，点 z が点 1 を中心とし半径 1 の太線の円弧上にあるときで，このとき $|z|=2\cos\theta$ より，

$$S=\frac{1}{2}(2\cos\theta)^3\sin\theta=4\cos^3\theta\sin\theta$$

$$S'=-12\cos^2\theta\sin^2\theta+4\cos^4\theta=4\cos^2\theta(-3\sin^2\theta+\cos^2\theta)$$
$$=4\cos^2\theta(4\cos^2\theta-3)=4\cos^2\theta(2\cos\theta-\sqrt{3})(2\cos\theta+\sqrt{3})$$

これより，$0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$ における S の増減は右表のようになり，S は $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき最大値 $\dfrac{3}{4}\sqrt{3}$ をとる。

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$
S'		$+$	0	$-$	
S	0	↗	$\dfrac{3}{4}\sqrt{3}$	↘	$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

このとき$|z| = 2\cos\dfrac{\pi}{6} = \sqrt{3}$から，$z = \sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$である。

［解 説］

複素数平面上の図形についての頻出題です。(3)は最大値を求める問題ですが，この設問も，いわゆる１文字固定の方法を採用しています。

$\boxed{3}$ ［東京大］

複素数 a, b, c に対して整式 $f(z)=az^2+bz+c$ を考える。i を虚数単位とする。

(1) α，β，γ を複素数とする。$f(0)=\alpha$，$f(1)=\beta$，$f(i)=\gamma$ が成り立つとき，a, b, c をそれぞれ α，β，γ で表せ。

(2) $f(0)$，$f(1)$，$f(i)$ がいずれも 1 以上 2 以下の実数であるとき，$f(2)$ のとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ。

$\boxed{3}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大］

(1)　$f(z)=az^2+bz+c$ に対して，$f(0)=\alpha$，$f(1)=\beta$，$f(i)=\gamma$ より，

$$c=\alpha\cdots\cdots\cdots①,\quad a+b+c=\beta\cdots\cdots\cdots②,\quad -a+bi+c=\gamma\cdots\cdots\cdots③$$

①②より $a+b=\beta-\alpha$，①③より $-a+bi=\gamma-\alpha$ となり，

$$b=\frac{-2\alpha+\beta+\gamma}{1+i}=\frac{(-2\alpha+\beta+\gamma)(1-i)}{2}=(-1+i)\alpha+\frac{1-i}{2}\beta+\frac{1-i}{2}\gamma$$

$$a=\beta-\alpha-(-1+i)\alpha-\frac{1-i}{2}\beta-\frac{1-i}{2}\gamma=-i\alpha+\frac{1+i}{2}\beta-\frac{1-i}{2}\gamma$$

(2)　$1\leqq\alpha\leqq2$，$1\leqq\beta\leqq2$，$1\leqq\gamma\leqq2$ のもとで，$f(2)=4a+2b+c$ に対して，(1)の結果を適用すると，

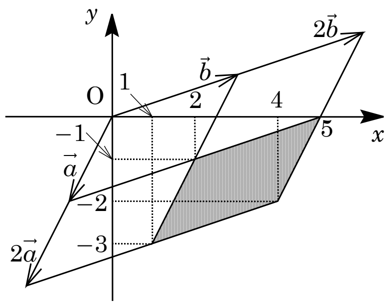
$$f(2)=-4i\alpha+2(1+i)\beta-2(1-i)\gamma+2(-1+i)\alpha+(1-i)\beta+(1-i)\gamma+\alpha$$
$$=(-1-2i)\alpha+(3+i)\beta+(-1+i)\gamma=(-\alpha+3\beta-\gamma)+(-2\alpha+\beta+\gamma)i$$

さて，$f(2)=x+yi$ とおくと，$x=-\alpha+3\beta-\gamma$，$y=-2\alpha+\beta+\gamma$ となり，

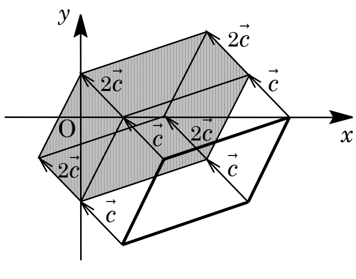
$$(x,\ y)=\alpha(-1,\ -2)+\beta(3,\ 1)+\gamma(-1,\ 1)$$

ここで，$\vec{x}=(x,\ y)$，$\vec{a}=(-1,\ -2)$，$\vec{b}=(3,\ 1)$，$\vec{c}=(-1,\ 1)$ とすると，

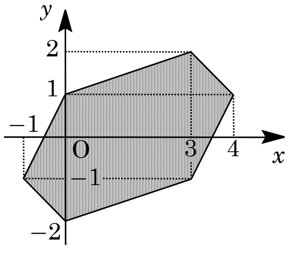
$$\vec{x}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$$



まず，$\vec{x'}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ とおき，α と β を独立に $1\leqq\alpha\leqq2$，$1\leqq\beta\leqq2$ で動かすと，$\vec{x'}$ のとりうる範囲は，右図の網点をつけた平行四辺形の内部または辺上である。



次に，α，β とは独立に，γ を $1\leqq\gamma\leqq2$ で動かすと，$\vec{x}=\vec{x'}+\gamma\vec{c}$ から，$\vec{x}$ のとりうる範囲は，$\vec{x'}$ のとりうる平行四辺形の内部または辺上を，$\vec{c}$ だけ平行移動したものから，$2\vec{c}$ だけ平行移動したものに至る通過領域として表せる。これを図示すると，右図の網点部である。



以上より，$f(2)$ のとりうる範囲を，複素数平面上に図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

［解　説］

複素数平面上の領域についての問題で，１文字を固定して考える頻出タイプです。

４　　［九州大］

自然数 n と実数 a_0，a_1，a_2，…，a_n ($a_n \neq 0$) に対して，2 つの整式

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 x + a_0$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots\cdots + a_1$$

を考える。α，β を異なる複素数とする。複素数平面上の 2 点 α，β を結ぶ線分上にある点 γ で，$\dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(\gamma)$ をみたすものが存在するとき，

α，β，$f(x)$ は平均値の性質をもつ

ということにする。以下の問いに答えよ。ただし，i は虚数単位とする。

(1)　$n = 2$ のとき，どのような α，β，$f(x)$ も平均値の性質をもつことを示せ。

(2)　$\alpha = 1 - i$，$\beta = 1 + i$，$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ が平均値の性質をもつための，実数 a, b, c に関する必要十分条件を求めよ。

(3)　$\alpha = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$，$\beta = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$，$f(x) = x^7$ は，平均値の性質をもたないことを示せ。

4　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［九州大］

(1)　実数係数の $f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0\ (a_2\neq 0)$ に対して，$f'(x)=2a_2x+a_1$

