1　［広島大・理］

座標平面上の曲線 $y=x^3+x^2$ を C とする。また，a を実数とし，L_a を点 $(-1,\ 0)$ を通る傾き a の直線とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) C と L_a がちょうど 2 つの共有点をもつような a の値をすべて求めよ。

(2) a が(1)の条件を満たすそれぞれの場合について，C と L_a で囲まれた部分の面積を求めよ。

(3) C と L_a がちょうど 3 つの共有点をもち，さらに C と L_a で囲まれた 2 つの部分の面積の差の絶対値が $\dfrac{3}{2}$ となるとき，a の値を求めよ。

1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［広島大・理］

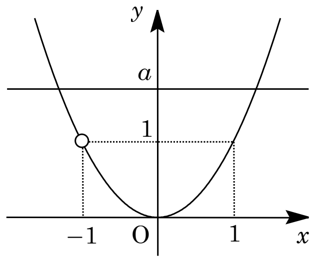
(1)　$C: y=x^3+x^2$ と点 $(-1,\ 0)$ を通る傾き a の直線 $L_a: y=a(x+1)$ を連立して,

$$x^3+x^2=a(x+1),\ (x+1)(x^2-a)=0$$

これより，$x=-1$ または $x^2=a$ となる。

ここで, C と L_a が 2 つの共有点をもつのは，$x^2=a$ が $x\neq-1$ である解を 1 つもつことに対応する。

すなわち，曲線 $y=x^2\ (x\neq-1)$ と直線 $y=a$ が 1 つの共有点をもつことより，$a=0$ または $a=1$ である。



(2)　C と L_a が 2 つの共有点をもつとき，C と L_a で囲まれた部分の面積 S は,

(i)　$a=0$ のとき　$L_0: y=0$ より,

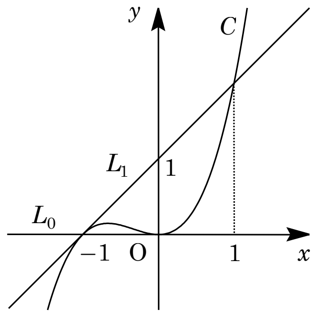
$$S=\int_{-1}^{0}(x^3+x^2)dx=\Big[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{0}$$

$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$$

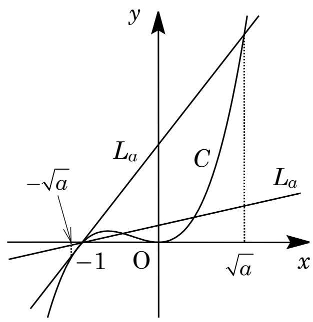
(ii)　$a=1$ のとき　$L_1: y=x+1$ より,

$$S=\int_{-1}^{1}(x+1-x^3-x^2)dx=2\int_{0}^{1}(1-x^2)dx$$

$$=2\Big[x-\frac{x^3}{3}\Big]_0^1=2\Big(1-\frac{1}{3}\Big)=\frac{4}{3}$$



(3)　C と L_a が 3 つの共有点をもつのは，$x^2=a$ が $x\neq-1$ である解を 2 つもつことに対応するので，$0<a<1$ または $a>1$ である。そして，このとき共有点の x 座標は，$x=-1,\ \pm\sqrt{a}$ となる。



(i)　$0<a<1$ のとき

$-1<-\sqrt{a}<\sqrt{a}$ より，C と L_a で囲まれた部分の面積のうち，$-1\leqq x\leqq-\sqrt{a}$ の部分を S_1，$-\sqrt{a}\leqq x\leqq\sqrt{a}$ の部分を S_2 とおくと，(2)から，$0<S_1<\dfrac{1}{12}$，$0<S_2<\dfrac{4}{3}$ となるので,

$$|S_1-S_2|<\frac{4}{3}<\frac{3}{2}$$

これより，$|S_1-S_2|=\dfrac{3}{2}$ となる a は存在しない。

(ii)　$a>1$ のとき

$-\sqrt{a}<-1<\sqrt{a}$ より, C と L_a で囲まれた部分の面積のうち，$-\sqrt{a}\leqq x\leqq-1$ の部分を S_1，$-1\leqq x\leqq\sqrt{a}$ の部分を S_2 とおくと,

$$S_1-S_2=\int_{-\sqrt{a}}^{-1}(x^3+x^2-ax-a)\,dx-\int_{-1}^{\sqrt{a}}(ax+a-x^3-x^2)\,dx$$
$$=\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}(x^3+x^2-ax-a)\,dx=2\int_0^{\sqrt{a}}(x^2-a)\,dx$$
$$=2\Big[\frac{x^3}{3}-ax\Big]_0^{\sqrt{a}}=\frac{2}{3}a\sqrt{a}-2a\sqrt{a}=-\frac{4}{3}a\sqrt{a}$$

$|S_1-S_2|=\dfrac{3}{2}$より$\dfrac{4}{3}a\sqrt{a}=\dfrac{3}{2}$となり，$(\sqrt{a})^3=\dfrac{9}{8}$すなわち$\sqrt{a}=\dfrac{\sqrt[3]{3^2}}{2}$である。

よって，$a=\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{3}$となり，この値は$a>1$を満たしている。

［解 説］

定積分と面積の問題です。(3)の(i)の場合の処理に(2)の結果を利用する点がポイントとなっています。初めは力づくの処理を試みましたが。

2　［東京大・理］

座標平面上の曲線 $C: y = x^3 - x$ を考える。

(1) 座標平面上のすべての点Pが次の条件(i)を満たすことを示せ。

(i) 点Pを通る直線 l で，曲線 C と相異なる3点で交わるものが存在する。

(2) 次の条件(ii)を満たす点Pのとりうる範囲を座標平面上に図示せよ。

(ii) 点Pを通る直線 l で，曲線 C と相異なる3点で交わり，かつ，直線 l と曲線 C で囲まれた2つの部分の面積が等しくなるものが存在する。

2 ［東京大・理］

(1) 曲線$C: y=x^3-x$ ……①に対し，点$\mathrm{P}(a,\ b)$を通る傾きmの直線lの方程式は，

$$l: y-b=m(x-a),\ y=mx-ma+b \text{ ………②}$$

①②を連立して，$x^3-x=mx-ma+b$，$x^3-(m+1)x+ma-b=0$ ………③

さて，$f(x)=x^3-(m+1)x+ma-b$とおくと，$f'(x)=3x^2-(m+1)$

ここで，$m+1>0$ $(m>-1)$ のもとで$k=\sqrt{\dfrac{m+1}{3}}$とおくと，$f(x)$の増減は右表のようになり，

x	$\cdots$	$-k$	$\cdots$	k	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$f(-k)=\frac{2(m+1)}{3}\sqrt{\frac{m+1}{3}}+ma-b,\ f(k)=-\frac{2(m+1)}{3}\sqrt{\frac{m+1}{3}}+ma-b$$

すると，$k^2=\dfrac{m+1}{3}$から，$m=3k^2-1$となり，

$$f(-k)=2k^3+3ak^2-a-b,\ f(k)=-2k^3+3ak^2-a-b$$

これより，十分に大きなmに対してkも十分に大きくなり，このとき任意のa, bに対し$f(-k)>0$かつ$f(k)<0$であるので，$f(x)=0$すなわち③は相異なる 3 実数解をもつ。

言い換えると，どんな点Pに対しても，点Pを通る直線lで曲線Cと相異なる3点で交わるものが存在する。

(2) ③の3つの実数解を$x=\alpha,\ \beta,\ \gamma\ (\alpha<\beta<\gamma)$とおくと，

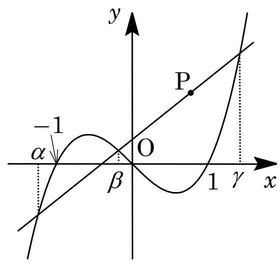
$$\alpha+\beta+\gamma=0,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-(m+1),\ -\alpha\beta\gamma=ma-b$$

これより$\beta=-\alpha-\gamma$となり，$-(m+1)=-(\alpha+\gamma)^2+\gamma\alpha=-\alpha^2-\alpha\gamma-\gamma^2$

$$m+1=\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2 \text{ ……④},\ ma-b=-\alpha\gamma(-\alpha-\gamma)=\alpha\gamma(\alpha+\gamma) \text{ ……⑤}$$

ここで，条件より，

$$\int_\alpha^\beta\{x^3-(m+1)x+ma-b\}dx$$
$$=-\int_\beta^\gamma\{x^3-(m+1)x+ma-b\}dx$$



よって，$\displaystyle\int_\alpha^\gamma\{x^3-(m+1)x+ma-b\}dx=0$

④⑤を代入すると，$\displaystyle\int_\alpha^\gamma\{x^3-(\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2)x+\alpha\gamma(\alpha+\gamma)\}dx=0$となり，

$$\Big[\frac{1}{4}x^4-\frac{\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2}{2}x^2+\alpha\gamma(\alpha+\gamma)x\Big]_\alpha^\gamma=0$$

$$\frac{1}{4}(\gamma^4-\alpha^4)-\frac{\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2}{2}(\gamma^2-\alpha^2)+\alpha\gamma(\alpha+\gamma)(\gamma-\alpha)=0$$

$\alpha<\gamma$から，$(\gamma^2+\alpha^2)(\gamma+\alpha)-2(\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2)(\gamma+\alpha)+4\alpha\gamma(\alpha+\gamma)=0$

$$(\alpha+\gamma)\{(\gamma^2+\alpha^2)-2(\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2)+4\alpha\gamma\}=0,\ (\alpha+\gamma)(\gamma-\alpha)^2=0$$

