1 ［東北大］

実数$a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$に対して，整式$f(x)=x^2-ax+1$を考える。

(1) 整式$x^4+x^3+x^2+x+1$は$f(x)$で割り切れることを示せ。

(2) 方程式$f(x)=0$の虚数解であって虚部が正のものをαとする。αを極形式で表せ。ただし，$r^5=1$を満たす実数rが$r=1$のみであることは，認めて使用してよい。

(3) 設問(2)の虚数αに対して，$\alpha^{2023}+\alpha^{-2023}$の値を求めよ。

1 ［東北大］

(1)　$\alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ に対して $f(x) = x^2 - \alpha x + 1$，そして $g(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ とおき，$g(x)$ を $f(x)$ で割ると，

$$g(x) = f(x)\{x^2 + (1+\alpha)x + \alpha(1+\alpha)\} - \alpha(1-\alpha-\alpha^2)x + (1-\alpha-\alpha^2)$$

ここで，$2\alpha = \sqrt{5}-1$ から $2\alpha + 1 = \sqrt{5}$ となり，$(2\alpha+1)^2 = 5$ から，

$$4\alpha^2 + 4\alpha + 1 = 5,\ \alpha^2 + \alpha - 1 = 0$$

すると，$g(x) = f(x)\{x^2 + (1+\alpha)x + 1\}$……①から，$g(x)$ は $f(x)$ で割り切れる。

(2)　$(x-1)g(x) = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = x^5 - 1$ となり，①から，

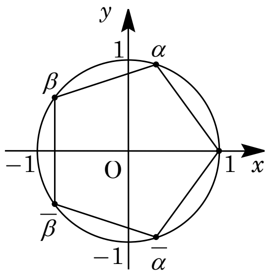
$$x^5 - 1 = (x-1)f(x)\{x^2 + (1+\alpha)x + 1\}$$
$$= (x-1)(x^2 - \alpha x + 1)\{x^2 + (1+\alpha)x + 1\}$$

すると，$x^5 = 1$ すなわち $x^5 - 1 = 0$ のとき，

$$x - 1 = 0 \text{……②},\ x^2 - \alpha x + 1 = 0 \text{……③},\ x^2 + (1+\alpha)x + 1 = 0 \text{……④}$$

これより，$x^5 = 1$ は，②から実数解 $x = 1$ をもち，③から虚数解 $x = \alpha$，$\overline{\alpha}$，④から虚数解 $x = \beta$，$\overline{\beta}$（β の虚部は正）をもつとすると，

$$\frac{\alpha + \overline{\alpha}}{2} = \frac{a}{2} > 0,\ \frac{\beta + \overline{\beta}}{2} = \frac{-1-a}{2} < 0$$



よって，$x^5 = 1$ の解は，複素数平面上で右図のような位置関係になり，$\arg\alpha = \dfrac{2}{5}\pi$ から，

$$\alpha = \cos\frac{2}{5}\pi + i\sin\frac{2}{5}\pi$$

(3)　まず，$|\alpha| = 1$ から $\alpha\overline{\alpha} = 1$ となり，$\alpha^{-1} = \overline{\alpha}$ である。

また，$\alpha^5 = 1$ で，$2023 = 5\times404 + 3$ から，

$$\alpha^{2023} + \alpha^{-2023} = \alpha^3 + \alpha^{-3} = \alpha^3 + (\overline{\alpha})^3 = \overline{\beta} + \beta = -1 - a$$
$$= -1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

［解　説］

複素数平面と n 乗根を題材にした問題です。(2)の問題文「ただし，……」が方針決定の鍵になっています。

$\boxed{2}$ ［九州大］

以下の問いに答えよ。

(1) 4 次方程式$x^4-2x^3+3x^2-2x+1=0$を解け。

(2) 複素数平面上の△ABC の頂点を表す複素数をそれぞれα，β，γとする。
$(\alpha-\beta)^4+(\beta-\gamma)^4+(\gamma-\alpha)^4=0$が成り立つとき，△ABC はどのような三角形になるか答えよ。

2 ［九州大］

(1) 方程式$x^4-2x^3+3x^2-2x+1=0$……①について，$x\neq 0$から，

$$x^2-2x+3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0,\ \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=0$$

これより，$\left(x+\frac{1}{x}-1\right)^2=0$となり，$x+\frac{1}{x}-1=0$から$x^2-x+1=0$

よって，①の解は$x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$である。

(2) $(\alpha-\beta)^4+(\beta-\gamma)^4+(\gamma-\alpha)^4=0$ ……②に対して，$z=\alpha-\beta$，$w=\gamma-\beta$とおくと，$w-z=\gamma-\alpha$となるので，②は$z^4+(-w)^4+(w-z)^4=0$から，

$$z^4+w^4+w^4-4w^3z+6w^2z^2-4wz^3+z^4=0$$
$$w^4-2w^3z+3w^2z^2-2wz^3+z^4=0$$

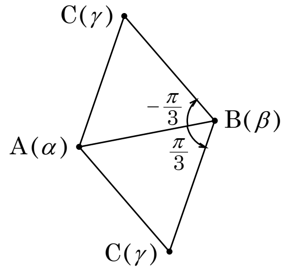
$z=\alpha-\beta\neq 0$なので，$\left(\frac{w}{z}\right)^4-2\left(\frac{w}{z}\right)^3+3\left(\frac{w}{z}\right)^2-2\left(\frac{w}{z}\right)+1=0$

さらに，$x=\frac{w}{z}$とおくと，$x^4-2x^3+3x^2-2x+1=0$となり，①に一致する。

(1)から，$\frac{w}{z}=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}=\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$となり，

$$\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}=\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\ \text{（複号同順）}$$

したがって，点$\mathrm{C}(\gamma)$は，点$\mathrm{A}(\alpha)$を点$\mathrm{B}(\beta)$のまわりに$\pm\frac{\pi}{3}$だけ回転した点なので，これより$\triangle\mathrm{ABC}$ は正三角形である。