さて，複素数 α，$\beta\ (\alpha\neq\beta)$ をとり，

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{(a_2\beta^2+a_1\beta+a_0)-(a_2\alpha^2+a_1\alpha+a_0)}{\beta-\alpha}$$

$$=\frac{a_2(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)+a_1(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}=a_2(\beta+\alpha)+a_1\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，2 点 α，β を結ぶ線分の中点を γ とすると，$\gamma=\dfrac{\beta+\alpha}{2}$ となり，

$$f'(\gamma)=2a_2\gamma+a_1=a_2(\beta+\alpha)+a_1\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(\gamma)$ となるので，どのような α，β，$f(x)$ も平均値の性質をもつ。

(2)　$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ に対して，$f'(x)=3x^2+2ax+b$

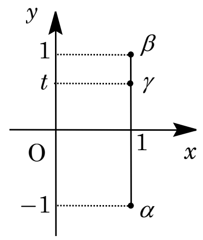
さて，$\alpha=1-i$，$\beta=1+i$ のとき，$\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=1-i^2=2$ となり，

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{(\beta^3+a\beta^2+b\beta+c)-(\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c)}{\beta-\alpha}$$

$$=\frac{(\beta-\alpha)(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)+a(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)+b(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}$$

$$=\{(\beta+\alpha)^2-\alpha\beta\}+a(\beta+\alpha)+b=2^2-2+2a+b$$

$$=2a+b+2$$



ここで，α，β，$f(x)$ が平均値の性質をもつ条件は，2 点 α，β を結ぶ線分上に，$\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(\gamma)$ をみたす点 γ が存在することより，$\gamma=1+ti\ (-1\leqq t\leqq 1)$ として，

$$2a+b+2=3(1+ti)^2+2a(1+ti)+b$$

$$3(1+2ti-t^2)+2a(1+ti)-2a-2=0$$

$$(1-3t^2)+2t(3+a)i=0$$

a，t は実数より，$1-3t^2=0$ かつ $2t(3+a)=0$ となり，$t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$a=-3$ である。

すると，$t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ は $-1\leqq t\leqq 1$ をみたすことより，α，β，$f(x)$ が平均値の性質をもつ条件は，$a=-3$，b と c は任意の実数である。

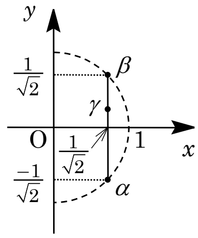
(3)　$f(x)=x^7$ に対して，$f'(x)=7x^6$

さて，$\alpha=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}=\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\beta=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}$ のとき，

$\alpha^7=\cos\left(-\dfrac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{7\pi}{4}\right)=\beta$，$\beta^7=\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}=\alpha$ となり，

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{\beta^7-\alpha^7}{\beta-\alpha}=\frac{\alpha-\beta}{\beta-\alpha}=-1$$

ここで，α，β，$f(x)$ が平均値の性質をもつと仮定すると，2 点 α，β を結ぶ線分上に，$\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(\gamma)$ をみたす点 γ が存在する。



そこで，$\gamma=r(\cos\theta+i\sin\theta)\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq r\leqq 1,\ -\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$ とおくと，$-1=7r^6(\cos 6\theta+i\sin 6\theta)$ から，

$$r^6(\cos 6\theta+i\sin 6\theta)=-\frac{1}{7}$$

すると，$\dfrac{1}{8}\leqq r^6\leqq 1$ から $r^6=\dfrac{1}{7}$ となり $r=\dfrac{1}{\sqrt[6]{7}}$ であり，また $-\dfrac{3}{2}\pi\leqq 6\theta\leqq\dfrac{3}{2}\pi$ から $6\theta=\pm\pi$ となり $\theta=\pm\dfrac{\pi}{6}$ である。

したがって，$\gamma=\dfrac{1}{\sqrt[6]{7}}\left\{\cos\left(\pm\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}=\dfrac{1}{\sqrt[6]{7}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pm\dfrac{1}{2}i\right)$ となるが，ともに実部は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ではないので，点 γ は 2 点 α，β を結ぶ線分上にない。

よって，α，β，$f(x)$ は平均値の性質をもたない。

［解　説］

問題文に与えられた「平均値の性質」という定義の理解を問うものです。(2)と(3)は具体例ですが，$f(x)$ の形に応じて処理方法を変えています。

5 ［広島大］

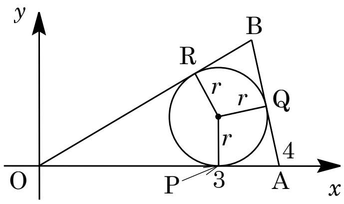
座標平面において，O(0, 0)，A(4, 0)，P(3, 0)とする。線分 OA に点 P で接する円 C を内接円とする△OAB を考える。ただし，円 C の中心は第 1 象限にあるとする。次の問いに答えよ。

(1) OB と AB の差は一定であることを証明せよ。

(2) 円 C の半径を r とするとき，r のとる値の範囲を求めよ。

(3) r が(2)の範囲で変化するとき，点 B の軌跡の方程式を求めよ。また，その概形をかけ。

$\boxed{5}$ ［広島大］

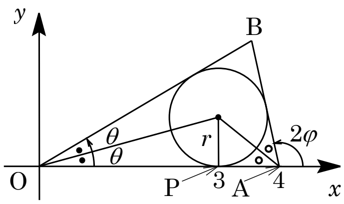


(1) 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(4,\ 0)$ および第 1 象限の点 B を頂点とする△OAB の内接円 C と，辺 OA, AB, OB の接点をそれぞれ $\mathrm{P}(3,\ 0)$, Q, R とおくと，

$$\mathrm{OB}=\mathrm{OR}+\mathrm{BR}=\mathrm{OP}+\mathrm{BQ}=3+\mathrm{BQ}$$

$$\mathrm{AB}=\mathrm{AQ}+\mathrm{BQ}=\mathrm{AP}+\mathrm{BQ}=1+\mathrm{BQ}$$

これより，$\mathrm{OB}-\mathrm{AB}=(3+\mathrm{BQ})+(1+\mathrm{BQ})=2$ ………(＊)



(2) 線分 OB, AB と x 軸の正の部分とのなす角をそれぞれ 2θ，2φ とおくと，内接円 C の半径 r は，

$$r=\mathrm{OP}\tan\theta=3\tan\theta$$

$$r=\mathrm{AP}\tan\frac{\pi-2\varphi}{2}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\frac{1}{\tan\varphi}$$

すると，$\tan\theta=\dfrac{r}{3}$，$\tan\varphi=\dfrac{1}{r}$ となる。

さて，点 B が第 1 象限にある条件は，$0<2\theta<2\varphi<\pi$ から $0<\theta<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ となり，

$$0<\tan\theta<\tan\varphi,\quad 0<\frac{r}{3}<\frac{1}{r}$$

よって，$0<r<\sqrt{3}$ となる。

(3) (＊)より，点 B は 2 定点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(4,\ 0)$ からの距離の差が一定なので，点 B の軌跡は 2 点 O, A を焦点とする双曲線の右側の枝の第 1 象限の部分となる。

ここで，線分 OA の中点が $(2,\ 0)$ より，その方程式を $\dfrac{(x-2)^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ とおく。