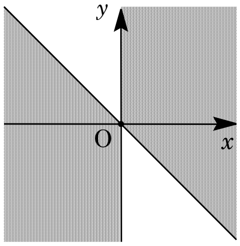
$\alpha<\gamma$ から $\alpha+\gamma=0$ となり，$\alpha<0<\gamma$ のもとで，⑤⑥から，

$$m=\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2-1=\alpha(\alpha+\gamma)+\gamma^2-1=\gamma^2-1,\ ma-b=0 \cdots\cdots\cdots⑥$$

よって，②より，$l: y=(\gamma^2-1)x$ である。

このとき，③は $x^3-\gamma^2x=0$ から，$x(x-\gamma)(x+\gamma)=0$ となり，$\gamma>0$ から $x=0,\ \pm\gamma$ という異なる 3 実数解をもつ。

すると，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ のとりうる範囲は，⑥より $ma-b=0$ $(m=\gamma^2-1>-1)$ に注意すると，右図の網点部となる。



ただし，原点以外の境界は含まない。

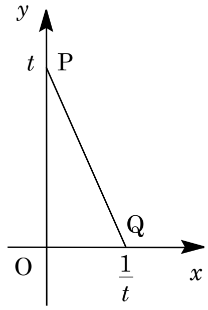
［解 説］

3 次曲線を題材にした記述しにくい問題です。(1)は明らかとも思えることを証明するものですが，極大値，極小値の符号の示し方は難しいところです。また，(2)は題意を満たすのが原点を通る直線となり，予測通りの結果が得られますが……。

3　　　　［大阪大・理］

正の実数 t に対し，座標平面上の 2 点 $\mathrm{P}(0,\ t)$ と $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{t},\ 0\right)$ を考える。t が $1 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動くとき，座標平面内で線分 PQ が通過する部分を図示せよ。

3　　　　　　　　［大阪大・理］



$t>0$ のとき，2 点 $\mathrm{P}(0,\ t)$，$\mathrm{Q}\left(\frac{1}{t},\ 0\right)$ を端点とする線分の方程式は，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ のもとで，

$$tx+\frac{y}{t}=1,\ t^2x+y=t\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，t が $1\leqq t\leqq 2$ の範囲を動くとき，線分 PQ が通過する点 $(x,\ y)$ は，$(*)$を t についての方程式としてみたとき，$1\leqq t\leqq 2$ に解を少なくとも１つもつ条件として得られる。

$(*)$から，$xt^2-t+y=0$ となり，$f(t)=xt^2-t+y$ とおくと，

(i)　$x=0$ のとき

$f(t)=-t+y$ となり，$f(t)=0$ から $t=y$ なので，$1\leqq y\leqq 2$ である。

(ii)　$x>0$ のとき

$f(t)=x\left(t-\frac{1}{2x}\right)^2-\frac{1}{4x}+y$ から $f\left(\frac{1}{2x}\right)=-\frac{1}{4x}+y$ であり，また $f(1)=x-1+y$，$f(2)=4x-2+y$ となるので，$t=\frac{1}{2x}$ と $1\leqq t\leqq 2$ の関係から，

(ii-i)　$\frac{1}{2x}<1\left(x>\frac{1}{2}\right)$ のとき

$f(t)=0$ の解が $1\leqq t\leqq 2$ に少なくとも１つある条件は，

$$f(1)\leqq 0\ \text{ かつ }\ f(2)\geqq 0$$

よって，$x-1+y\leqq 0$ かつ $4x-2+y\geqq 0$ から，$-4x+2\leqq y\leqq -x+1$

(ii-ii)　$1\leqq\frac{1}{2x}\leqq 2\left(\frac{1}{4}\leqq x\leqq\frac{1}{2}\right)$ のとき

$f(t)=0$ の解が $1\leqq t\leqq 2$ に少なくとも１つある条件は，

$$f\left(\frac{1}{2x}\right)\leqq 0\ \text{ かつ（}f(1)\geqq 0\text{ または }f(2)\geqq 0\text{）}$$

よって，$-\frac{1}{4x}+y\leqq 0$ かつ（$x-1+y\geqq 0$ または $4x-2+y\geqq 0$）から，

$$y\leqq\frac{1}{4x}\text{ かつ（}y\geqq -x+1\text{ または }y\geqq -4x+2\text{）}$$

(ii-iii)　$\frac{1}{2x}>2\left(0<x<\frac{1}{4}\right)$ のとき

$f(t)=0$ の解が $1\leqq t\leqq 2$ に少なくとも１つある条件は，

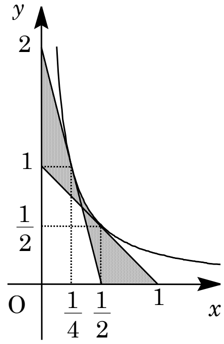
$$f(1)\geqq 0\ \text{ かつ }\ f(2)\leqq 0$$

よって，$x-1+y\geqq 0$ かつ $4x-2+y\leqq 0$ から，

$$-x+1\leqq y\leqq -4x+2$$

(i)(ii)より，線分 PQ の動く範囲は右図の網点部である。

ただし，境界は領域に含む。



［解 説］

線分の通過領域の問題です。上の解答例は，方程式の解の配置として処理をしましたが，たとえばxを固定してyのとりうる範囲を調べるという方法もあります。

4　　［東京工大］

α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数とする。$\angle\mathrm{A}=\alpha$ および $\angle\mathrm{P}=\dfrac{\pi}{2}$ を満たす直角三角形 APB が，次の 2 つの条件(a)，(b)を満たしながら，時刻 $t=0$ から時刻 $t=\dfrac{\pi}{2}$ まで xy 平面上を動くとする。

(a)　時刻 t での点 A, B の座標は，それぞれ $\mathrm{A}(\sin t,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ \cos t)$ である。

(b)　点 P は第 1 象限内にある。

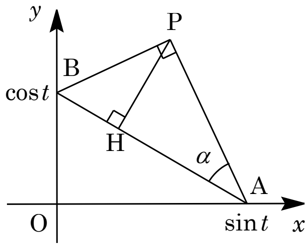
このとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 P はある直線上を動くことを示し，その直線の方程式を α を用いて表せ。

(2)　時刻 $t=0$ から時刻 $t=\dfrac{\pi}{2}$ までの間に点 P が動く道のりを α を用いて表せ。

(3)　xy 平面内において，連立不等式 $x^2-x+y^2<0$，$x^2+y^2-y<0$ により定まる領域を D とする。このとき，点 P は領域 D には入らないことを示せ。

４　　［東京工大］



(1)　点 $\mathrm{A}(\sin t,\ 0)$，点 $\mathrm{B}(0,\ \cos t)$，第 1 象限内の点 P に対し，$\angle\mathrm{A}=\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\angle\mathrm{P}=\dfrac{\pi}{2}$ である直角三角形 APB について，$\mathrm{AB}=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}=1$ から，

$$\mathrm{AP}=\mathrm{AB}\cos\alpha=\cos\alpha$$

ここで，点 P から辺 AB に垂線を引き，辺 AB との交点を H とおくと，

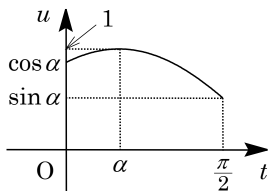
$$\mathrm{AH}=\mathrm{AP}\cos\alpha=\cos^2\alpha,\quad \mathrm{PH}=\mathrm{AP}\sin\alpha=\sin\alpha\cos\alpha$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-\sin t,\ \cos t)$ から，直線 AB の法線ベクトルを $\vec{n}=(\cos t,\ \sin t)$ とすることができ，$|\vec{n}|=1$ に注意すると，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AH}}+\overrightarrow{\mathrm{HP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(\cos^2\alpha)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(\sin\alpha\cos\alpha)\vec{n}\\&=(\sin t,\ 0)+\cos^2\alpha(-\sin t,\ \cos t)+\sin\alpha\cos\alpha(\cos t,\ \sin t)\\&=(\sin^2\alpha\sin t+\sin\alpha\cos\alpha\cos t,\ \cos^2\alpha\cos t+\sin\alpha\cos\alpha\sin t)\\&=\big(\sin\alpha(\sin\alpha\sin t+\cos\alpha\cos t),\ \cos\alpha(\cos\alpha\cos t+\sin\alpha\sin t)\big)\\&=\big(\sin\alpha\cos(t-\alpha),\ \cos\alpha\cos(t-\alpha)\big)=\cos(t-\alpha)(\sin\alpha,\ \cos\alpha)\end{aligned}$$

これより，$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，$x=\cos(t-\alpha)\sin\alpha$，$y=\cos(t-\alpha)\cos\alpha$

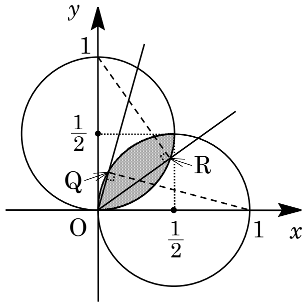
すると，$x\cos\alpha-y\sin\alpha=0$ ……(＊)となり，点 P は直線上を動く。



(2)　$t=0\to t=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$u=\cos(t-\alpha)$ のグラフは右図のようになり，点 P は直線(＊)上を，$\cos\alpha(\sin\alpha,\ \cos\alpha)\to(\sin\alpha,\ \cos\alpha)\to\sin\alpha(\sin\alpha,\ \cos\alpha)$ と動く。