［解 説］

複素数平面上の図形についての問題です。予想通り，(1)の設問は(2)の誘導になっていました。

$\boxed{3}$ ［九州大］

α を実数とする。数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = \alpha\ ,\ \ a_{n+1} = |a_n - 1| + a_n - 1\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定められるとき，以下の問いに答えよ。

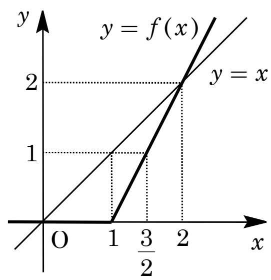
(1) $\alpha \leqq 1$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の収束，発散を調べよ。

(2) $\alpha > 2$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の収束，発散を調べよ。

(3) $1 < \alpha < \dfrac{3}{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の収束，発散を調べよ。

(4) $\dfrac{3}{2} \leqq \alpha < 2$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の収束，発散を調べよ。

３　　　　［九州大］



$a_1=\alpha$ ，$a_{n+1}=\left|a_n-1\right|+a_n-1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められる数列$\{a_n\}$に対して，

$a_n \geqq 1$ のとき，$a_{n+1}=(a_n-1)+a_n-1=2a_n-2$

$a_n<1$ のとき，$a_{n+1}=-(a_n-1)+a_n-1=0$

ここで，$f(x)=\left|x-1\right|+x-1$ とおくと，$a_{n+1}=f(a_n)$ となり，このとき右図を参考に数列$\{a_n\}$の収束，発散を調べる。

(1)　$\alpha \leqq 1$ のとき，$a_2=f(a_1)=f(\alpha)=0$ となり，帰納的に $a_n=0$ $(n \geqq 2)$ より，

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0$$

(2)　$\alpha>2$ のとき，$a_2=f(a_1)=f(\alpha)=2\alpha-2>2$ となり，帰納的に $a_n>2$ なので，

$$a_{n+1}=2a_n-2$$

$a_{n+1}-2=2(a_n-2)$ と変形すると，$a_n-2=(a_1-2)\cdot 2^{n-1}=(\alpha-2)\cdot 2^{n-1}$

よって，$a_n=(\alpha-2)\cdot 2^{n-1}+2$ となり，$\alpha-2>0$ から $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ である。

(3)　$1<\alpha<\dfrac{3}{2}$ のとき，$a_2=f(a_1)=f(\alpha)=2\alpha-2$ から，$0<a_2<1$ である。

これより，$a_3=f(a_2)=0$ となり，帰納的に $a_n=0$ $(n \geqq 3)$ より，

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0$$

(4)　$\dfrac{3}{2} \leqq \alpha<2$ のとき，どんな n に対しても $a_n \geqq 1$ と仮定すると $a_{n+1}=2a_n-2$ から，

$$a_n=(\alpha-2)\cdot 2^{n-1}+2 \geqq 1$$

このとき，$1 \geqq (2-\alpha)\cdot 2^{n-1}$ となり，$0<2-\alpha \leqq \dfrac{1}{2}$ から，

$$2^{n-1} \leqq \frac{1}{2-\alpha} \cdots\cdots\cdots (*)$$

ところが，どんな n に対しても$(*)$が成り立つことはない。

したがって，ある n に対して $a_n<1$ となり，その n の最小値を $n=n_0$ とおくと，$a_{n_0}<1$ である。

すると，$a_{n_0+1}=f(a_{n_0})=0$ となり，帰納的に $a_n=0$ $(n \geqq n_0+1)$ より，

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0$$

［解　説］

漸化式で与えられた数列の極限の問題です。解答例の冒頭の図をもとに極限を調べています。(4)は，n がある程度大きくなれば，そのうち $a_n<1$ となる a_n が現れてくることを示しています。

$\boxed{4}$ ［広島大］

数列$\{a_n\}$を，$a_1=2$，$a_{n+1}=\left(\dfrac{n^6(n+1)}{a_n{}^3}\right)^2$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$により定める。また，$b_n=\log_2\dfrac{a_n}{n^2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおく。次の問いに答えよ。必要ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n\log_2 n}{6^{2n}}=0$ であることを用いてよい。

(1) b_1，b_2を求めよ。

(2) 数列$\{b_n\}$は等比数列であることを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\log_2 k=0$ であることを示せ。

(4) 極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\log_2 a_{2k}$ を求めよ。

$\boxed{4}$ ［広島大］

(1) $a_1=2$，$a_{n+1}=\left(\dfrac{n^6(n+1)}{a_n^{\ 3}}\right)^2$ に対し，$b_n=\log_2\dfrac{a_n}{n^2}$ とおくと，$b_1=\log_2\dfrac{a_1}{1^2}=1$

また，$a_2=\left(\dfrac{1^6\cdot 2}{a_1^{\ 3}}\right)^2=\left(\dfrac{2}{8}\right)^2=\dfrac{1}{2^4}$ から，$b_2=\log_2\dfrac{a_2}{2^2}=\log_2\dfrac{1}{2^6}=-6$

(2) $b_{n+1}=\log_2\dfrac{a_{n+1}}{(n+1)^2}=\log_2\left\{\left(\dfrac{n^6(n+1)}{a_n^{\ 3}}\right)^2\cdot\dfrac{1}{(n+1)^2}\right\}=\log_2\left(\dfrac{n^6}{a_n^{\ 3}}\right)^2$

$$=\log_2\left(\frac{n^2}{a_n}\right)^6=\log_2\left(\frac{a_n}{n^2}\right)^{-6}=-6\log_2\frac{a_n}{n^2}=-6b_n$$

これより，数列$\{b_n\}$は公比-6の等比数列である。

(3) $1\leqq k\leqq n$ のとき，$0=\log_2 1\leqq\log_2 k\leqq\log_2 n$ となり，

$$0\leqq\sum_{k=1}^{n}\log_2 k\leqq\sum_{k=1}^{n}\log_2 n=n\log_2 n,\quad 0\leqq\frac{1}{6^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\log_2 k\leqq\frac{n\log_2 n}{6^{2n}}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n\log_2 n}{6^{2n}}=0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\log_2 k=0$ ………(＊)