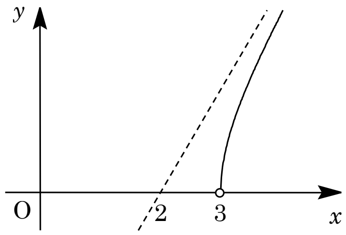
まず，(＊)より $2a=2$ から $a=1$ となり，焦点間距離 $2c=4$ から $c=2$ である。

そして，$a^2+b^2=c^2$ から，$b^2=2^2-1^2=3$ なので，双曲線の方程式は，

$$(x-2)^2-\frac{y^2}{3}=1$$

漸近線は，$y=\pm\sqrt{3}(x-2)$ となり，点 B の軌跡は右図の曲線である。

ただし，端点の白丸は除く。



［解 説］

双曲線の定義に関する問題です。(2)はいろいろな方法が考えられ，方針に迷うところです。ここでは，r が $r>0$ で増加したとき，線分 OB と AB の傾きの変化に着目し，角を設定して記述しました。

$\boxed{6}$ ［新潟大］

$a \geqq 0$ とし，n を正の整数とする。次の問いに答えよ。

(1) $x>0$ のとき，$\dfrac{x}{1+a}\left(1-\dfrac{x}{2(1+a)}\right)<\log\dfrac{1+a+x}{1+a}<\dfrac{x}{1+a}$ を示せ。

(2) $I_n(a)=\left(1+\dfrac{1}{n^2(1+a)}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2(1+a)}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2(1+a)}\right)$ とおく。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log I_n(a)$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{{}_{3n^2+n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n^2+n}\mathrm{C}_n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ を求めよ。

$\boxed{6}$　　［新潟大］

(1)　まず，$t>0$ のとき，$t\left(1-\dfrac{t}{2}\right)<\log(1+t)<t$ ……①の成立を証明する。

$f(t)=t-\log(1+t)$ とおくと，$f'(t)=1-\dfrac{1}{1+t}=\dfrac{t}{1+t}>0$ となり，

$$f(t)>f(0)=0,\ t>\log(1+t)\ \cdots\cdots\text{②}$$

$g(t)=\log(1+t)-t\left(1-\dfrac{t}{2}\right)$ とおくと，$g'(t)=\dfrac{1}{1+t}-1+t=\dfrac{t^2}{1+t}>0$ となり，

$$g(t)>g(0)=0,\ \log(1+t)>t\left(1-\frac{t}{2}\right)\cdots\cdots\text{③}$$

②③より①が成立し，$a\geqq 0$，$x>0$ のとき，$t=\dfrac{x}{1+a}>0$ とおくと，

$$\frac{x}{1+a}\left(1-\frac{x}{2(1+a)}\right)<\log\frac{1+a+x}{1+a}<\frac{x}{1+a}\cdots\cdots\text{④}$$

(2)　$I_n(a)=\left(1+\dfrac{1}{n^2(1+a)}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2(1+a)}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2(1+a)}\right)$ に対して，

$$\log I_n(a)=\log\left(1+\frac{1}{n^2(1+a)}\right)\left(1+\frac{2}{n^2(1+a)}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2(1+a)}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n^2(1+a)}\right)$$

④より，$x=\dfrac{k}{n^2}>0$ とおくと，

$$\frac{k}{n^2(1+a)}\left(1-\frac{k}{2n^2(1+a)}\right)<\log\left(1+\frac{k}{n^2(1+a)}\right)<\frac{k}{n^2(1+a)}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2(1+a)}\left(1-\frac{k}{2n^2(1+a)}\right)<\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n^2(1+a)}\right)<\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2(1+a)}$$

すると，$n\to\infty$ のとき，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2(1+a)}=\frac{1}{n^2(1+a)}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n+1}{2n(1+a)}=\frac{1+n^{-1}}{2(1+a)}\to\frac{1}{2(1+a)}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2(1+a)}\left(1-\frac{k}{2n^2(1+a)}\right)=\frac{n+1}{2n(1+a)}-\frac{1}{2n^4(1+a)^2}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=\frac{n+1}{2n(1+a)}-\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3(1+a)^2}=\frac{1+n^{-1}}{2(1+a)}-\frac{n^{-1}(1+n^{-1})(2+n^{-1})}{12(1+a)^2}\to\frac{1}{2(1+a)}$$

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n^2(1+a)}\right)\to\frac{1}{2(1+a)}$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log I_n(a)=\frac{1}{2(1+a)}$

(3)　$J(n)=\dfrac{{}_{3n^2+n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n^2+n}\mathrm{C}_n}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ とおくと，$\log J(n)=\log\dfrac{{}_{3n^2+n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n^2+n}\mathrm{C}_n}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ となり，

$$\log J(n)=\log\frac{{}_{3n^2+n}\mathrm{C}_n}{3^n\cdot n^{2n}}\cdot\frac{2^n\cdot n^{2n}}{{}_{2n^2+n}\mathrm{C}_n}=\log\frac{{}_{3n^2+n}\mathrm{C}_n}{(3n^2)^n}-\log\frac{{}_{2n^2+n}\mathrm{C}_n}{(2n^2)^n}\cdots\cdots\text{⑤}$$

さて，$\dfrac{{}_{3n^2+n}\mathrm{C}_n}{(3n^2)^n}=\dfrac{3n^2+1}{3n^2}\cdot\dfrac{3n^2+2}{3n^2}\cdots\dfrac{3n^2+n}{3n^2}=\left(1+\dfrac{1}{3n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{3n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{3n^2}\right)$

$$\log\frac{{}_{3n^2+n}\mathrm{C}_n}{(3n^2)^n}=\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{3n^2}\right)\to\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{6}\quad(n\to\infty)$$

また，$\dfrac{{}_{2n^2+n}\mathrm{C}_n}{(2n^2)^n}=\dfrac{2n^2+1}{2n^2}\cdot\dfrac{2n^2+2}{2n^2}\cdots\dfrac{2n^2+n}{2n^2}=\left(1+\dfrac{1}{2n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{2n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{2n^2}\right)$

$$\log\frac{{}_{2n^2+n}\mathrm{C}_n}{(2n^2)^n}=\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{2n^2}\right)\to\frac{1}{2\cdot 2}=\frac{1}{4}\quad(n\to\infty)$$

⑤より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log J(n)=\frac{1}{6}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{12}$となり，対数関数は連続関数なので，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{{}_{3n^2+n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n^2+n}\mathrm{C}_n}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\lim_{n\to\infty}J(n)=e^{-\frac{1}{12}}$$

［解 説］

微分を利用した不等式の証明と数列の極限の融合問題です。(1)から(2)への誘導はスムーズですが, (2)から(3)への誘導には飛躍が少しあります。やや難のレベルですが, 要演習の１題です。

$\boxed{7}$ ［京都大］

a を 1 より大きい定数とする。微分可能な関数 $f(x)$ が $f(a)=af(1)$ を満たすとき，曲線 $y=f(x)$ の接線で原点 $(0,\ 0)$ を通るものが存在することを示せ。