これより，点 P が動く道のり L は，

$$\begin{aligned}L&=|1-\cos\alpha|\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}+|\sin\alpha-1|\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}\\&=(1-\cos\alpha)-(\sin\alpha-1)=2-\cos\alpha-\sin\alpha\end{aligned}$$



(3)　連立不等式 $x^2-x+y^2<0$，$x^2+y^2-y<0$ に対し，

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2<\frac{1}{4},\quad x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2<\frac{1}{4}$$

すると，この連立不等式で表される領域 D は右図の網点部となる。ただし，境界は含まない。

また，(＊)は $y=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}x=\dfrac{1}{\tan\alpha}x=x\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$ となり，原点を通り y 軸とのなす角が α の直線を表す。

そして，この直線上を動く点 P と原点 O との距離 OP は，(2)から，

$$\mathrm{OP}=\cos\alpha\ \to\ \mathrm{OP}=1\ \to\ \mathrm{OP}=\sin\alpha\ \cdots\cdots\cdots(＊＊)$$

(i)　$0 < \alpha \leqq \dfrac{\pi}{4}$ のとき

直線(＊)と円 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$ の原点以外の交点を Q とすると，

$$\mathrm{OQ}=1\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$$

このとき，$\cos\alpha \geqq \sin\alpha$ なので，(＊＊)から $\mathrm{OP} \geqq \mathrm{OQ}$ となり，点 P は領域 D には入らない。

(ii)　$\dfrac{\pi}{4} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

直線(＊)と円 $x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$ の原点以外の交点を R とすると，

$$\mathrm{OR}=1\cdot\cos\alpha=\cos\alpha$$

このとき，$\sin\alpha > \cos\alpha$ なので，(＊＊)から $\mathrm{OP} > \mathrm{OR}$ となり，点 P は領域 D には入らない。

［解　説］

軌跡と領域に関する問題です。(1)はいろいろな方法が考えられますが，解答例では直線 AB の法線ベクトルに注目して点 P の座標を求めています。なお，(2)は(3)の巧みな誘導になっています。

$\boxed{5}$ ［北海道大・文］

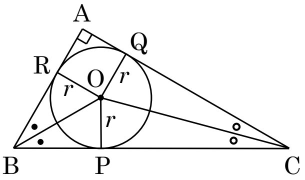
$\angle A = 90°$，$\angle B = 60°$ である直角三角形 ABC において，その内接円の中心を O，半径を r とおく。また $a = BC$ とする。

(1) r を a で表せ。

(2) 次の条件をみたす負でない整数 k, l, m, n の組を 1 つ求めよ。

$$OA : OB = 1 : k + \sqrt{l}\ ,\ \ OA : OC = 1 : m + \sqrt{n}$$

5　　　　［北海道大・文］



(1)　$\angle A=90°$，$\angle B=60°$，$a=BC$ である直角三角形 ABC において，

$$AB=a\cos 60°=\frac{a}{2},\ CA=a\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

ここで，△ABC の内接円の中心を O，半径を r とし，内接円と辺 BC, CA, AB との接点をそれぞれ P, Q, R とおく。このとき，四角形 AROQ は正方形となるので，$AR=AQ=r$ より，

$$BP=BR=\frac{a}{2}-r,\ CP=CQ=\frac{\sqrt{3}}{2}a-r$$

よって，$\left(\frac{a}{2}-r\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a-r\right)=a$ から，$r=\frac{\sqrt{3}-1}{4}a$ となる。

(2)　(1)より，$OA=\sqrt{2}r=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}a$ となり，条件より，負でない整数 $k,\ l,\ m,\ n$ に対して，$OA:OB=1:k+\sqrt{l}$，$OA:OC=1:m+\sqrt{n}$ から，

$$OB=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}(k+\sqrt{l})a\cdots\cdots\cdots①,\ OC=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}(m+\sqrt{n})a\cdots\cdots\cdots②$$

さて，$BP=\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{3}-1}{4}a=\frac{3-\sqrt{3}}{4}a$ となり，

$$OB=\frac{BP}{\cos\angle PBO}=\frac{BP}{\cos 30°}=\frac{2}{\sqrt{3}}BP=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{4}a=\frac{\sqrt{3}-1}{2}a\cdots\cdots\cdots③$$

①③より，$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}(k+\sqrt{l})a=\frac{\sqrt{3}-1}{2}a$ となり，

$$k+\sqrt{l}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

すると，k, l は負でない整数より，$k=0$，$l=2$ で成り立つ。

同様に，$CP=a-\frac{3-\sqrt{3}}{4}a=\frac{1+\sqrt{3}}{4}a$ から，$OC=\frac{CP}{\cos\angle PCO}=\frac{CP}{\cos 15°}$ となり，ここで，$\cos 15°=\cos(60°-45°)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ から，

$$OC=\frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}CP=\frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{4}a=\frac{1}{\sqrt{2}}a=\frac{\sqrt{2}}{2}a\cdots\cdots\cdots④$$

②④より，$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}(m+\sqrt{n})a=\frac{\sqrt{2}}{2}a$ となり，

$$m+\sqrt{n}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$$

すると，m, n は負でない整数より，$m=1$，$n=3$ で成り立つ。

以上より，$(k,\ l,\ m,\ n)=(0,\ 2,\ 1,\ 3)$ が求める１つの組である。

［解 説］

直角三角形の内接円という有名な題材に，整数を絡めた標準的な問題です。

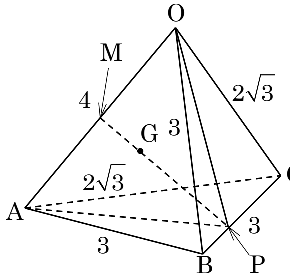
6 ［京都大］

四面体 OABC が，$OA=4$，$OB=AB=BC=3$，$OC=AC=2\sqrt{3}$ を満たしているとする。P を辺 BC 上の点とし，$\triangle OAP$ の重心を G とする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{PG}\perp\overrightarrow{OA}$ を示せ。

(2) P が辺 BC 上を動くとき，PG の最小値を求めよ。

$\boxed{6}$ ［京都大］



(1) $\mathrm{OA}=4$, $\mathrm{OB}=\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=3$, $\mathrm{OC}=\mathrm{AC}=2\sqrt{3}$ である四面体 OABC に対して, P を辺 BC 上の点, M を辺 OA の中点とし, $\triangle\mathrm{OAP}$ の重心を G とする。

まず, $\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{OBC}$ は合同なので $\mathrm{PA}=\mathrm{PO}$ が成り立ち, $\triangle\mathrm{POA}$ は二等辺三角形である。

すると, 中線 PM と辺 OA は直交するので, $\overrightarrow{\mathrm{PG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ である。

(2) $\mathrm{PG}:\mathrm{GM}=2:1$ より, $\mathrm{PG}=\dfrac{2}{3}\mathrm{PM}=\dfrac{2}{3}\sqrt{\mathrm{PA}^2-2^2}=\dfrac{2}{3}\sqrt{\mathrm{PA}^2-4}$ ………(＊)

ここで, $\cos\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{3^2+3^2-(2\sqrt{3})^2}{2\cdot3\cdot3}=\dfrac{1}{3}>0$ より, $\triangle\mathrm{ABC}$ は鋭角三角形となるので, PA が最小となるのは, 点 P が A から辺 BC の下ろした垂線と辺 BC との交点のときである。このとき,

$$\mathrm{PA}=3\sin\angle\mathrm{ABC}=3\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=2\sqrt{2}$$

よって, (＊)から, PG の最小値は $\dfrac{2}{3}\sqrt{(2\sqrt{2})^2-4}=\dfrac{4}{3}$ である。

［解 説］

空間ベクトルの応用題としても解けますが, 記述量を考えると, 三角比の四面体への応用として処理した方がよいでしょう。

7 ［金沢大・文］

平面上の△OAB で，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\sqrt{2}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=1$ となるものを考え，点 B から直線 OA に下ろした垂線と OA の交点を H とする。また t を実数とし，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=t\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ となる点 P をとる。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) H は辺 OA の中点であることを示せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，t を用いて表せ。

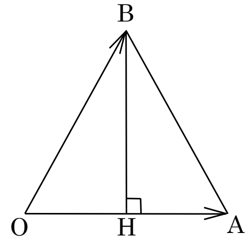
以下において，P は△OAB の外接円の中心であるとする。

(3) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=x$ とするとき，t を x を用いて表せ。

(4) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|=\sqrt{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|$ を満たすとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|$ の値を求めよ。

7　　　　［金沢大・文］

(1)　$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$とするとき，$|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$



ここで，点 B から直線 OA に下ろした垂線と OA との交点 H に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\vec{a}$ (k は実数)とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}}=0$から，

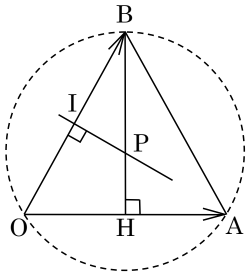
$$\vec{a}\cdot(k\vec{a}-\vec{b})=0,\ k\cdot 2-1=0,\ k=\frac{1}{2}$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{1}{2}\vec{a}$から H は辺 OA の中点である。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=t\overrightarrow{\mathrm{BH}}$より$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=t(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})$となり，(1)から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\vec{b}=t\Big(\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}\Big),\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{t}{2}\vec{a}+(1-t)\vec{b}\ \cdots\cdots\cdots①$$