(4) (1)(2)より，$b_n=b_1(-6)^{n-1}=(-6)^{n-1}$ となり，$\log_2\dfrac{a_n}{n^2}=(-6)^{n-1}$ から，

$$\log_2 a_n-\log_2 n^2=(-6)^{n-1},\quad \log_2 a_n=2\log_2 n+(-6)^{n-1}$$

これより，$\log_2 a_{2n}=2\log_2(2n)+(-6)^{2n-1}=2+2\log_2 n-6^{2n-1}$ となり，

$$\sum_{k=1}^{n}\log_2 a_{2k}=\sum_{k=1}^{n}(2+2\log_2 k-6^{2k-1})=2n+2\sum_{k=1}^{n}\log_2 k-\frac{6(36^n-1)}{36-1}$$

$$=2n+2\sum_{k=1}^{n}\log_2 k-\frac{6}{35}(6^{2n}-1)$$

$$\frac{1}{6^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\log_2 k=\frac{2n}{6^{2n}}+\frac{2}{6^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\log_2 k-\frac{6}{35}\cdot\frac{6^{2n}-1}{6^{2n}}$$

(＊)と，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{6^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\log_2 n}{6^{2n}}\cdot\frac{2}{\log_2 n}=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{6^{2n}-1}{6^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{6^{2n}}\right)=1$ より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\log_2 a_{2k}=-\frac{6}{35}$$

［解 説］

漸化式と極限についての問題です。ただ，飛躍した誘導がないので，見かけほどではありません。

$\boxed{5}$　［大阪大］

n を 2 以上の自然数とする。

(1)　$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{2}x^n \leqq (-1)^n\left\{\frac{1}{x+1}-1-\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}\right\} \leqq x^n-\frac{1}{2}x^{n+1}$$

(2)　$a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ とするとき，次の極限値を求めよ。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-1)^n n(a_n-\log 2)$

5 ［大阪大］

(1)　$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$F(x)=\dfrac{1}{x+1}-1-\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}$ とおくと，

$$F(x)=\frac{1}{x+1}-1-\frac{(-x)\{1-(-x)^{n-1}\}}{1-(-x)}=\frac{-x}{x+1}-\frac{-x-(-x)^n}{1+x}=\frac{(-x)^n}{x+1}$$

すると，$(-1)^n F(x)=(-1)^n\dfrac{(-x)^n}{x+1}=\dfrac{x^n}{x+1}$ となり，

$$\frac{x^n}{x+1}-\frac{1}{2}x^n=\frac{x^n\{2-(x+1)\}}{2(x+1)}=\frac{x^n(1-x)}{2(x+1)}\geqq 0$$

$$\frac{x^n}{x+1}-x^n+\frac{1}{2}x^{n+1}=\frac{x^n\{2-2(x+1)+x(x+1)\}}{2(x+1)}=\frac{x^{n+1}(x-1)}{2(x+1)}\leqq 0$$

よって，$\dfrac{1}{2}x^n \leqq (-1)^n F(x) \leqq x^n-\dfrac{1}{2}x^{n+1}$ ……①より，

$$\frac{1}{2}x^n \leqq (-1)^n\left\{\frac{1}{x+1}-1-\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}\right\}\leqq x^n-\frac{1}{2}x^{n+1}$$

(2)　①の各辺を 0 から 1 まで積分すると，

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x^n dx \leqq (-1)^n\int_0^1 F(x)dx \leqq \int_0^1\left(x^n-\frac{1}{2}x^{n+1}\right)dx \cdots\cdots\cdots ②$$

すると，$\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 x^n dx=\dfrac{1}{2(n+1)}$，$\displaystyle\int_0^1\left(x^n-\frac{1}{2}x^{n+1}\right)dx=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{2(n+2)}$ となり，

$$\int_0^1 F(x)dx=\int_0^1\left\{\frac{1}{x+1}-1-\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}\right\}dx$$

$$=\Big[\log|x+1|-x\Big]_0^1-\int_0^1\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}dx=\log 2-1-\sum_{k=2}^{n}\int_0^1(-x)^{k-1}dx$$

$$=\log 2-1-\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\Big[x^k\Big]_0^1=\log 2-1-\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

ここで，$a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ とするとき，$a_n=1+\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ なので，

$$\int_0^1 F(x)dx=\log 2-a_n$$

②から，$\dfrac{1}{2(n+1)}\leqq(-1)^n(\log 2-a_n)\leqq\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{2(n+2)}$ となり，

$$-\frac{n}{n+1}+\frac{n}{2(n+2)}\leqq(-1)^n n(a_n-\log 2)\leqq-\frac{n}{2(n+1)}$$

$n\to\infty$ のとき，$-\dfrac{n}{2(n+1)}\to-\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{n}{n+1}+\dfrac{n}{2(n+2)}\to-1+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}$ なので，

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n n(a_n-\log 2)=-\frac{1}{2}$$

［解　説］

不等式と極限計算という，阪大で頻出タイプの問題です。ポイントは②式ですが，(2)の $\log 2$ に着目すれば方針は立つでしょう。

6 ［千葉大］

2 つの実数 $a,\ b$ は $0<b<a$ を満たすとする。関数 $f(x)=\dfrac{1}{b}\left(e^{-(a-b)x}-e^{-ax}\right)$ の最大値を $M(a,\ b)$, 最大値をとるときの x の値を $X(a,\ b)$ と表す。ここで, e は自然対数の底である。

(1) $X(a,\ b)$ を求めよ。

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{b\to+0}X(a,\ b)$ を求めよ。

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{b\to+0}M(a,\ b)$ を求めよ。

6　　［千葉大］

(1)　$0<b<a$ のとき，$f(x)=\dfrac{1}{b}(e^{-(a-b)x}-e^{-ax})=\dfrac{1}{b}e^{-ax}(e^{bx}-1)$ に対して，

$$f'(x)=-\frac{a}{b}e^{-ax}(e^{bx}-1)+\frac{1}{b}e^{-ax}\cdot be^{bx}=-\frac{1}{b}e^{-ax}\{(a-b)e^{bx}-a\}$$