7 ［京都大］

$a>1$ のとき，微分可能な関数 $f(x)$ について，$f(a)=af(1)$ ………①

このとき，$x>0$ において，$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ と定義すると，

$$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}\ \cdots\cdots\cdots ②$$

さて，区間 $1\leqq x\leqq a$ において，平均値の定理より，

$$\frac{g(a)-g(1)}{a-1}=g'(c)\quad (1<c<a)\ \cdots\cdots\cdots ③$$

①②③から，$\dfrac{cf'(c)-f(c)}{c^2}=\dfrac{1}{a-1}\left\{\dfrac{f(a)}{a}-\dfrac{f(1)}{1}\right\}=\dfrac{f(a)-af(1)}{(a-1)a}=0$ となり，

$$cf'(c)-f(c)=0\ \cdots\cdots\cdots ④$$

ここで，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(c,\ f(c))$ における接線の方程式は，

$$y-f(c)=f'(c)(x-c),\quad y=f'(c)x-cf'(c)+f(c)\ \cdots\cdots\cdots ⑤$$

すると，接線⑤は，④から $y=f'(c)x$ となり，原点を通る。

［解 説］

発見的方法が要求される論証問題で，難度の高いものです。結論を導くための式④をみて，$g(x)$ を思いつくかどうかが問われています。

8 ［東京大］

α を正の実数とする。$0 \leqq \theta \leqq \pi$ における θ の関数 $f(\theta)$ を，座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(-\alpha,\ -3)$，$\mathrm{P}(\theta+\sin\theta,\ \cos\theta)$ 間の距離 AP の 2 乗として定める。

(1) $0<\theta<\pi$ の範囲に $f'(\theta)=0$ となる θ がただ 1 つ存在することを示せ。

(2) 以下が成り立つような α の範囲を求めよ。

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ における θ の関数 $f(\theta)$ は，区間 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のある点において最大になる。

8　　［東京大］

(1)　$\alpha>0$，$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，2 点 $\mathrm{A}(-\alpha,\ -3)$，$\mathrm{P}(\theta+\sin\theta,\ \cos\theta)$ に対して，

$$f(\theta)=\mathrm{AP}^2=(\theta+\sin\theta+\alpha)^2+(\cos\theta+3)^2$$

$$\begin{aligned}f'(\theta)&=2(\theta+\sin\theta+\alpha)(1+\cos\theta)+2(\cos\theta+3)(-\sin\theta)\\&=2(\theta+\sin\theta+\alpha)+2(\theta+\sin\theta+\alpha)\cos\theta-2\cos\theta\sin\theta-6\sin\theta\\&=2\theta+2(\theta+\alpha)\cos\theta-4\sin\theta+2\alpha\end{aligned}$$

$$f''(\theta)=2+2\cos\theta-2(\theta+\alpha)\sin\theta-4\cos\theta=2-2\cos\theta-2(\theta+\alpha)\sin\theta$$

$$f'''(\theta)=2\sin\theta-2\sin\theta-2(\theta+\alpha)\cos\theta=-2(\theta+\alpha)\cos\theta$$

すると，$0\leqq\theta\leqq\pi$ における $f''(\theta)$ の増減は右表のようになり，$f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<f''(0)=0$ から，$f''(\theta)=0$ となる θ はただ 1 つ存在し，これを $\theta=\beta$ とおくと，$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ である。

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'''(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f''(\theta)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	4

これより，$0\leqq\theta\leqq\pi$ における $f'(\theta)$ の増減は右表のようになり，$f'(\beta)<f'(\pi)=0$，$4\alpha>0$ から，$f'(\theta)=0$ となる θ はただ 1 つ存在する。

θ	0	$\cdots$	β	$\cdots$	π
$f''(\theta)$	0	$-$	0	$+$	
$f'(\theta)$	4α	$\searrow$		$\nearrow$	0

(2)　(1)より，$f'(\theta)=0$ となる θ を $\theta=\gamma$ とおくと，$0<\gamma<\beta$ である。

これより，$f(\theta)$ の増減は右表のようになり，$0\leqq\theta\leqq\pi$ において $f(\theta)$ が最大となるのは $\theta=\gamma$ のときである。

θ	0	$\cdots$	γ	$\cdots$	π
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	0
$f(\theta)$		$\nearrow$		$\searrow$	

すると，$0<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$ である条件は，$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<0$ となり，

$$2\cdot\frac{\pi}{2}-4+2\alpha<0,\ 2\alpha<4-\pi$$

よって，求める α の範囲は，$0<\alpha<2-\dfrac{\pi}{2}$ である。

［解　説］

微分と増減についての基本的な問題です。増減表を書きながらグラフをイメージすると，結論はスムーズに導けます。

$\boxed{9}$ ［大阪大］

次の問いに答えよ。

(1) a を実数とする。x についての方程式 $x-\tan x=a$ の実数解のうち，$|x|<\dfrac{\pi}{2}$ を満たすものがちょうど 1 個あることを示せ。

(2) 自然数 n に対し，$x-\tan x=n\pi$ かつ $|x|<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 x を x_n とおく。t を $|t|<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数とする。このとき，曲線 $C: y=\sin x$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \sin t)$ における接線が，不等式 $x \geqq \dfrac{\pi}{2}$ の表す領域に含まれる点においても曲線 C と接するための必要十分条件は，t が x_1，x_2，x_3，…のいずれかと等しいことであることを示せ。

9 ［大阪大］

(1)　方程式 $x-\tan x=a$ ……①に対して，$f(x)=x-\tan x$ とおくと，

$$f'(x)=1-\frac{1}{\cos^2 x}=-\tan^2 x$$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$		↘	0	↘	

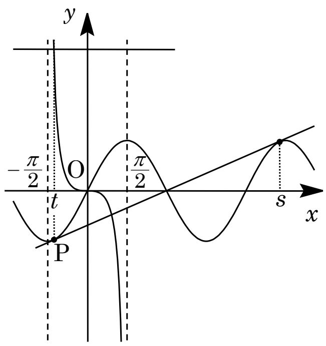
すると，$|x|<\frac{\pi}{2}$ における $f(x)$ の増減は右表のようになり，

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+0} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x)=-\infty$$

よって，実数 a に対し，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=a$ は，$|x|<\frac{\pi}{2}$ においてただ 1 つの共有点をもつ。すなわち，①の $|x|<\frac{\pi}{2}$ における実数解は 1 個である。