(3)　(1)から△OAB は二等辺三角形であり，△OAB の外心 P は，直線 BH と辺 OB の垂直二等分線の交点になる。



ここで，OB の中点を I とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IP}}=0$から，

$$\vec{b}\cdot\Big\{\frac{t}{2}\vec{a}+(1-t)\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{b}\Big\}=0,\ \vec{b}\cdot\Big\{\frac{t}{2}\vec{a}+\Big(\frac{1}{2}-t\Big)\vec{b}\Big\}=0$$

$|\vec{b}|^2=x$から$\frac{t}{2}\cdot 1+\Big(\frac{1}{2}-t\Big)x=0$となり，$t+(1-2t)x=0$

すると，$(2x-1)t=x$ となり，$2x-1=0$ のときは成り立たないので，$2x-1\neq 0\ \Big(x\neq\frac{1}{2}\Big)$のもとで，$t=\frac{x}{2x-1}\ \cdots\cdots②$である。

(4)　①②より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{x}{2(2x-1)}\vec{a}+\Big(1-\frac{x}{2x-1}\Big)\vec{b}=\frac{1}{2(2x-1)}\{x\vec{a}+2(x-1)\vec{b}\}$

ここで，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\sqrt{2}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$より$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$となり，

$$\frac{1}{4(2x-1)^2}\{x^2\cdot 2+4x(x-1)\cdot 1+4(x-1)^2x\}=2x$$

$x>0$ かつ $x\neq\frac{1}{2}$ より，$2x+4(x-1)+4(x-1)^2=8(2x-1)^2$ となり，

$$4x^2-2x=8(2x-1)^2,\ 2x=8(2x-1),\ 14x=8$$

よって，$x=\frac{4}{7}$ となり，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{x}=\sqrt{\frac{4}{7}}=\frac{2}{7}\sqrt{7}$ である。

［解　説］

平面ベクトルの三角形への応用問題です。図形的な処理も可能ですが，解答例では計算で押し通しました。

8　　　　［九州大・理］

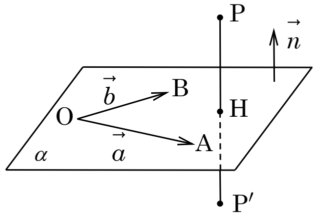
座標空間内の 5 点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 1,\ 0)$，B$(2,\ 1,\ 2)$，P$(4,\ 0,\ -1)$，Q$(4,\ 0,\ 5)$を考える。3 点 O, A, B を通る平面をαとし，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　ベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$の両方に垂直であり，x成分が正であるような，大きさが 1 のベクトル$\vec{n}$を求めよ。

(2)　平面αに関して点 P と対称な点 P$'$の座標を求めよ。

(3)　点 R が平面α上を動くとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{PR}}\right|+\left|\overrightarrow{\mathrm{RQ}}\right|$が最小となるような点 R の座標を求めよ。

8 ［九州大・理］



(1) 3 点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 1,\ 0)$，B$(2,\ 1,\ 2)$を通る平面αに垂直な$\vec{n}$について，$\vec{n}=(k,\ l,\ m)\ (k>0)$とおくと，$\vec{a}\cdot\vec{n}=0$，$\vec{b}\cdot\vec{n}=0$から，

$$k+l=0\cdots\cdots①,\ 2k+l+2m=0\cdots\cdots②$$

また，$|\vec{n}|=1$から，$k^2+l^2+m^2=1\cdots\cdots\cdots③$

①より$l=-k$，②から$2k-k+2m=0$から$m=-\dfrac{k}{2}$なので，③に代入して，

$$k^2+k^2+\frac{k^2}{4}=1,\ k^2=\frac{4}{9}$$

$k>0$から$k=\dfrac{2}{3}$となり，$l=-\dfrac{2}{3}$，$m=-\dfrac{1}{3}$より，$\vec{n}=\dfrac{1}{3}(2,\ -2,\ -1)$である。

(2) 平面αは法線ベクトルが$\vec{n}=\dfrac{1}{3}(2,\ -2,\ -1)$より，その方程式は，

$$2x-2y-z=0\cdots\cdots\cdots④$$

平面αに関し点P$(4,\ 0,\ -1)$と対称な点P′について，$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}=3p\vec{n}$（$p$は定数）とおくと$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+3p\vec{n}$となり，線分PP′の中点Hは，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP'}}}{2}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OP}}+3p\vec{n}}{2}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\frac{p}{2}\cdot3\vec{n}=\left(4+p,\ -p,\ -1-\frac{p}{2}\right)$$

このとき，点Hは平面α上にあるので，④に代入して，

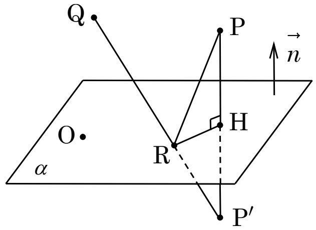
$$2(4+p)-2(-p)-\left(-1-\frac{p}{2}\right)=0,\ \frac{9}{2}p+9=0$$

よって，$p=-2$から，$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=(4,\ 0,\ -1)-2(2,\ -2,\ -1)=(0,\ 4,\ 1)$

すなわち，P′$(0,\ 4,\ 1)$である。

(3) $f(x,\ y,\ z)=2x-2y-z$とおくと，④より平面$\alpha:f(x,\ y,\ z)=0$となり，2 点P$(4,\ 0,\ -1)$，Q$(4,\ 0,\ 5)$に対して，

$$f(4,\ 0,\ -1)=8-0+1=9>0,\ f(4,\ 0,\ 5)=8-0-5=3>0$$



これより，2 点P, Qは平面αについて同じ側にある。

さて，点Rが平面α上を動くとき，

$$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|+|\overrightarrow{\mathrm{RQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{P'R}}|+|\overrightarrow{\mathrm{RQ}}|\geqq|\overrightarrow{\mathrm{P'Q}}|$$

これより，$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|+|\overrightarrow{\mathrm{RQ}}|$が最小となる点 R の位置は，平面$\alpha$と線分P′Qの交点である。

すると，$\overrightarrow{\mathrm{P'Q}}=(4,\ -4,\ 4)$より，直線P′Qは，$t$を実数として，

$$(x,\ y,\ z)=(0,\ 4,\ 1)+t(4,\ -4,\ 4)=(4t,\ 4-4t,\ 1+4t)\cdots\cdots\cdots⑤$$

④⑤より，$2\cdot4t-2(4-4t)-(1+4t)=0$から$12t-9=0$となり，$t=\dfrac{3}{4}$

よって，求める点Rの座標は，⑤から，$(3,\ 4-3,\ 1+3)=(3,\ 1,\ 4)$である。

［解 説］

ベクトルの空間図形への応用について，頻出有名問題です。(2)と(3)は平面の方程式を利用する方法で記述しました。

9 ［神戸大・理］

$a,\ b$ を実数, p を素数とし, $1<a<b$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $x,\ y,\ z$ を 0 でない実数とする。$a^x=b^y=(ab)^z$ ならば $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{z}$ であることを示せ。

(2) $m,\ n$ を $m>n$ をみたす自然数とし, $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{p}$ とする。$m,\ n$ の値を p を用いて表せ。

(3) $m,\ n$ を自然数とし, $a^m=b^n=(ab)^p$ とする。b の値を $a,\ p$ を用いて表せ。

$\boxed{9}$　　［神戸大・理］

(1)　$1 < a < b$ のとき，$a^x = b^y = (ab)^z = k$ とおくと，

$$x = \log_a k,\ \ y = \log_b k,\ \ z = \log_{ab} k$$

x, y, z は 0 でない実数なので，k は 1 でない正の実数となり，

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{\log_a k} + \frac{1}{\log_b k} = \log_k a + \log_k b = \log_k ab = \frac{1}{\log_{ab} k} = \frac{1}{z}$$

(2)　m, n が $m > n$ をみたす自然数，p が素数のとき，$\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{p}$ に対して，

$$pn + pm = mn,\ \ mn - pm - pn = 0,\ (m-p)(n-p) = p^2$$

$m > n > 0$ から，$m - p > n - p > -p$ となり，$(m-p,\ n-p) = (p^2,\ 1)$ より，

$$(m,\ n) = (p^2 + p,\ p+1)$$

(3)　$1 < a < b$ で自然数 m, n に対し，$a^m = b^n = (ab)^p$ のとき，(1)より，$\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{p}$

そして，$b^n = a^m < b^m$ から $m > n$ なので，(2)より，

$$(m,\ n) = (p^2 + p,\ p+1)$$

すると，$a^{p^2+p} = b^{p+1} = (ab)^p$ となり，$b^{p+1} = a^p b^p$ から，

$b = a^p$　（このとき $a^{p^2+p} = b^{p+1}$ は成立している）

［解 説］

不定方程式に指数・対数を加味した頻出題です。丁寧すぎるほどの誘導です。文系では，$p = 5$ の場合が出題されています。

$\boxed{10}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［金沢大・理］

自然数 n の正の約数全体の集合を A_n とし，A_n のすべての要素の逆数の 2 乗の和を s_n とする。例えば,

$$A_3=\{1,\ 3\},\ s_3=1+\frac{1}{3^2},\ A_4=\{1,\ 2,\ 4\},\ s_4=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}$$

である。p と q は異なる素数とし, k と l は自然数とする。次の問いに答えよ。

(1)　s_8，s_{12} の値を求めよ。

(2)　$n=p^k$ について，A_n の要素の個数を求めよ。

(3)　$n=p^kq^l$ について，$s_n<\dfrac{3}{2}$ を示せ。

10　　　　［金沢大・理］

(1)　自然数 n の正の約数全体の集合 A_n について，そのすべての要素の逆数の 2 乗の和を s_n とする。

$A_8=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$ より，$s_8=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{8^2}=\dfrac{85}{64}$