$f'(x)=0$ の解は，$e^{bx}=\dfrac{a}{a-b}$ より $x=\dfrac{1}{b}\log\dfrac{a}{a-b}$ であり，ここで $\alpha=\dfrac{1}{b}\log\dfrac{a}{a-b}$ とおき，$f(x)$ の増減を調べると右表のようになる。

x	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

すると，$f(x)$ は $x=\alpha$ のとき最大値をとるので，$X(a,\ b)=\alpha=\dfrac{1}{b}\log\dfrac{a}{a-b}$

(2)　$\displaystyle\lim_{b\to+0}X(a,\ b)=\lim_{b\to+0}\frac{1}{b}\log\frac{a}{a-b}=-\lim_{b\to+0}\frac{1}{b}\log\frac{a-b}{a}=-\lim_{b\to+0}\frac{1}{b}\log\left(1-\frac{b}{a}\right)$

ここで，$t=-\dfrac{b}{a}$ とおくと，$b\to+0$ のとき $t\to-0$ となり，

$$\lim_{b\to+0}X(a,\ b)=-\lim_{t\to-0}\frac{1}{-at}\log(1+t)=\frac{1}{a}\lim_{t\to-0}\frac{\log(1+t)}{t}$$

さて，$g(t)=\log(1+t)$ とすると，$g'(t)=\dfrac{1}{1+t}$ から $g'(0)=1$ となり，

$$\lim_{t\to0}\frac{g(t)-g(0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\log(1+t)}{t}=1$$

したがって，$\displaystyle\lim_{b\to+0}X(a,\ b)=\frac{1}{a}\cdot1=\frac{1}{a}$ である。

(3)　$M(a,\ b)=f(\alpha)=\dfrac{1}{b}e^{-a\alpha}(e^{b\alpha}-1)=\alpha e^{-a\alpha}\cdot\dfrac{e^{b\alpha}-1}{b\alpha}$ となり，(2)から，$b\to+0$ のとき $\alpha\to\dfrac{1}{a}$，$a\alpha\to1$，$b\alpha\to+0$ なので，

$$\lim_{b\to+0}M(a,\ b)=\frac{1}{a}\cdot e^{-1}\cdot1=\frac{1}{ea}$$

［解 説］

関数の極限の問題です。(2)は，少し試行錯誤して，微分係数の定義式を利用するように変形をしました。(3)も同様です。

$\boxed{7}$ ［筑波大］

$f(x)=x^{-2}e^{x}\ (x>0)$ とし，曲線 $y=f(x)$ を C とする。また h を正の実数とする。さらに，正の実数 t に対して，曲線 C，2 直線 $x=t$，$x=t+h$，および x 軸で囲まれた図形の面積を $g(t)$ とする。

(1)　$g'(t)$ を求めよ。

(2)　$g(t)$ を最小にする t がただ 1 つ存在することを示し，その t を h を用いて表せ。

(3)　(2)で得られた t を $t(h)$ とする。このとき極限値 $\displaystyle\lim_{h\to+0} t(h)$ を求めよ。

$\boxed{7}$　　［筑波大］

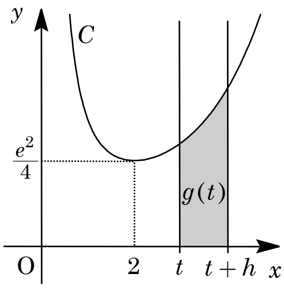
(1)　$f(x)=x^{-2}e^{x}$に対して,

$$f'(x)=-2x^{-3}e^{x}+x^{-2}e^{x}=x^{-3}e^{x}(-2+x)$$

これより，$f(x)$の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	×	$-$	0	$+$
$f(x)$	×	↘	$\dfrac{e^2}{4}$	↗

そして，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ に注意すると，右図が曲線$C: y=f(x)$の概形である。



さて，$h>0$，$t>0$ のとき，曲線 C, 2 直線 $x=t$，$x=t+h$，および x 軸で囲まれた図形の面積 $g(t)$ は，$F'(x)=f(x)$とおくと，

$$g(t)=\int_{t}^{t+h}f(x)dx=F(t+h)-F(t)$$

$$\begin{aligned}g'(t)&=F'(t+h)\cdot 1-F'(t)=f(t+h)-f(t)\\&=(t+h)^{-2}e^{t+h}-t^{-2}e^{t}=t^{-2}(t+h)^{-2}e^{t}\{t^2e^h-(t+h)^2\}\\&=t^{-2}(t+h)^{-2}e^{t}\{(e^h-1)t^2-2ht-h^2\}\end{aligned}$$

(2)　$h(t)=(e^h-1)t^2-2ht-h^2$ とおくと，(1)から，$g'(t)=t^{-2}(t+h)^{-2}e^{t}h(t)$となる。

ここで，$h>0$より，$e^h-1>0$かつ$h(0)=-h^2<0$となり，$h(t)=0$は$t>0$にただ1つの解をもち，これを$t=\alpha$とおくと，

$$\alpha=\frac{h+\sqrt{h^2+(e^h-1)h^2}}{e^h-1}=\frac{h+\sqrt{e^hh^2}}{e^h-1}=\frac{h\left(1+e^{\frac{h}{2}}\right)}{\left(e^{\frac{h}{2}}-1\right)\left(e^{\frac{h}{2}}+1\right)}=\frac{h}{e^{\frac{h}{2}}-1}$$

$g'(t)$の符号と$h(t)$の符号は一致することより，$g(t)$の増減は右表のようになる。

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$g'(t)$	×	$-$	0	$+$
$g(t)$	×	↘		↗