(2)　自然数 n に対し，$x-\tan x=n\pi$ かつ $|x|<\frac{\pi}{2}$ を満たすただ 1 つの実数 x を $x=x_n$ とおくと，

$$x_n-\tan x_n=n\pi\ \left(|x_n|<\frac{\pi}{2}\right)\cdots\cdots\cdots②$$



さて，$|t|<\frac{\pi}{2}$ において，曲線 $C: y=\sin x$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \sin t)$ における接線の方程式は，$y'=\cos x$ より，

$$y-\sin t=(\cos t)(x-t)$$

$$y=x\cos t-t\cos t+\sin t\cdots\cdots\cdots③$$

接線③が $x\geqq\frac{\pi}{2}$ で曲線 C と接するとき，その接点を $(s,\ \sin s)$ $\left(s\geqq\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，この点における接線の方程式は，

$$y=x\cos s-s\cos s+\sin s\cdots\cdots\cdots④$$

③と④が一致することより，

$$\cos t=\cos s\cdots\cdots\cdots⑤,\quad -t\cos t+\sin t=-s\cos s+\sin s\cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤より，$s\geqq\frac{\pi}{2}$ なので，n を自然数として $s=2n\pi\pm t$ となり，

(i)　$s=2n\pi+t$ のとき

⑥に代入して，$-t\cos t+\sin t=-(2n\pi+t)\cos(2n\pi+t)+\sin(2n\pi+t)$ となり，

$$-t\cos t+\sin t=-(2n\pi+t)\cos t+\sin t,\quad 2n\pi\cos t=0$$

すると，$|t|<\frac{\pi}{2}$ より成立しない。

(ii)　$s=2n\pi-t$ のとき

⑥に代入して，$-t\cos t+\sin t=-(2n\pi-t)\cos(2n\pi-t)+\sin(2n\pi-t)$ となり，

$$-t\cos t+\sin t=-(2n\pi-t)\cos t-\sin t,\quad 2(n\pi-t)\cos t+2\sin t=0$$

これより，$n\pi-t+\tan t=0$ となり，$t-\tan t=n\pi\cdots\cdots\cdots⑦$

すると，⑦の解は$|t|<\dfrac{\pi}{2}$にただ 1 つだけ存在し，②から$t=x_n$となる。

(i)(ii)より，tはx_1，x_2，x_3，…のいずれかと等しい。

逆に，ある自然数 n に対して$t=x_n\left(|t|<\dfrac{\pi}{2}\right)$のとき，点$\mathrm{P}(t,\ \sin t)$における曲線 C の接線は，$s=2n\pi-x_n\left(s\geqq\dfrac{\pi}{2}\right)$である点$(s,\ \sin s)$において接する。

［解 説］

微分法の応用問題です。(2)は，(1)との繋がりがわかりにくいのですが，数式処理をしていくと，$t=x_n$であることと曲線 C に複接線が存在することとの関係が見えてきます。

$\boxed{10}$ ［信州大］

以下の問いに答えよ。

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 x^4(1-x)^4\,dx$ を求めよ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx$ を求めよ。

(3) 不等式 $\dfrac{1}{1260} < \dfrac{22}{7} - \pi < \dfrac{1}{630}$ を示せ。

$\boxed{10}$ ［信州大］

(1) $x^4(1-x)^4 = x^4(1-4x+6x^2-4x^3+x^4) = x^4-4x^5+6x^6-4x^7+x^8$ より,

$$I=\int_0^1 x^4(1-x)^4dx=\int_0^1(x^4-4x^5+6x^6-4x^7+x^8)dx$$

$$=\Big[\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^6+\frac{6}{7}x^7-\frac{1}{2}x^8+\frac{1}{9}x^9\Big]_0^1=\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+\frac{6}{7}-\frac{1}{2}+\frac{1}{9}=\frac{1}{630}$$

(2) $\dfrac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}=\dfrac{x^8-4x^7+6x^6-4x^5+x^4}{x^2+1}=x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4-\dfrac{4}{x^2+1}$ より,

$$J=\int_0^1\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}dx=\int_0^1\Big(x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4-\frac{4}{x^2+1}\Big)dx$$

$$=\Big[\frac{1}{7}x^7-\frac{2}{3}x^6+x^5-\frac{4}{3}x^3+4x\Big]_0^1-4\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{7}-\frac{2}{3}+1-\frac{4}{3}+4-4\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\frac{22}{7}-4\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx$$

ここで, $x=\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$とおくと, $dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$となり,

$$\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\big[\theta\big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

よって, $J=\dfrac{22}{7}-4\cdot\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{22}{7}-\pi$ である。

(3) $0\leqq x\leqq 1$のとき, $\dfrac{1}{2}\leqq\dfrac{1}{1+x^2}\leqq 1$であり, $x^4(1-x)^4\geqq 0$なので,

$$\frac{1}{2}x^4(1-x)^4\leqq\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\leqq x^4(1-x)^4\cdots\cdots\cdots(*)$$

なお, 等号は$x=0$または$x=1$のときのみ成り立つ。

そこで, (*)の各辺を 0 から 1 まで積分すると,

$$\int_0^1\frac{1}{2}x^4(1-x)^4dx<\int_0^1\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}dx<\int_0^1x^4(1-x)^4dx$$

すると, $\dfrac{1}{2}I<J<I$から, $\dfrac{1}{1260}<\dfrac{22}{7}-\pi<\dfrac{1}{630}$となる。

［解 説］

定積分を利用した不等式の証明問題です。(1)(2)と(3)のつながりは定積分を実行すると, 次第に見えてきます。なお, Iについては部分積分を利用する方法もあります。

11　　［東北大］

以下の問いに答えよ。

(1)　正の実数 a と正の整数 n に対して次の等式が成り立つことを示せ。ただし，e は自然対数の底とする。

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x dx$$

(2)　正の実数 a と正の整数 n に対して次の不等式を示せ。

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \leqq \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x dx \leqq \frac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$$

(3)　不等式 $\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) \right| < 10^{-3}$ を満たす最小の正の整数 n を求めよ。

必要ならば $2 < e < 3$ であることは証明なしに用いてもよい。

11　　　　［東北大］

(1)　正の実数 a と正の整数 n に対して，$I_n=\displaystyle\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^x dx$ とおくと，

$$I_{n+1}=\int_0^a\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^x dx=\Big[\,\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^x\,\Big]_0^a+\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^x dx$$
$$=-\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}+I_n$$

これより，$I_{n+1}-I_n=-\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!}$ となり，$n\geqq 2$ において，

$$I_n=I_1+\sum_{k=1}^{n-1}-\frac{a^{k+1}}{(k+1)!}=I_1-\Big(\frac{a^2}{2!}+\frac{a^3}{3!}+\cdots+\frac{a^n}{n!}\Big)$$

$I_1=\displaystyle\int_0^a(a-x)e^x dx=\big[\,(a-x)e^x\big]_0^a+\int_0^a e^x dx=-a+e^a-1$ より，

$$I_n=-a+e^a-1-\Big(\frac{a^2}{2!}+\frac{a^3}{3!}+\cdots+\frac{a^n}{n!}\Big)=e^a-\Big(1+a+\frac{a^2}{2!}+\frac{a^3}{3!}+\cdots+\frac{a^n}{n!}\Big)$$