$A_{12}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$ より，$s_{12}=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{6^2}+\dfrac{1}{12^2}=\dfrac{210}{144}=\dfrac{35}{24}$

(2)　p が素数のとき，$A_{p^k}=\{1,\ p,\ p^2,\ \cdots,\ p^k\}$ より，要素の個数は $k+1$ 個である。

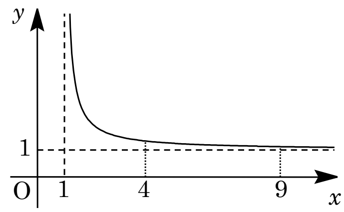
(3)　p,q が素数のとき，$A_{p^kq^l}$ の要素は p^iq^j $(0\leqq i\leqq k,\ 0\leqq j\leqq l)$ と表されるので，

$$s_n=s_{p^kq^l}=\sum_{j=0}^{l}\Big(\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{p^{2i}q^{2j}}\Big)=\sum_{j=0}^{l}\Big(\frac{1}{q^{2j}}\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{p^{2i}}\Big)$$

ここで，$\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{p^{2i}}=\frac{1}{1-\frac{1}{p^2}}\Big\{1-\Big(\frac{1}{p^2}\Big)^{k+1}\Big\}=\frac{p^2}{p^2-1}\Big\{1-\Big(\frac{1}{p^2}\Big)^{k+1}\Big\}$ より，

$$s_n=\sum_{j=0}^{l}\frac{1}{q^{2j}}\cdot\frac{p^2}{p^2-1}\Big\{1-\Big(\frac{1}{p^2}\Big)^{k+1}\Big\}=\frac{p^2}{p^2-1}\Big\{1-\Big(\frac{1}{p^2}\Big)^{k+1}\Big\}\sum_{j=0}^{l}\frac{1}{q^{2j}}$$
$$=\frac{p^2}{p^2-1}\Big\{1-\Big(\frac{1}{p^2}\Big)^{k+1}\Big\}\cdot\frac{q^2}{q^2-1}\Big\{1-\Big(\frac{1}{q^2}\Big)^{l+1}\Big\}<\frac{p^2}{p^2-1}\cdot\frac{q^2}{q^2-1}$$

ここで，$x>1$ において $f(x)=\dfrac{x}{x-1}=1-\dfrac{1}{x-1}$ とおくと，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



また，p と q は異なる素数より，$p\geqq 2$，$q\geqq 3$ としても一般性を失わないので，$p^2\geqq 4$，$q^2\geqq 9$ から，

$$1<\frac{p^2}{p^2-1}\leqq\frac{4}{3},\ 1<\frac{q^2}{q^2-1}\leqq\frac{9}{8}$$

すると，$1<\dfrac{p^2}{p^2-1}\cdot\dfrac{q^2}{q^2-1}\leqq\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{9}{8}=\dfrac{3}{2}$ となり，$s_n<\dfrac{3}{2}$ である。

［解　説］

集合と要素を題材にした問題です。(3)のシグマ計算はややこしそうですが，ある自然数を素因数分解して，その約数の和を求める方法と同じです。

$\boxed{11}$ ［京都大・理］

n を自然数とする。3 つの整数 n^2+2，n^4+2，n^6+2 の最大公約数 A_n を求めよ。

11 ［京都大・理］

3 つの整数n^2+2，n^4+2，n^6+2の公約数をp，またa, b, cを自然数として，

$$n^2+2=pa\cdots\cdots\cdots①,\ n^4+2=pb\cdots\cdots\cdots②,\ n^6+2=pc\cdots\cdots\cdots③$$

①②より，$(pa-2)^2+2=pb$，$p^2a^2-4pa+4+2=pb$となり，

$$p(b+4a-pa^2)=6\cdots\cdots\cdots④$$

①③より，$(pa-2)^3+2=pc$，$p^3a^3-6p^2a^2+12pa-8+2=pc$となり，

$$p(p^2a^3-6pa^2+12a-c)=6\cdots\cdots\cdots⑤$$

④⑤より，pは 6 の正の約数 1, 2, 3, 6 のいずれかとなる。

以下，mod 6 で記すと，自然数nと 3 つの整数n^2，n^4，n^6の関係は右表のとおりである。

n	0	1	2	3	4	5
n^2	0	1	4	3	4	1
n^4	0	1	4	3	4	1
n^6	0	1	4	3	4	1

ここで，n^2+2，n^4+2，n^6+2の最大公約数をA_nとおくと，

(i) $n\equiv2$または$n\equiv4$のとき

$n^2+2\equiv0$，$n^4+2\equiv0$，$n^6+2\equiv0$となり，$A_n=6$である。

(ii) $n\equiv1$または$n\equiv5$のとき

$n^2+2\equiv3$，$n^4+2\equiv3$，$n^6+2\equiv3$となり，3 つの整数は 3 の倍数であるが，2 の倍数でも 6 の倍数でもないので，$A_n=3$である。

(iii) $n\equiv0$のとき

$n^2+2\equiv2$，$n^4+2\equiv2$，$n^6+2\equiv2$となり，3 つの整数は 2 の倍数であるが，3 の倍数でも 6 の倍数でもないので，$A_n=2$である。

(iv) $n\equiv3$のとき

$n^2+2\equiv5$，$n^4+2\equiv5$，$n^6+2\equiv5$となり，3 つの整数は 2 の倍数でも 3 の倍数でも 6 の倍数でもないので，$A_n=1$である。

［解 説］

頻出の整数問題です。冒頭で，互除法を用いて記述し，pが 6 の正の約数ということを示す方法もあります。

12 ［千葉大・理］

$x,\ y$ についての方程式 $x^2-6xy+y^2=9$ ……(＊)に関する次の問いに答えよ。

(1) $x,\ y$ がともに正の整数であるような(＊)の解のうち, y が最小であるものを求めよ。

(2) 数列 a_1，a_2，a_3，…が漸化式

$$a_{n+2}-6a_{n+1}+a_n=0 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする。このとき，$(x,\ y)=(a_{n+1},\ a_n)$ が(＊)を満たすならば，$(x,\ y)=(a_{n+2},\ a_{n+1})$ も(＊)を満たすことを示せ。

(3) (＊)の整数解 $(x,\ y)$ は無数に存在することを示せ。

12　　［千葉大・理］

(1)　正の整数 x, y に対して，$x^2-6xy+y^2=9$ ………(＊)

(＊)から，$x^2+y^2=9+6xy$ となり，x^2+y^2 は 3 の倍数である。

以下，mod3 で記すと，整数 k に対し，$k\equiv 0$ のとき $k^2\equiv 0$，$k\equiv\pm1$ のとき $k^2\equiv 1$ となる。これより，$x^2+y^2\equiv 0$ のとき $x^2\equiv 0$ かつ $y^2\equiv 0$ であり，$x\equiv 0$ かつ $y\equiv 0$，すなわち x, y はともに 3 の倍数となる。

さて，(＊)を満たす正の整数 x, y で，y が最小であるのは，まず $y=3$ について調べると，(＊)は $x^2-18x+9=9$ となり，$x(x-18)=0$ から $x=18$ である。

よって，求める解は，$(x,\ y)=(18,\ 3)$ である。

(2)　漸化式 $a_{n+2}-6a_{n+1}+a_n=0$ ……①に対して，$(x,\ y)=(a_{n+1},\ a_n)$ が(＊)を満たすならば，${a_{n+1}}^2-6a_{n+1}a_n+{a_n}^2=9$ ……②が成り立つ。このとき，①から，

$$\begin{aligned}{a_{n+2}}^2-6a_{n+2}a_{n+1}+{a_{n+1}}^2&=(6a_{n+1}-a_n)^2-6(6a_{n+1}-a_n)a_{n+1}+{a_{n+1}}^2\\&=36{a_{n+1}}^2-12a_{n+1}a_n+{a_n}^2-36{a_{n+1}}^2+6a_{n+1}a_n+{a_{n+1}}^2={a_{n+1}}^2-6a_{n+1}a_n+{a_n}^2\end{aligned}$$

すると，②から，${a_{n+2}}^2-6a_{n+2}a_{n+1}+{a_{n+1}}^2=9$ となり，$(x,\ y)=(a_{n+2},\ a_{n+1})$ も(＊)を満たす。

(3)　$a_1=3$，$a_2=18$ とすると，(1)から $(x,\ y)=(a_2,\ a_1)$ は，(＊)の解である。

そして，漸化式①によって a_n $(n\geqq 3)$ を定めると，(2)から $(x,\ y)=(a_3,\ a_2)$，$(a_4,\ a_3)$，$(a_5,\ a_4)$，…は，(＊)の解である。

さて，ここで，$a_1=3$，$a_2=18$ と漸化式①で定められた整数の数列 $\{a_n\}$ が，正の増加数列 $(0<a_n<a_{n+1})$ であることを数学的帰納法で示す。

(i)　$n=1$ のとき　整数 a_1，a_2 は $0<a_1<a_2$ を満たしている。

(ii)　$n=l$ のとき　整数 a_l，a_{l+1} が $0<a_l<a_{l+1}$ を満たしているとすると，①から，

$$a_{l+2}-a_{l+1}=(6a_{l+1}-a_l)-a_{l+1}=5a_{l+1}-a_l>5a_l-a_l=4a_l>0$$

これより，整数 a_{l+1}，a_{l+2} は $0<a_{l+1}<a_{l+2}$ を満たしている。

(i)(ii)より，$0<a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n<a_{n+1}<\cdots$ である。