よって，$g(t)$を最小にする t はただ 1 つ存在し，その値は$t=\alpha=\dfrac{h}{e^{\frac{h}{2}}-1}$である。

(3)　$t(h)=\dfrac{h}{e^{\frac{h}{2}}-1}$から$h'=\dfrac{h}{2}$とおくと，$h\to+0$のとき$h'\to+0$となり，

$$\lim_{h\to+0}t(h)=\lim_{h'\to+0}\frac{2h'}{e^{h'}-1}=2\lim_{h'\to+0}\frac{h'}{e^{h'}-1}=2$$

［解　説］

微分と増減の問題に関数の極限を融合した問題です。(1)で記した曲線 C の概形は必須ではありませんが，(3)の結果を予想するのには役立ちます。

$\boxed{8}$ ［金沢大］

関数 $F(x)=\sin x-\log(1+x)$ と $f(x)=F'(x)$ を考える。次の問いに答えよ。

(1) $f'(\alpha)=0$ となる α が開区間 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ に 1 つだけあることを示せ。

(2) $f(\beta)=0$ となる β が開区間 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ に 1 つだけあることを示せ。

(3) 開区間 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ において，$F(x)>0$ であることを示せ。ただし，自然対数の底 e が $e>2.7$ を満たすことを用いてもよい。

(4) $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲において，曲線 $y=\sin x$，曲線 $y=\log(1+x)$，および直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

8　　［金沢大］

(1)　$F(x)=\sin x-\log(1+x)$ に対して，$f(x)=F'(x)=\cos x-\dfrac{1}{1+x}$ となり，

$$f'(x)=-\sin x+\frac{1}{(1+x)^2},\quad f''(x)=-\cos x-\frac{2}{(1+x)^3}$$

すると，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において $f''(x)<0$ となり，$f'(x)$ は単調に減少し，

$$f'(0)=1,\quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1+\left(\frac{2}{2+\pi}\right)^2<0$$

よって，$f'(\alpha)=0$ となる α が開区間 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ に 1 つだけある。

(2)　(1)より，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲において，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗		↘	

そして，$f(0)=0$ から $f(\alpha)>0$ となり，

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{2}{2+\pi}<0$$

よって，$f(\beta)=0$ となる β が開区間 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ に 1 つだけある。

(3)　$F'(x)=f(x)$ なので，(2)より，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲において，$F(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	β	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$	0	↗		↘	

そして，$F(0)=0$ で，

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\log\frac{2+\pi}{2}=\log\frac{2e}{2+\pi}>\log\frac{2\times2.7}{2+3.2}=\log\frac{5.4}{5.2}>\log 1=0$$

よって，開区間 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ において $F(x)>0$ である。

(4)　(3)より，$F(0)=0$ で，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において $F(x)>0$ なので，2 曲線 $y=\sin x$，$y=\log(1+x)$ と直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ で囲まれた図形の面積 S は，

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{\sin x-\log(1+x)\}dx$$

$$=-\Big[\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\Big[(1+x)\log(1+x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx$$

$$=-(-1)-\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\log\left(1+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\left\{1-\log\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

［解　説］

微分法の不等式への応用問題です。丁寧な誘導に従うと，(3)の証明まで到達します。

$\boxed{9}$ ［名古屋大］

(1) 方程式 $e^x=\dfrac{2x^3}{x-1}$ の負の実数解の個数を求めよ。

(2) $y=x(x^2-3)$ と $y=e^x$ のグラフの $x<0$ における共有点の個数を求めよ。

(3) a を正の実数とし，関数 $f(x)=x(x^2-a)$ を考える。$y=f(x)$ と $y=e^x$ のグラフの $x<0$ における共有点は 1 個のみであるとする。このような a がただ 1 つ存在することを示せ。

$\boxed{9}$　　［名古屋大］

(1)　方程式$e^x=\dfrac{2x^3}{x-1}\ (x<0)$……①に対して，$(x-1)e^x-2x^3=0$

ここで，$g(x)=(x-1)e^x-2x^3$とおくと，①は$g(x)=0$となり，

$$g'(x)=e^x+(x-1)e^x-6x^2=xe^x-6x^2=x(e^x-6x)$$

$x<0$において，$6x<0<e^x$から$g'(x)<0$となるので，$g(x)$は単調に減少し，

$$g(0)=-e^0=-1,\ g(-1)=-2e^{-1}+2=2(1-e^{-1})>0$$

よって，①の実数解の個数は 1 個である。

(2)　$y=x(x^2-3)$と$y=e^x$のグラフの$x<0$における共有点の個数は，方程式$e^x=x(x^2-3)\ (x<0)$……②の実数解の個数に対応する。

②より，$\dfrac{e^x}{x}=x^2-3$すなわち$\dfrac{e^x}{x}-x^2+3=0$として，$h(x)=\dfrac{e^x}{x}-x^2+3$とおく。

$$h'(x)=\frac{xe^x-e^x}{x^2}-2x=\frac{x-1}{x^2}e^x-2x=\frac{1}{x^2}\{(x-1)e^x-2x^3\}=\frac{g(x)}{x^2}$$

そこで，①の実数解を$x=\alpha$とおくと，$-1<\alpha<0$であり，これより$x<0$における$h(x)$の増減は右表のようになり，

x	$\cdots$	α	$\cdots$	0
$h'(x)$	$+$	0	$-$	
$h(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	

$$\lim_{x\to-\infty}h(x)=-\infty,\ \lim_{x\to-0}h(x)=-\infty$$

さらに，$h(-1)=-e^{-1}-1+3=2-e^{-1}>0$から，$h(\alpha)>h(-1)>0$である。

したがって，$h(x)=0\ (x<0)$，すなわち②の実数解は 2 個となり，求める共有点の個数は 2 個である。

(3)　$a>0$のとき$f(x)=x(x^2-a)$に対して，$y=f(x)$と$y=e^x$のグラフの$x<0$における共有点が 1 個であるのは，(2)と同様にして，$e^x=x(x^2-a)\ (x<0)$……③の実数解が 1 個に対応する。