なお，$n=1$ を当てはめると，$I_1=e^a-(1+a)$ となり，成り立っている。

よって，$n\geqq 1$ において，$e^a=\Big(1+a+\dfrac{a^2}{2!}+\dfrac{a^3}{3!}+\cdots+\dfrac{a^n}{n!}\Big)+I_n$ より，

$$e^a=1+a+\frac{a^2}{2!}+\cdots+\frac{a^n}{n!}+\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^x dx\ \cdots\cdots\cdots①$$

(2)　$0\leqq x\leqq a$ において，$\dfrac{(a-x)^n}{n!}=\dfrac{(a-x)^n}{n!}e^0\leqq\dfrac{(a-x)^n}{n!}e^x\leqq\dfrac{(a-x)^n}{n!}e^a$ なので，

$$\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}dx\leqq\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^x dx\leqq e^a\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}dx$$

ここで，$\displaystyle\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}dx=\Big[-\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}\Big]_0^a=\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$ から，

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\leqq\int_0^a\frac{(a-x)^n}{n!}e^x dx\leqq\frac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}\ \cdots\cdots\cdots②$$

(3)　①に $a=1$ を代入すると，$e=1+1+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}+\displaystyle\int_0^1\frac{(1-x)^n}{n!}e^x dx$ となり，

$$\Big|e-\Big(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\Big)\Big|=\int_0^1\frac{(1-x)^n}{n!}e^x dx\ \cdots\cdots\cdots③$$

②に $a=1$ を代入すると，$\dfrac{1}{(n+1)!}\leqq\displaystyle\int_0^1\frac{(1-x)^n}{n!}e^x dx\leqq\frac{e}{(n+1)!}$ ………④

③④より，$\dfrac{1}{(n+1)!}\leqq\Big|e-\Big(1+1+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}\Big)\Big|\leqq\dfrac{e}{(n+1)!}$ ………⑤

ここで，$\Big|e-\Big(1+1+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}\Big)\Big|<10^{-3}$ ……(＊)であるには，$\dfrac{1}{(n+1)!}<10^{-3}$ が必要であり，

$$(n+1)!>10^3\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

ここで，$6!=720$，$7!=5040$ に注意すると，⑥より，

$$n+1\geqq 7,\ n\geqq 6$$

逆に，$n=6$ のとき，⑤から，$\left|e-\left(1+1+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{6!}\right)\right|\leqq\dfrac{e}{7!}=\dfrac{3}{5040}<10^{-3}$ となり，条件(＊)を満たす。

よって，求める最小の整数 n は $n=6$ である。

［解　説］

定積分と数列についての有名な問題です。(1)は漸化式を立てて直接的に証明しましたが，結論が与えられているので，数学的帰納法という手もあります。

$\boxed{12}$ ［大阪大］

n を自然数とし，t を $t \geqq 1$ を満たす実数とする。

(1) $x \geqq t$ のとき，不等式 $-\dfrac{(x-t)^2}{2} \leqq \log x - \log t - \dfrac{1}{t}(x-t) \leqq 0$ が成り立つことを示せ。

(2) 不等式 $-\dfrac{1}{6n^3} \leqq \displaystyle\int_t^{t+\frac{1}{n}} \log x\,dx - \dfrac{1}{n}\log t - \dfrac{1}{2tn^2} \leqq 0$ が成り立つことを示せ。

(3) $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \log\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$ とおく。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n - pn) = q$ を満たすような実数 p，q の値を求めよ。

12 ［大阪大］

(1) $t \geqq 1$ に対して，$x \geqq t$ のとき，$f(x) = \log x - \log t - \dfrac{1}{t}(x-t)$ とおくと，

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{t} = -\frac{x-t}{tx} \leqq 0$$

これより，$f(x)$ は単調に減少し，$f(x) \leqq f(t) = 0$ となり，

$$\log x - \log t - \frac{1}{t}(x-t) \leqq 0 \cdots\cdots\cdots ①$$

また，$x \geqq t$ のとき，$g(x) = \log x - \log t - \dfrac{1}{t}(x-t) + \dfrac{(x-t)^2}{2}$ とおくと，

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{t} + (x-t) = -\frac{x-t}{tx} + (x-t) = \frac{(x-t)(tx-1)}{tx} \geqq 0$$

これより，$g(x)$ は単調に増加し，$g(x) \geqq g(t) = 0$ となり，

$$-\frac{(x-t)^2}{2} \leqq \log x - \log t - \frac{1}{t}(x-t) \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$x \geqq t$ のとき，$-\dfrac{(x-t)^2}{2} \leqq \log x - \log t - \dfrac{1}{t}(x-t) \leqq 0 \cdots\cdots\cdots ③$

(2) まず, n を自然数とし, ③の各辺を t から $t + \dfrac{1}{n}$ まで積分すると,

$$-\int_t^{t+\frac{1}{n}} \frac{(x-t)^2}{2} dx \leqq \int_t^{t+\frac{1}{n}} \left\{ \log x - \log t - \frac{1}{t}(x-t) \right\} dx \leqq 0$$

ここで，$-\displaystyle\int_t^{t+\frac{1}{n}} \frac{(x-t)^2}{2} dx = -\frac{1}{6}\Big[(x-t)^3 \Big]_t^{t+\frac{1}{n}} = -\frac{1}{6n^3}$

$$\begin{aligned}\int_t^{t+\frac{1}{n}} \left\{ \log x - \log t - \frac{1}{t}(x-t) \right\} dx &= \int_t^{t+\frac{1}{n}} \log x\, dx - \Big[x \log t + \frac{1}{2t}(x-t)^2 \Big]_t^{t+\frac{1}{n}} \\ &= \int_t^{t+\frac{1}{n}} \log x\, dx - \frac{1}{n}\log t - \frac{1}{2tn^2}\end{aligned}$$

よって，$-\dfrac{1}{6n^3} \leqq \displaystyle\int_t^{t+\frac{1}{n}} \log x\, dx - \frac{1}{n}\log t - \frac{1}{2tn^2} \leqq 0 \cdots\cdots\cdots ④$

(3) $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \log\left(1 + \frac{k}{n}\right)$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n - pn) = q$ を満たすような実数 p, q が存在するには，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n}a_n - p\right) = q$ と変形すると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}a_n - p\right) = 0$ が必要であり，

$$p = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \log\left(1 + \frac{k}{n}\right) = \int_1^2 \log x\, dx = \Big[x\log x - x \Big]_1^2$$

$$= 2\log 2 - 1 \cdots\cdots\cdots ⑤$$

④より，$\displaystyle\int_t^{t+\frac{1}{n}} \log x\, dx - \frac{1}{2tn^2} \leqq \frac{1}{n}\log t \leqq \int_t^{t+\frac{1}{n}} \log x\, dx - \frac{1}{2tn^2} + \frac{1}{6n^3} \cdots\cdots\cdots ⑥$

ここで，$t = 1 + \dfrac{k}{n}$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ とし，k について⑥の各辺の和をとる。