したがって，$(a_2,\ a_1)$，$(a_3,\ a_2)$，$(a_4,\ a_3)$，$(a_5,\ a_4)$，…はすべて異なることより，(＊)の整数解 $(x,\ y)$ は無数に存在する。

［解 説］

整数と漸化式の融合問題です。(3)は $(a_2,\ a_1)$，$(a_3,\ a_2)$，$(a_4,\ a_3)$，$(a_5,\ a_4)$，…に，同じ整数の組が現れないことを示す点が重要です。なお，(1)は $y=1$，$y=2$，$y=3$ と当てはめた方がよかったかもしれません。

13 ［広島大・理］

a, b を整数とする。また，整数の数列 $\{c_n\}$ を $c_1=a$，$c_2=b$ および漸化式

$$c_{n+2}=c_{n+1}+c_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $a=39$，$b=13$ とする。このとき，2 つの整数 c_5 と c_6 の最大公約数を求めよ。

(2) a と b はともに奇数であるとする。このとき，自然数 n に対して次の命題 P_n が成り立つことを，n についての数学的帰納法で示せ。

P_n : c_{3n-2} と c_{3n-1} はともに奇数であり，c_{3n} は偶数である。

(3) d を自然数とし，a と b はともに d の倍数であるとする。このとき，自然数 n に対して c_n が d の倍数になることを示せ。ただし，数学的帰納法を用いて証明すること。

(4) c_{2022} が奇数であるならば，$a+b$ も奇数であることを示せ。

$\boxed{13}$　　[広島大・理]

(1)　$c_1 = a$，$c_2 = b$，$c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$ により定められる整数の数列 $\{c_n\}$ に対して，

$a = 39$，$b = 13$ のとき，

$$c_3 = c_2 + c_1 = 13 + 3\cdot 13 = 4\cdot 13,\ c_4 = c_3 + c_2 = 4\cdot 13 + 13 = 5\cdot 13$$

$$c_5 = c_4 + c_3 = 5\cdot 13 + 4\cdot 13 = 9\cdot 13,\ c_6 = c_5 + c_4 = 9\cdot 13 + 5\cdot 13 = 14\cdot 13$$

これより，c_5 と c_6 の最大公約数は 13 である。

(2)　a と b がともに奇数のとき，命題 P_n「c_{3n-2} と c_{3n-1} はともに奇数であり，c_{3n} は偶数である」を，数学的帰納法で証明する。

(i)　$n = 1$ のとき　$c_1 = a$，$c_2 = b$ はともに奇数で，$c_3 = b + a$ は偶数である。

(ii)　$n = k$ のとき　c_{3k-2} と c_{3k-1} はともに奇数で，c_{3k} は偶数と仮定する。

$c_{3k+1} = c_{3k} + c_{3k-1}$ は奇数，$c_{3k+2} = c_{3k+1} + c_{3k}$ は奇数，$c_{3k+3} = c_{3k+2} + c_{3k+1}$ は偶数となり，$n = k+1$ のときも P_n は成り立っている。

(i)(ii)より，自然数 n に対して，命題 P_n は成り立っている。

(3)　自然数 d に対し，a と b がともに d の倍数であるとき，c_n が d の倍数になることを，数学的帰納法で証明する。

(i)　$n = 1,\ 2$ のとき　$c_1 = a$，$c_2 = b$ は，ともに d の倍数である。

(ii)　$n = k,\ k+1$ のとき　c_k，c_{k+1} が d の倍数であると仮定する。

すると，l, m を自然数として，$c_k = dl$，$c_{k+1} = dm$ とおけ，

$$c_{k+2} = c_{k+1} + c_k = dm + dl = d(m + l)$$

これより，c_{k+2} は d の倍数である。

(i)(ii)より，a と b がともに d の倍数であるとき，c_n は d の倍数になる。

(4)　$a + b$ が偶数であるのは，$(a,\ b) =$ (奇数，奇数)，(偶数，偶数) のときである。

(Ⅰ)　$(a,\ b) =$ (奇数，奇数) のとき

$c_{2022} = c_{3\times 674}$ に注意すると，(2)から，c_{2022} は偶数である。

(Ⅱ)　$(a,\ b) =$ (偶数，偶数) のとき

(3)において $d = 2$ とすると，c_{2022} は 2 の倍数，すなわち偶数である。

(Ⅰ)(Ⅱ)より，$a + b$ が偶数ならば，c_{2022} は偶数である。

したがって，c_{2022} が奇数であるならば，$a + b$ は奇数である。

［解　説］

漸化式と数学的帰納法の問題です。(2)と(3)の証明は容易ですが，この結果が(4)につながるという構図になっています。

$\boxed{14}$　　［東京大・文］

数列$\{a_n\}$を次のように定める。

$$a_1=4\,,\ \ a_{n+1}={a_n}^2+n(n+2)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　a_{2022}を 3 で割った余りを求めよ。

(2)　a_{2022}，a_{2023}，a_{2024}の最大公約数を求めよ。

14　　　［東京大・文］

(1)　$a_1=4$，$a_{n+1}={a_n}^2+n(n+2)$ で定められる $\{a_n\}$ に対し，以下 mod3 で記すと，

$a_1=4\equiv1$，$a_2={a_1}^2+1\cdot3\equiv1^2+1\cdot0\equiv1$

$a_3={a_2}^2+2\cdot4\equiv1^2+2\cdot1\equiv3\equiv0$，$a_4={a_3}^2+3\cdot5\equiv0^2+0\cdot2\equiv0$

$a_5={a_4}^2+4\cdot6\equiv0^2+1\cdot0\equiv0$，$a_6={a_5}^2+5\cdot7\equiv0^2+2\cdot1\equiv2$

$a_7={a_6}^2+6\cdot8\equiv2^2+0\cdot2\equiv4\equiv1$，$a_8={a_7}^2+7\cdot9\equiv1^2+1\cdot0\equiv1$

これより，k を 0 以上の整数として，次式(＊)のように予測できるので，これを数学的帰納法で証明する。

$a_{6k+1}\equiv1$，$a_{6k+2}\equiv1$，$a_{6k+3}\equiv0$，$a_{6k+4}\equiv0$，$a_{6k+5}\equiv0$，$a_{6k+6}\equiv2$……(＊)

(i)　$k=0$ のとき　上記の計算より成立している。

(ii)　$k=l$ のとき　(＊)の成立を仮定すると，

$a_{6l+7}={a_{6l+6}}^2+(6l+6)(6l+8)\equiv2^2+0\cdot2\equiv4\equiv1$

$a_{6l+8}={a_{6l+7}}^2+(6l+7)(6l+9)\equiv1^2+1\cdot0\equiv1$

$a_{6l+9}={a_{6l+8}}^2+(6l+8)(6l+10)\equiv1^2+2\cdot1\equiv3\equiv0$

$a_{6l+10}={a_{6l+9}}^2+(6l+9)(6l+11)\equiv0^2+0\cdot2\equiv0$

$a_{6l+11}={a_{6l+10}}^2+(6l+10)(6l+12)\equiv0^2+1\cdot0\equiv0$

$a_{6l+12}={a_{6l+11}}^2+(6l+11)(6l+13)\equiv0^2+2\cdot1\equiv2$

よって，$k=l+1$ のときも成立している。

(i)(ii)より，0 以上のすべての整数 k に対して，(＊)は成立している。

すると，$2022=6\times337=6\times336+6$ なので $a_{2022}\equiv2$，すなわち a_{2022} を 3 で割った余りは 2 である。

(2)　a_{2022}，a_{2023}，a_{2024} の最大公約数を G とおき，p, q, r を整数として，

$a_{2022}=Gp$，$a_{2023}=Gq$，$a_{2024}=Gr$（p, q, r の最大公約数は 1）

ここで，$a_{2023}={a_{2022}}^2+2022\cdot2024$ なので，$Gq=G^2p^2+2022\cdot2024$ となり，

$G(q-p^2)=2022\cdot2024$，$G(q-p^2)=2^4\cdot3\cdot11\cdot23\cdot337$ ………①

また，$a_{2024}={a_{2023}}^2+2023\cdot2025$ なので，$Gr=G^2q^2+2023\cdot2025$ となり，

$G(r-q^2)=2023\cdot2025$，$G(r-q^2)=3^4\cdot5^2\cdot7\cdot17^2$ ………②

①②より，G は 3 の約数となるが，(1)から $a_{2022}\equiv2$ なので a_{2022} は 3 の倍数ではない。これより $G=1$ となり，a_{2022}，a_{2023}，a_{2024} の最大公約数は 1 である。

［解 説］

漸化式と整数の問題です。(2)の①②は素因数分解で処理しましたが，ここはユークリッドの互除法を利用しても構いません。

$\boxed{15}$ ［信州大・医］

$a_1 = a_2 = 1$ を満たす数列$\{a_n\}$について，次の 2 つの条件 p と q が同値であることを示せ。

p：すべての自然数 n に対して，$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ が成り立つ。

q：すべての自然数 n に対して，${a_{n+1}}^2 - a_{n+2}\,a_n = (-1)^n$ が成り立つ。

$\boxed{15}$ ［信州大・医］

$a_1=a_2=1$ を満たす数列 $\{a_n\}$ について，

条件 p ： $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

条件 q ： ${a_{n+1}}^2-a_{n+2}a_n=(-1)^n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(a) $p\Rightarrow q$ の証明