③より，$\dfrac{e^x}{x}-x^2+a=0$として$H(x)=\dfrac{e^x}{x}-x^2+a$とおくと，$h(x)$と同様に，$H(x)$は$x=\alpha$で極大値をとるので，③の実数解が 1 個の条件は$H(\alpha)=0$となり，

$$\frac{e^\alpha}{\alpha}-\alpha^2+a=0,\ a=\alpha^2-\frac{e^\alpha}{\alpha}\cdots\cdots\cdots④$$

そして，$g(\alpha)=0$から$e^\alpha=\dfrac{2\alpha^3}{\alpha-1}$となり，④から，

$$a=\alpha^2-\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{2\alpha^3}{\alpha-1}=\alpha^2-\frac{2\alpha^2}{\alpha-1}=\alpha^2\cdot\frac{\alpha-3}{\alpha-1}>0$$

よって，$x<0$における③の実数解が 1 個になる正の実数aはただ 1 つ存在する。

［解 説］

微分の応用の問題です。(2)で(1)をどのように利用するかが鍵になっています。

$\boxed{10}$ ［北海道大］

以下の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底を表す。

(1) k を実数の定数とし，$f(x)=xe^{-x}$ とおく。方程式 $f(x)=k$ の異なる実数解の個数を求めよ。ただし，$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ を用いてもよい。

(2) $xye^{-(x+y)}=c$ をみたす正の実数 x, y の組がただ 1 つ存在するときの実数 c の値を求めよ。

(3) $xye^{-(x+y)}=\dfrac{3}{e^4}$ をみたす正の実数 x, y を考えるとき, y のとりうる値の最大値とそのときの x の値を求めよ。

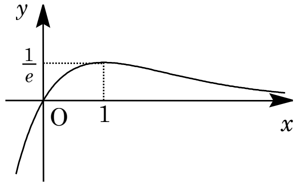
10 ［北海道大］

(1) $f(x)=xe^{-x}$ に対して，

$$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$

これより，$f(x)$の増減は右表のようになり，$f(0)=0$ および $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ に注意すると，$y=f(x)$のグラフの概形は右図のようになる。



さて，k を実数の定数として，方程式$f(x)=k$の異なる実数解の個数は，$y=f(x)$のグラフと直線 $y=k$ の異なる共有点の個数に対応するので，

$$k>\frac{1}{e}\text{のとき 0 個，}k=\frac{1}{e}\text{または}k\leqq 0\text{のとき 1 個，}0<k<\frac{1}{e}\text{のとき 2 個}$$

(2) $xye^{-(x+y)}=c$ ……①をみたす正の実数 x, y の組がただ 1 つ存在するのは，①から，

$$xe^{-x}\cdot ye^{-y}=c,\ f(x)f(y)=c\ \cdots\cdots②$$

ここで，$y>0$ から $f(y)>0$ となり，②より $f(x)=\dfrac{c}{f(y)}$ ………③

まず，$x>0$ から $f(x)>0$ となり，③をみたす $x>0$ がただ 1 つ存在する条件は，

$$\frac{c}{f(y)}=\frac{1}{e},\ f(y)=ec\ \cdots\cdots④$$

そして，④をみたす $y>0$ がただ 1 つ存在する条件は，$ec=\dfrac{1}{e}\left(c=\dfrac{1}{e^2}\right)$となる。

よって，①をみたす正の実数 x, y の組がただ 1 つ存在する c の値は$c=\dfrac{1}{e^2}$である。

(3) $xye^{-(x+y)}=\dfrac{3}{e^4}$ すなわち $f(x)f(y)=\dfrac{3}{e^4}$ ……⑤をみたす正の実数 x, y を考える。

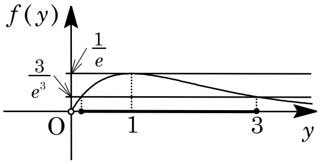
まず，$y>0$ から $0<f(y)\leqq\dfrac{1}{e}$ において，⑤より $f(y)=\dfrac{3}{e^4f(x)}$ となる。

すると，$x>0$ から $0<f(x)\leqq\dfrac{1}{e}$ であるので，$f(y)=\dfrac{3}{e^4f(x)}\geqq\dfrac{3}{e^4}\cdot e=\dfrac{3}{e^3}$

したがって，$f(y)$のとりうる値の範囲は，$0<f(y)\leqq\dfrac{1}{e}$ かつ $f(y)\geqq\dfrac{3}{e^3}$ となり，$\dfrac{3}{e^3}<\dfrac{1}{e}$ に注意すると，

$$\frac{3}{e^3}\leqq f(y)\leqq\frac{1}{e}\ \cdots\cdots⑥$$

ここで，$f(y)=\dfrac{3}{e^3}$ すなわち $\dfrac{y}{e^y}=\dfrac{3}{e^3}$ の解の 1 つは $y=3$ となるので，⑥をみたす y のとりうる値の最大値は，右図から $y=3$ である。



このとき，⑤から $f(x)=\dfrac{3}{e^4}\cdot\dfrac{e^3}{3}=\dfrac{1}{e}$ となり，$x=1$ である。

［解 説］

微分と増減のやや難な問題です。(1)はよく見かける基本題です。(2)と(3)の 2 変数の方程式は, (1)の結果を誘導とみなしてアプローチするものです。

$\boxed{11}$ ［東京工大］

実数 $\displaystyle\int_0^{2023} \frac{2}{x+e^x}\,dx$ の整数部分を求めよ。

11 ［東京工大］

$0 \leqq x \leqq 2023$ において，$f(x)=\dfrac{2}{x+e^x}$，$I=\displaystyle\int_0^{2023} f(x)dx$ とおく。

すると，$0<f(x)\leqq\dfrac{2}{e^x}=2e^{-x}$ より，

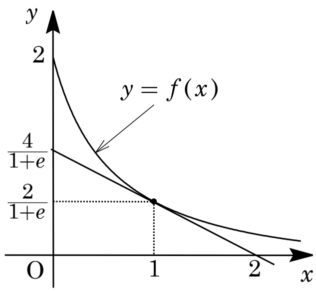
$$0<I\leqq\int_0^{2023}2e^{-x}\,dx=-2\big[\,e^{-x}\,\big]_0^{2023}=2(1-e^{-2023})<2\cdots\cdots\cdots①$$