まず，⑤から，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}}\log x\,dx=\int_1^2\log x\,dx=2\log 2-1=p$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\left(1+\frac{k}{n}\right)n^2}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\left(1+\frac{k}{n}\right)},\quad \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}a_n,\quad \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{6n^3}=\frac{1}{6n^2}$$

すると，⑥から，$\displaystyle p-\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\left(1+\frac{k}{n}\right)}\leqq\frac{1}{n}a_n\leqq p-\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\left(1+\frac{k}{n}\right)}+\frac{1}{6n^2}$ となり，

$$-\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\left(1+\frac{k}{n}\right)}\leqq\frac{1}{n}a_n-p\leqq-\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\left(1+\frac{k}{n}\right)}+\frac{1}{6n^2}$$

$$-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\left(1+\frac{k}{n}\right)}\leqq a_n-pn\leqq-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\left(1+\frac{k}{n}\right)}+\frac{1}{6n}\cdots\cdots\cdots⑦$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\left(1+\frac{k}{n}\right)}\right\}=-\int_1^2\frac{1}{2x}dx=-\frac{1}{2}\Big[\log x\Big]_1^2=-\frac{1}{2}\log 2$ より，⑦から，

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-pn)=-\frac{1}{2}\log 2$$

以上より，$p=2\log 2-1$，$q=-\dfrac{1}{2}\log 2$ である。

［解　説］

定積分と不等式に区分求積法が絡んだ阪大らしい問題です。(3)は，実数 p, q が存在するのを前提にして，必要条件から述べていく方法をとっています。

$\boxed{13}$ ［熊本大］

次の問いに答えよ。

(1) n を正の整数とするとき，定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left|\sin nx-\sin 2nx\right|dx$ を求めよ。

(2) c を正の数とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{c}\left|\sin nx-\sin 2nx\right|dx$ を求めよ。

$\boxed{13}$ ［熊本大］

(1) n が正の整数のとき，$I_n=\displaystyle\int_0^{2\pi}\left|\sin nx-\sin 2nx\right|dx$ に対して，$nx=t$ とおくと

$ndx=dt$ となり，

$$I_n=\int_0^{2n\pi}\left|\sin t-\sin 2t\right|\cdot\frac{1}{n}dt=\frac{1}{n}\int_0^{2n\pi}\left|\sin t-\sin 2t\right|dt\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，積分区間を分割すると，$I_n=\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi}\left|\sin t-\sin 2t\right|dt$

そこで，$J_k=\displaystyle\int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi}\left|\sin t-\sin 2t\right|dt$ とおき，また $s=t-2(k-1)\pi$ と変数変換すると $ds=dt$ から，

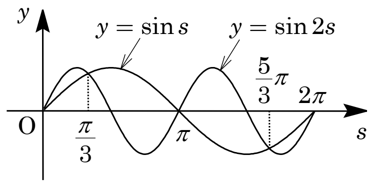
$$J_k=\int_0^{2\pi}\left|\sin\left(s+2(k-1)\pi\right)-\sin\left(2s+4(k-1)\pi\right)\right|ds$$

$$=\int_0^{2\pi}\left|\sin s-\sin 2s\right|ds$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}-(\sin s-\sin 2s)ds+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(\sin s-\sin 2s)ds$$

$$+\int_{\pi}^{\frac{5}{3}\pi}-(\sin s-\sin 2s)ds+\int_{\frac{5}{3}\pi}^{2\pi}(\sin s-\sin 2s)ds$$

さらに，$u=2\pi-s$ とおくと $du=-ds$ から，



$$\int_{\pi}^{\frac{5}{3}\pi}-(\sin s-\sin 2s)ds$$

$$=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{3}}-\{\sin(2\pi-u)-\sin(4\pi-2u)\}(-du)$$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}-(-\sin u+\sin 2u)du=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(\sin u-\sin 2u)du$$

$$\int_{\frac{5}{3}\pi}^{2\pi}(\sin s-\sin 2s)ds=\int_{\frac{\pi}{3}}^{0}\{\sin(2\pi-u)-\sin(4\pi-2u)\}(-du)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(-\sin u+\sin 2u)du=\int_0^{\frac{\pi}{3}}-(\sin u-\sin 2u)du$$

したがって，$J_k=2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}-(\sin s-\sin 2s)ds+2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(\sin s-\sin 2s)ds$ となり，

$$J_k=2\Big[\cos s-\frac{1}{2}\cos 2s\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}-2\Big[\cos s-\frac{1}{2}\cos 2s\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$

$$=2\Big(\frac{1}{2}-1\Big)-\Big(-\frac{1}{2}-1\Big)-2\Big(-1-\frac{1}{2}\Big)+\Big(1+\frac{1}{2}\Big)=-1+\frac{3}{2}+3+\frac{3}{2}=5$$

よって，$I_n=\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}J_k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}5=\frac{1}{n}\cdot 5n=5$

(2)　$c>0$ のとき，$K_n=\displaystyle\int_0^c\left|\sin nx-\sin 2nx\right|dx$ に対して，(1)と同様に $nx=t$ とおく。

$$K_n=\frac{1}{n}\int_0^{cn}\left|\sin t-\sin 2t\right|dt\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，十分に大きな n に対して，$2m\pi\leqq cn<2(m+1)\pi$ ……③を満たす正の整数 m が存在するので，

$$\int_0^{2m\pi}\left|\sin t-\sin 2t\right|dt\leqq\int_0^{cn}\left|\sin t-\sin 2t\right|dt<\int_0^{2(m+1)\pi}\left|\sin t-\sin 2t\right|dt$$

①②より，$mI_m\leqq nK_n<(m+1)I_{m+1}$ となり，(1)から $I_m=I_{m+1}=5$ なので，

$$5m\leqq nK_n<5(m+1)\,,\ \ \frac{5m}{n}\leqq K_n<\frac{5(m+1)}{n}=\frac{5m}{n}+\frac{5}{n}\cdots\cdots\cdots④$$

そして，③から，$\dfrac{m}{n}\leqq\dfrac{c}{2\pi}$ かつ $\dfrac{c}{2\pi}<\dfrac{m+1}{n}=\dfrac{m}{n}+\dfrac{1}{n}$ となるので，

$$\frac{c}{2\pi}-\frac{1}{n}<\frac{m}{n}\leqq\frac{c}{2\pi}\,,\ \ \frac{5c}{2\pi}-\frac{5}{n}<\frac{5m}{n}\leqq\frac{5c}{2\pi}$$

すると，④より，$\dfrac{5c}{2\pi}-\dfrac{5}{n}<K_n<\dfrac{5c}{2\pi}+\dfrac{5}{n}$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^c\left|\sin nx-\sin 2nx\right|dx=\lim_{n\to\infty}K_n=\frac{5c}{2\pi}$$