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ のとき，$a_3=a_2+a_1=1+1=2$ となり，

$$\begin{aligned}{a_{n+2}}^2-a_{n+3}a_{n+1}&={a_{n+2}}^2-(a_{n+2}+a_{n+1})a_{n+1}={a_{n+2}}^2-a_{n+2}a_{n+1}-{a_{n+1}}^2\\&=a_{n+2}(a_{n+2}-a_{n+1})-{a_{n+1}}^2=a_{n+2}a_n-{a_{n+1}}^2\\&=-({a_{n+1}}^2-a_{n+2}a_n)\end{aligned}$$

これより，${a_{n+1}}^2-a_{n+2}a_n=({a_2}^2-a_3a_1)(-1)^{n-1}=(1^2-2\cdot1)(-1)^{n-1}=(-1)^n$

(b) $q\Rightarrow p$ の証明

${a_{n+1}}^2-a_{n+2}a_n=(-1)^n$ のとき，「$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ かつ $a_{n+1}>0$ かつ $a_n>0$」であることを数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n=1$ のとき ${a_2}^2-a_3a_1=-1$ から $1^2-1\cdot a_3=-1$ となり，$a_3=2$ である。

これより，$a_3=a_2+a_1$ かつ $a_2>0$ かつ $a_1>0$ が成り立っている。

(ii) $n=k$ のとき $a_{k+2}=a_{k+1}+a_k$ かつ $a_{k+1}>0$ かつ $a_k>0$ と仮定する。

ここで，${a_{k+1}}^2-a_{k+2}a_k=(-1)^k$，${a_{k+2}}^2-a_{k+3}a_{k+1}=(-1)^{k+1}$ の両辺の和をとり，

$${a_{k+1}}^2-a_{k+2}a_k+{a_{k+2}}^2-a_{k+3}a_{k+1}=(-1)^k+(-1)^{k+1}$$

$$a_{k+2}(a_{k+2}-a_k)+a_{k+1}(a_{k+1}-a_{k+3})=0$$

$a_{k+2}-a_k=a_{k+1}$ より，$a_{k+2}a_{k+1}+a_{k+1}(a_{k+1}-a_{k+3})=0$ となり，$a_{k+1}>0$ から，

$$a_{k+2}+a_{k+1}-a_{k+3}=0,\ a_{k+3}=a_{k+2}+a_{k+1}$$

そして，$a_{k+2}=a_{k+1}+a_k>0$，$a_{k+1}>0$ から，$n=k+1$ のときも成り立っている。

(i)(ii)より，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ かつ $a_{n+1}>0$ かつ $a_n>0$ である。

(a)(b)より，2 つの条件 p と q は同値である。

［解 説］

漸化式を題材にした論証問題です。直接的に示せた $p\Rightarrow q$ と同様に，$q\Rightarrow p$ も試みましたが，$a_n>0$ が簡単には示せません。そこで，帰納法の出番となるわけですが，それなら条件 p まで含めた形で証明と考え，書き直したのが上の解答例です。

16 ［東北大］

K を 3 より大きな奇数とし，$l+m+n=K$ を満たす正の奇数の組$(l,\ m,\ n)$の個数 N を考える。ただし，たとえば，$K=5$ のとき，$(l,\ m,\ n)=(1,\ 1,\ 3)$ と $(l,\ m,\ n)=(1,\ 3,\ 1)$ とは異なる組とみなす。

(1) $K=99$ のとき, N を求めよ。

(2) $K=99$ のとき，$l,\ m,\ n$ の中に同じ奇数を 2 つ以上含む組$(l,\ m,\ n)$の個数を求めよ。

(3) $N>K$ を満たす最小の K を求めよ。

$\boxed{16}$ ［東北大］

(1) $l+m+n=99$ を満たす正の奇数の組 $(l,\ m,\ n)$ に対して，$a,\ b,\ c$ を自然数とし，$l=2a-1$，$m=2b-1$，$n=2c-1$ とおくと，奇数 $(l,\ m,\ n)$ の組の個数 N は自然数 $(a,\ b,\ c)$ の組の個数と一致し，

$$(2a-1)+(2b-1)+(2c-1)=99,\ a+b+c=51 \cdots\cdots\cdots①$$

①を満たす自然数 $(a,\ b,\ c)$ の組の個数は，${}_{51-1}\mathrm{C}_2$ より，

$$N={}_{50}\mathrm{C}_2=\frac{50\times 49}{2}=1225$$

(2) (1)のとき，l, m, n の中に同じ奇数を 2 つ以上含む組 $(l,\ m,\ n)$ は，

(i) $l=m=n$ のとき　①から $3a=51$ となり，$(a,\ b,\ c)=(17,\ 17,\ 17)$

これより，$(l,\ m,\ n)$ は 1 組ある。

(ii) $l=m\neq n$ のとき　①から $a=b\neq c$ となり，$2a+c=51$ かつ $a\neq c$ から，

$$(a,\ c)=(1,\ 49),\ (2,\ 47),\ \cdots,\ (16,\ 19),\ (18,\ 15),\ \cdots,\ (25,\ 1)$$

これより，$(l,\ m,\ n)$ は $25-1=24$ 組ある。

(iii) $l=n\neq m$ のとき　(ii)と同様に，$(l,\ m,\ n)$ は 24 組ある。

(iv) $m=n\neq l$ のとき　(ii)と同様に，$(l,\ m,\ n)$ は 24 組ある。

(i)〜(iv)より，求める $(l,\ m,\ n)$ の組の個数は $1+24\times 3=73$ となる。

(3) K を 3 より大きな奇数とし，$l+m+n=K$ のとき，(1)と同様にすると，

$$(2a-1)+(2b-1)+(2c-1)=K,\ a+b+c=\frac{K+3}{2} \cdots\cdots\cdots②$$

②を満たす自然数 $(a,\ b,\ c)$ の組の個数は，${}_{\frac{K+3}{2}-1}\mathrm{C}_2$ より，

$$N={}_{\frac{K+1}{2}}\mathrm{C}_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{K+1}{2}\cdot\frac{K-1}{2}=\frac{K^2-1}{8}$$

ここで，$N>K$ のとき $\dfrac{K^2-1}{8}>K$ となり，$K^2-8K-1>0$ より $K>4+\sqrt{17}$

よって，$N>K$ を満たす最小の K は，$4<\sqrt{17}<5$ から 9 である。

［解　説］

整数解の個数についての有名問題です。(1)と(3)については，記述を省きましたが，球としきりの配置で場合の数を数えています。

$\boxed{17}$　［北海道大・文］

箱の中に 1 文字ずつ書かれたカードが 10 枚ある。そのうち 5 枚には A, 3 枚には B, 2 枚には C と書かれている。箱から 1 枚ずつ, 3 回カードを取り出す試行を考える。

(1) カードを取り出すごとに箱に戻す場合, 1 回目と 3 回目に取り出したカードの文字が一致する確率を求めよ。

(2) 取り出したカードを箱に戻さない場合, 1 回目と 3 回目に取り出したカードの文字が一致する確率を求めよ。

(3) 取り出したカードを箱に戻さない場合, 2 回目に取り出したカードの文字が C であるとき, 1 回目と 3 回目に取り出したカードの文字が一致する条件付き確率を求めよ。

$\boxed{17}$　　［北海道大・文］

A のカード 5 枚，B のカード 3 枚，C のカード 2 枚が入っている箱から，カードを 1 枚ずつ 3 回取り出す。

(1) カードを取り出すごとに箱に戻す場合，1 回目と 3 回目に取り出したカードの文字が一致する確率は，

(i) 1 回目と 3 回目に A のカードを取り出すとき $\dfrac{5\times10\times5}{10^3}=\dfrac{25}{100}$

(ii) 1 回目と 3 回目に B のカードを取り出すとき $\dfrac{3\times10\times3}{10^3}=\dfrac{9}{100}$

(iii) 1 回目と 3 回目に C のカードを取り出すとき $\dfrac{2\times10\times2}{10^3}=\dfrac{4}{100}$

(i)〜(iii)より，求める確率は，$\dfrac{25}{100}+\dfrac{9}{100}+\dfrac{4}{100}=\dfrac{19}{50}$

(2) 取り出したカードを箱に戻さない場合，1 回目と 3 回目に取り出したカードの文字が一致する確率は，

(i) 1 回目と 3 回目に A のカードを取り出すとき $\dfrac{5\times4\times8}{{}_{10}\mathrm{P}_3}=\dfrac{20}{10\cdot9}$

(ii) 1 回目と 3 回目に B のカードを取り出すとき $\dfrac{3\times2\times8}{{}_{10}\mathrm{P}_3}=\dfrac{6}{10\cdot9}$

(iii) 1 回目と 3 回目に C のカードを取り出すとき $\dfrac{2\times1\times8}{{}_{10}\mathrm{P}_3}=\dfrac{2}{10\cdot9}$

(i)〜(iii)より，求める確率は，$\dfrac{20}{10\cdot9}+\dfrac{6}{10\cdot9}+\dfrac{2}{10\cdot9}=\dfrac{14}{45}$

(3) 取り出したカードを箱に戻さない場合，2 回目に C のカードを取り出す事象を E，1 回目と 3 回目に取り出したカードの文字が一致する事象を F とすると，

$$P(E)=\frac{2\times9\times8}{{}_{10}\mathrm{P}_3}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

また，2 回目に C のカードを取り出し，しかも 1 回目と 3 回目に取り出したカードの文字が一致する事象 $E\cap F$ について，一致するカードは A または B なので，

$$P(E\cap F)=\frac{5\times2\times4}{{}_{10}\mathrm{P}_3}+\frac{3\times2\times2}{{}_{10}\mathrm{P}_3}=\frac{40}{10\cdot9\cdot8}+\frac{12}{10\cdot9\cdot8}=\frac{13}{180}$$