また，$f'(x)=-\dfrac{2(1+e^x)}{(x+e^x)^2}<0$ となり，$f(x)$ は単調に減少する。

$$f''(x)=-2\cdot\frac{e^x(x+e^x)^2-2(1+e^x)^2(x+e^x)}{(x+e^x)^4}=-2\cdot\frac{e^x(x+e^x)-2(1+e^x)^2}{(x+e^x)^3}$$

$$=2\cdot\frac{e^{2x}-(x-4)e^x+2}{(x+e^x)^3}=2\cdot\frac{e^x\{e^x-(x-4)\}+2}{(x+e^x)^3}$$

ここで，$e^x\geqq x+1$ より $e^x>x-4$ となり，$f''(x)>0$ である。これより，$y=f(x)$ のグラフは下に凸であり，その概形は右図のようになる。



さて，このグラフ上の点 $\left(1,\ \dfrac{2}{1+e}\right)$ における接線の方程式は，$f'(1)=-\dfrac{2}{1+e}$ より $y-\dfrac{2}{1+e}=-\dfrac{2}{1+e}(x-1)$ となり，

$$y=-\frac{2}{1+e}x+\frac{4}{1+e}$$

すると，この接線は x 切片が 2，y 切片が $\dfrac{4}{1+e}$ となり，

$$I>\int_0^2 f(x)dx>\frac{1}{2}\cdot2\cdot\frac{4}{1+e}=\frac{4}{1+e}>1\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$1<I<2$ となるので，I の整数部分は 1 である。

［解 説］

誘導のない定積分と不等式の問題です。まず，x が大きくなると $e^x\gg x$ というイメージから①の評価式を導きました。これより，結論は 1 と予測できるので，あとは I が 1 より大をいかに示すかということで，グラフを考えたわけです。

$\boxed{12}$ ［大阪公大］

次の問いに答えよ。

(1) a, b は実数とし，$f(x)$ は a, b が属する開区間で定義された関数とする。$f(x)$ が連続な第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつとき，次の等式を証明せよ。

$$\int_a^b (b-x)(x-a)f''(x)\,dx=(b-a)(f(a)+f(b))-2\int_a^b f(x)\,dx$$

(2) t を正の実数とする。次の不等式を証明せよ。

$$0\leqq\int_t^{t+1}\log x\,dx-\frac{1}{2}(\log t+\log(t+1))\leqq\frac{1}{8}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)$$

(3) 次で定まる数列 $\{a_n\}$ に対し，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\log n}$ を求めよ。

$$a_n=\log(n!)-n\log n+n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

12　　［大阪公大］

(1)　$I=\int_a^b (b-x)(x-a)f''(x)\,dx$ とおくと，

$$I=\Big[(b-x)(x-a)f'(x)\Big]_a^b-\int_a^b(-x+a+b-x)f'(x)\,dx$$

$$=\int_a^b(2x-a-b)f'(x)\,dx=\Big[(2x-a-b)f(x)\Big]_a^b-\int_a^b 2f(x)\,dx$$

$$=(b-a)f(b)-(a-b)f(a)-2\int_a^b f(x)\,dx$$

$$=(b-a)(f(a)+f(b))-2\int_a^b f(x)\,dx\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　①で $a=t$，$b=t+1$，$f(x)=\log x$ とおくと，$f'(x)=\dfrac{1}{x}$，$f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ となり，

$$-\int_t^{t+1}\frac{(t+1-x)(x-t)}{x^2}dx=(t+1-t)(\log t+\log(t+1))-2\int_t^{t+1}\log x\,dx$$

$$\int_t^{t+1}\log x\,dx-\frac{1}{2}(\log t+\log(t+1))=\int_t^{t+1}\frac{(t+1-x)(x-t)}{2x^2}dx\cdots\cdots\cdots②$$

すると，$\dfrac{(t+1-x)(x-t)}{2x^2}=\dfrac{-x^2+(2t+1)x-t^2-t}{2x^2}=\dfrac{1}{2x^2}\Big\{-\Big(x-\dfrac{2t+1}{2}\Big)^2+\dfrac{1}{4}\Big\}$

から，$0<t\leqq x\leqq t+1$ において，

$$0\leqq\frac{(t+1-x)(x-t)}{2x^2}\leqq\frac{1}{2x^2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8x^2}$$

この不等式の各辺を t から $t+1$ まで積分すると，

$$0\leqq\int_t^{t+1}\frac{(t+1-x)(x-t)}{2x^2}dx\leqq\int_t^{t+1}\frac{1}{8x^2}dx=-\frac{1}{8}\Big[\frac{1}{x}\Big]_t^{t+1}=\frac{1}{8}\Big(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\Big)$$

②より，$0\leqq\displaystyle\int_t^{t+1}\log x\,dx-\frac{1}{2}(\log t+\log(t+1))\leqq\frac{1}{8}\Big(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\Big)\cdots\cdots\cdots③$

(3)　t を自然数とし，$n\geqq 3$ で，③の各辺を $t=1$ から $t=n-1$ まで和をとると，

$$0\leqq\sum_{t=1}^{n-1}\Big\{\int_t^{t+1}\log x\,dx-\frac{1}{2}(\log t+\log(t+1))\Big\}\leqq\frac{1}{8}\sum_{t=1}^{n-1}\Big(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\Big)\cdots\cdots\cdots④$$

$$\sum_{t=1}^{n-1}\Big\{\int_t^{t+1}\log x\,dx-\frac{1}{2}(\log t+\log(t+1))\Big\}$$

$$=\int_1^n\log x\,dx-\frac{1}{2}\log 1-(\log 2+\log 3+\cdots+\log(n-1))-\frac{1}{2}\log n$$

$$=\Big[x\log x-x\Big]_1^n-\log(n!)+\frac{1}{2}\log n=n\log n-n+1-\log(n!)+\frac{1}{2}\log n$$