［解　説］

有名な定積分の計算問題です。ポイントは周期性の利用で，積分区間を分割し，グラフを参考にしながら計算を進めますが，時間的には非常に厳しいものがあります。

14　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［大阪市大］

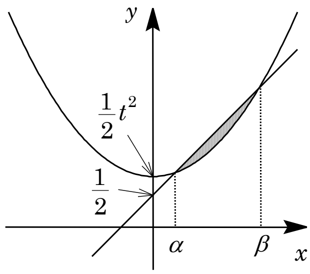
xyz 空間の中で，方程式 $y=\dfrac{1}{2}(x^2+z^2)$ で表される図形は，放物線を y 軸のまわりに回転して得られる曲面である。これを S とする。また，方程式 $y=x+\dfrac{1}{2}$ で表される図形は, xz 平面と 45 度の角度で交わる平面である。これを H とする。さらに, S と H が囲む部分を K とおくと, K は不等式 $\dfrac{1}{2}(x^2+z^2)\leqq y\leqq x+\dfrac{1}{2}$ を満たす点 $(x,\ y,\ z)$ の全体となる。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　K を平面 $z=t$ で切ったときの切り口が空集合でないような実数 t の範囲を求めよ。

(2)　(1)の切り口の面積 $S(t)$ を t を用いて表せ。

(3)　K の体積を求めよ。

14 ［大阪市大］



(1) 立体 $K:\frac{1}{2}(x^2+z^2)\leqq y\leqq x+\frac{1}{2}$ を平面 $z=t$ で切ったときの切り口は,

$$\frac{1}{2}(x^2+t^2)\leqq y\leqq x+\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots①$$

この切り口が存在する条件は, $\frac{1}{2}(x^2+t^2)\leqq x+\frac{1}{2}$ を満たす x が存在することより,

$$x^2+t^2\leqq 2x+1,\ x^2-2x+t^2-1\leqq 0\cdots\cdots\cdots②$$

②の解が存在するのは, $x^2-2x+t^2-1=0\cdots\cdots③$が実数解をもつことに対応し,

$$D/4=1-(t^2-1)=2-t^2\geqq 0$$

よって, $t^2-2\leqq 0$ から, $-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ となる。

(2) $-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ のとき, ③の解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha\leqq\beta)$ とおくと,

$$\alpha=1-\sqrt{2-t^2},\ \beta=1+\sqrt{2-t^2}$$

そこで, ①で表される切り口の面積を $S(t)$ とすると,

$$S(t)=\int_\alpha^\beta\Big\{x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(x^2+t^2)\Big\}dx=-\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta(x^2-2x+t^2-1)dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{6}\Big)(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{12}\big(2\sqrt{2-t^2}\big)^3$$

$$=\frac{2}{3}\big(\sqrt{2-t^2}\big)^3=\frac{2}{3}(2-t^2)^{\frac{3}{2}}$$

(3) K の体積 V は, $S(-t)=S(t)$ に注意すると,

$$V=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}S(t)dt=2\int_0^{\sqrt{2}}S(t)dt=\frac{4}{3}\int_0^{\sqrt{2}}\big(\sqrt{2-t^2}\big)^3dt$$

ここで, $t=\sqrt{2}\sin\theta\ \Big(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\Big)$ とおくと, $dt=\sqrt{2}\cos\theta d\theta$ となり,

$$V=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(\sqrt{2-2\sin^2\theta}\big)^3\cdot\sqrt{2}\cos\theta d\theta=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta$$

$$=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\frac{1+\cos2\theta}{2}\Big)^2d\theta=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos2\theta+\cos^22\theta)d\theta$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(1+2\cos2\theta+\frac{1+\cos4\theta}{2}\Big)d\theta=\frac{4}{3}\Big[\frac{3}{2}\theta+\sin2\theta+\frac{1}{8}\sin4\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\pi$$

［解 説］

立体の体積を求める標準題です。問題文に丁寧な図形的説明がついています。

15　［神戸大］

座標平面上を運動する点 P$(x,\ y)$ の時刻 t における座標が

$$x=\frac{4+5\cos t}{5+4\cos t},\quad y=\frac{3\sin t}{5+4\cos t}$$

であるとき，以下の問いに答えよ。

(1)　点 P と原点 O との距離を求めよ。

(2)　点 P の時刻 t における速度 $\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ と速さ $|\vec{v}|$ を求めよ。

(3)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{dt}{5+4\cos t}$ を求めよ。

$\boxed{15}$ ［神戸大］

(1) 時刻 t において，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が $x=\dfrac{4+5\cos t}{5+4\cos t}$，$y=\dfrac{3\sin t}{5+4\cos t}$ で表されるとき，

$$x^2+y^2=\frac{1}{(5+4\cos t)^2}\{(4+5\cos t)^2+9\sin^2 t\}$$
$$=\frac{1}{(5+4\cos t)^2}\{16+40\cos t+25\cos^2 t+9(1-\cos^2 t)\}$$
$$=\frac{1}{(5+4\cos t)^2}(16\cos^2 t+40\cos t+25)=\frac{(4\cos t+5)^2}{(5+4\cos t)^2}=1$$

よって，$\mathrm{OP}=1$ である。

(2) $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{-5\sin t(5+4\cos t)-(4+5\cos t)\cdot(-4\sin t)}{(5+4\cos t)^2}=\dfrac{-9\sin t}{(5+4\cos t)^2}$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{3\cos t(5+4\cos t)-3\sin t\cdot(-4\sin t)}{(5+4\cos t)^2}=\frac{3(4+5\cos t)}{(5+4\cos t)^2}$$

これより，$\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)=\left(\dfrac{-9\sin t}{(5+4\cos t)^2},\ \dfrac{3(4+5\cos t)}{(5+4\cos t)^2}\right)$ となり，

$$|\vec{v}|^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\frac{9}{(5+4\cos t)^4}\{9\sin^2 t+(4+5\cos t)^2\}$$
$$=\frac{9}{(5+4\cos t)^4}(4\cos t+5)^2=\frac{9}{(5+4\cos t)^2}$$

よって，$|\vec{v}|=\dfrac{3}{5+4\cos t}$ である。

(3) $I=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{dt}{5+4\cos t}$ とおくと，(2)から，$I=\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^{\pi}|\vec{v}|dt$ となる。

ここで，$0\leqq t\leqq\pi$ における点 P の軌跡は，(1)から，中心が原点で半径 1 の円弧である。

(2)から，x, y の増減について，$4+5\cos\alpha=0$ $\left(\cos\alpha=-\dfrac{4}{5},\ \sin\alpha=\dfrac{3}{5}\right)$ を満たす α を用いると，右表のようになる。

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	π
$\dfrac{dx}{dt}$	0	$-$		$-$	0
x	1	↘	0	↘	-1
$\dfrac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	
y	0	↗	1	↘	0

これより，点 P の軌跡は，半円 $x^2+y^2=1$ $(y\geqq 0)$ となるので，その弧の長さが $\displaystyle\int_0^{\pi}|\vec{v}|dt=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot 1=\pi$ から，

$$I=\frac{1}{3}\cdot\pi=\frac{\pi}{3}$$

［解 説］

パラメータ曲線に定積分の計算を絡めた問題です。意味を考えながら計算を進めていくと，計算の海に溺れることはないでしょう。