したがって，2 回目に取り出したカードの文字が C であるとき，1 回目と 3 回目に取り出したカードの文字が一致する条件付き確率は，

$$P_E(F)=\frac{P(E\cap F)}{P(E)}=\frac{13}{180}\div\frac{1}{5}=\frac{13}{36}$$

［解　説］

確率の基本的な問題です。上の解答例では，条件のきつい方から，たとえば(2)では，1 回目→3 回目→2 回目と数えています。

$\boxed{18}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［京都大・理］

箱の中に 1 から n までの番号がついた n 枚の札がある。ただし $n \geqq 5$ とし，同じ番号の札はないとする。この箱から 3 枚の札を同時に取り出し，札の番号を小さい順に X, Y, Z とする。このとき，$Y-X \geqq 2$ かつ $Z-Y \geqq 2$ となる確率を求めよ。

18　　［京都大・理］

$n \geqq 5$のとき，1 から n までの番号がついた n 枚の札から 3 枚の札を同時に取り出し，札の番号を小さい順に X, Y, Z とする。

このとき，$Y-X \geqq 2$かつ$Z-Y \geqq 2$となるのは，$3 \leqq X+2 \leqq Y \leqq Z-2 \leqq n-2$から，$Y=k\ (k=3,\ 4,\ \cdots,\ n-2)$のとき，$X$ については$X=1,\ 2,\ \cdots,\ k-2$から$k-2$通り，Z については$Z=k+2,\ k+3,\ \cdots,\ n$から$n-(k+2)+1=n-k-1$通りの場合がある。

すると，$Y=k$のときの確率p_kは，$p_k=\dfrac{(k-2)(n-k-1)}{{}_n\mathrm{C}_2}=\dfrac{6(k-2)(n-k-1)}{n(n-1)(n-2)}$

したがって，求める確率をPとすると，

$$P=\sum_{k=3}^{n-2}p_k=\frac{6}{n(n-1)(n-2)}\sum_{k=3}^{n-2}(k-2)(n-k-1)$$

ここで，$k-2=l$とおくと，

$$\begin{aligned}P&=\frac{6}{n(n-1)(n-2)}\sum_{l=1}^{n-4}l(n-l-3)=\frac{6}{n(n-1)(n-2)}\sum_{l=1}^{n-4}\{(n-3)l-l^2\}\\&=\frac{6}{n(n-1)(n-2)}\left\{(n-3)\cdot\frac{1}{2}(n-4)(n-3)-\frac{1}{6}(n-4)(n-3)(2n-7)\right\}\\&=\frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)}\{3(n-3)-(2n-7)\}=\frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}\end{aligned}$$

［解　説］

よく見かける確率の問題です。解答例では，Yの値をいったん固定して，場合の数を数えています。

$\boxed{19}$ ［千葉大・理］

n を自然数とする。n 個のサイコロを同時に投げ，出た目の積を M とおく。

(1) M が 2 でも 3 でも割り切れない確率を求めよ。

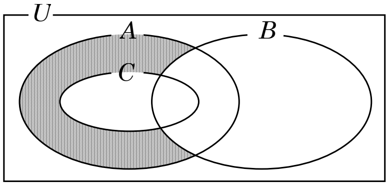
(2) M が 2 で割り切れるが，3 でも 4 でも割り切れない確率を求めよ。

(3) M が 4 では割り切れるが，3 では割り切れない確率を求めよ。

19　　［千葉大・理］

(1)　n 個のサイコロを同時に投げたとき，出た目の積 M が，2 で割り切れる事象を A，3 で割り切れる事象を B とおく。

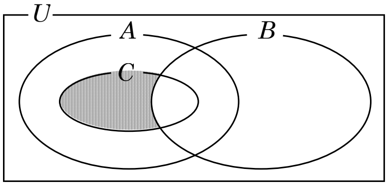
このとき，M が 2 でも 3 でも割り切れない事象 $\overline{A}\cap\overline{B}$ は，出た目が 1 または 5 の場合より，その確率は $P(\overline{A}\cap\overline{B})=\left(\dfrac{2}{6}\right)^n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ ……①となる。



(2)　M が 4 で割り切れる事象を C とおくと，$C\subset A$ である。また，全事象を U とおく。

このとき，M が 2 で割り切れるが，3 でも 4 でも割り切れない事象 $A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$ は，出た目の 1 個が 2 で，残り $n-1$ 個は 1 または 5 の場合より，その確率は，

$$P(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})={}_n\mathrm{C}_1\frac{1}{6}\left(\frac{2}{6}\right)^{n-1}=\frac{n}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n \cdots\cdots\cdots②$$



(3)　M が 4 では割り切れるが，3 では割り切れない事象 $\overline{B}\cap C$ について，

$$P(\overline{B}\cap C)=P(A\cap\overline{B})-P(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})$$
$$=\{P(A)-P(A\cap B)\}-P(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})$$
$$=\{1-P(\overline{A})\}-\{1-P(\overline{A\cap B})\}-P(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})$$
$$=-P(\overline{A})+P(\overline{A}\cup\overline{B})-P(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})$$
$$=-P(\overline{A})+\{P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\cap\overline{B})\}-P(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})$$
$$=P(\overline{B})-P(\overline{A}\cap\overline{B})-P(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})$$

ここで，$P(\overline{B})=\left(\dfrac{4}{6}\right)^n=\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ となり，①②を代入すると，

$$P(\overline{B}\cap C)=\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(1+\frac{n}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

［解　説］

確率の頻出題です。図を用いて，考えを整理しています。なお，(3)は(1)と(2)の結果を利用する方法で記しています。

$\boxed{20}$ ［大阪大・文］

n を 2 以上の自然数とし，1 個のさいころを n 回投げて出る目の数を順に X_1，X_2，…，X_n とする。X_1，X_2，…，X_n の最小公倍数を L_n，最大公約数を G_n とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $L_2=5$ となる確率および $G_2=5$ となる確率を求めよ。

(2) L_n が素数でない確率を求めよ。

(3) G_n が素数でない確率を求めよ。

20　　　　［大阪大・文］

(1)　さいころを n 回投げて出る目の数を順に X_1, X_2, …, X_n とし，このとき出る目の数の最小公倍数を L_n，最大公約数を G_n とする。

ここで，$n=2$ のとき，X_1, X_2 と L_2 の関係を表にまとめると右のようになり，$L_2=5$ となるのは，

$$(X_1,\ X_2)=(1,\ 5),\ (5,\ 1),\ (5,\ 5)$$

よって，その確率は $\dfrac{3}{6^2}=\dfrac{1}{12}$ である。

X_1 ＼ X_2	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	6	4	10	6
3	3	6	3	12	15	6
4	4	4	12	4	20	12
5	5	10	15	20	5	30
6	6	6	6	12	30	6

また X_1, X_2 と G_2 の関係を表にまとめると右のようになり，$G_2=5$ となるのは，

$$(X_1,\ X_2)=(5,\ 5)$$

よって，その確率は $\dfrac{1}{6^2}=\dfrac{1}{36}$ である。

X_1 ＼ X_2	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1	2
3	1	1	3	1	1	3
4	1	2	1	4	1	2
5	1	1	1	1	5	1
6	1	2	3	2	1	6

(2)　1, 2, 3, 4, 5, 6 の最小公倍数は，$2^2\cdot3\cdot5=60$ である。これより，L_n が素数となるのは，$L_n=2,\ 3,\ 5$ に限られる。

(i)　$L_n=2$ のとき

X_1, X_2, …, X_n が 1 または 2 のいずれかで，しかも 1 だけのときを除いた場合より，その確率は $\left(\dfrac{2}{6}\right)^n-\left(\dfrac{1}{6}\right)^n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n-\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$ である。

(ii)　$L_n=3$ のとき

X_1, X_2, …, X_n が 1 または 3 のいずれかで，しかも 1 だけのときを除いた場合より，その確率は $\left(\dfrac{2}{6}\right)^n-\left(\dfrac{1}{6}\right)^n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n-\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$ である。

(iii)　$L_n=5$ のとき

X_1, X_2, …, X_n が 1 または 5 のいずれかで，しかも 1 だけのときを除いた場合より，その確率は $\left(\dfrac{2}{6}\right)^n-\left(\dfrac{1}{6}\right)^n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n-\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$ である。

(i)～(iii)より，L_n が素数でない確率は，

$$1-3\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}=1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

(3)　G_n は 6 以下の自然数なので，G_n が素数となるのは，$G_n=2,\ 3,\ 5$ に限られる。

(i)　$G_n=2$のとき

X_1，X_2，…，X_nが2または4または6のいずれかで，しかも4だけ,6だけのときを除いた場合より，その確率は$\left(\dfrac{3}{6}\right)^n-\left(\dfrac{1}{6}\right)^n-\left(\dfrac{1}{6}\right)^n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n-2\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$である。

(ii)　$G_n=3$のとき

X_1，X_2，…，X_nが3または6のいずれかで，しかも6だけのときを除いた場合より，その確率は$\left(\dfrac{2}{6}\right)^n-\left(\dfrac{1}{6}\right)^n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n-\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$である。

(iii)　$G_n=5$のとき

X_1，X_2，…，X_nが5だけの場合より，その確率は$\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$である。

(i)〜(iii)より，G_nが素数でない確率は,

$$1-\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n+\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n+2\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

［解　説］

確率と整数の融合問題です。(1)の解答例はやり過ぎ感がありますが，このように具体的に調べると，(2)と(3)にスムーズにつながります。