ここで，$a_n=\log(n!)-n\log n+n$ より，

$$n\log n-n+1-\log(n!)+\frac{1}{2}\log n=-a_n+1+\frac{1}{2}\log n$$

また，$\dfrac{1}{8}\displaystyle\sum_{t=1}^{n-1}\Big(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\Big)=\frac{1}{8}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)$ なので，④より，

$$0 \leqq -a_n + 1 + \frac{1}{2}\log n \leqq \frac{1}{8}\Bigl(1 - \frac{1}{n}\Bigr)$$

すると，$1 + \frac{1}{2}\log n - \frac{1}{8}\Bigl(1 - \frac{1}{n}\Bigr) \leqq a_n \leqq 1 + \frac{1}{2}\log n$ となり，

$$\frac{1}{\log n} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8\log n}\Bigl(1 - \frac{1}{n}\Bigr) \leqq \frac{a_n}{\log n} \leqq \frac{1}{\log n} + \frac{1}{2}$$

したがって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\log n} = \frac{1}{2}$ である。

［解　説］

定積分と不等式に極限計算を組み合わせた典型題です。適当な距離感のある誘導で構成され，要演習の１題となるでしょう。

$\boxed{13}$ ［東京大］

(1) 正の整数 k に対し，$A_k=\displaystyle\int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}}\left|\sin(x^2)\right|dx$ とおく。次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}}\leqq A_k\leqq\frac{1}{\sqrt{k\pi}}$$

(2) 正の整数 n に対し，$B_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{2n\pi}}\left|\sin(x^2)\right|dx$ とおく。極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}B_n$ を求めよ。

13　　［東京大］

(1)　$A_k=\int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}}\left|\sin(x^2)\right|dx$ に対し，$x^2=t\ (x=\sqrt{t})$ とおくと，$2xdx=dt$ から，

$$A_k=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\sin t\right|\cdot\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\left|\sin t\right|}{2\sqrt{t}}dt$$

さて，$k\pi\leqq t\leqq(k+1)\pi$ において，$\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}}\leqq\frac{1}{\sqrt{t}}\leqq\frac{1}{\sqrt{k\pi}}$ から，

$$\frac{\left|\sin t\right|}{2\sqrt{(k+1)\pi}}\leqq\frac{\left|\sin t\right|}{2\sqrt{t}}\leqq\frac{\left|\sin t\right|}{2\sqrt{k\pi}}$$

上式の各辺を，$k\pi$ から $(k+1)\pi$ まで積分することにより，

$$\frac{1}{2\sqrt{(k+1)\pi}}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\sin t\right|dt\leqq A_k\leqq\frac{1}{2\sqrt{k\pi}}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\sin t\right|dt\ \cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$k\pi\leqq t\leqq(k+1)\pi$ において，$\sin t$ の符号変化はないので，

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\sin t\right|dt=\left|\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\sin t\,dt\right|=\left|-\left[\cos t\right]_{k\pi}^{(k+1)\pi}\right|$$

$$=\left|-\cos(k+1)\pi+\cos k\pi\right|=\left|-(-1)^{k+1}+(-1)^k\right|=\left|(-1)^k\right|\left|-(-1)+1\right|=2$$

したがって，①より，$\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}}\leqq A_k\leqq\frac{1}{\sqrt{k\pi}}\ \cdots\cdots\cdots②$

(2)　$\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{2n\pi}}\left|\sin(x^2)\right|dx=\sum_{k=n}^{2n-1}\left(\int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}}\left|\sin(x^2)\right|dx\right)=\sum_{k=n}^{2n-1}A_k$ なので，②より，

$$\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}}\leqq\sum_{k=n}^{2n-1}A_k\leqq\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{k\pi}}$$

すると，$B_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{2n\pi}}\left|\sin(x^2)\right|dx$ から，

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}}\leqq B_n\leqq\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{k\pi}}\ \cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$l=k-n$ とおき，$n\to\infty$ のときを考えると，

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{k\pi}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{(n+l)\pi}}=\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{l}{n}\right)\pi}}$$

$$\to\int_0^1\frac{1}{\sqrt{(1+x)\pi}}dx\quad(n\to\infty)$$

また，$m=k+1-n$ とおき，$n\to\infty$ のときを考えると，

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{(n+m)\pi}}=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{m}{n}\right)\pi}}$$

$$\to\int_0^1\frac{1}{\sqrt{(1+x)\pi}}dx\quad(n\to\infty)$$

すると，③から，

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1+x)\pi}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big[\,2\sqrt{(1+x)}\,\Big]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{2}-1)$$

［解 説］

定積分と不等式の設問に区分求積法を組み合わせた標準的な問題です。ただ，いかめしい雰囲気はありますが。

14 ［広島大］

関数 $f(x)=\log\dfrac{3x+3}{x^2+3}$ について，次の問いに答えよ。

(1) $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。ただし，グラフの凹凸は調べなくてよい。

(2) s を定数とするとき，次の x についての方程式(＊)の異なる実数解の個数を調べよ。 (＊) $f(x)=s$

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^3 \frac{2x^2}{x^2+3}dx$ の値を求めよ。

(4) (2)の(＊)が実数解をもつ s に対して，(2)の(＊)の実数解のうち最大のものから最小のものを引いた差を $g(s)$ とする。ただし，(2)の(＊)の実数解が 1 つだけであるときには $g(s)=0$ とする。関数 $f(x)$ の最大値を α とおくとき，定積分 $\displaystyle\int_0^{\alpha} g(s)ds$ の値を求めよ。

14 ［広島大］

(1)　$f(x)=\log\dfrac{3x+3}{x^2+3}$ に対して，$\dfrac{3x+3}{x^2+3}>0$ から $x>-1$ において，

$$f'(x)=\frac{x^2+3}{3x+3}\cdot\frac{3(x^2+3)-(3x+3)\cdot 2x}{(x^2+3)^2}$$
$$=-\frac{x^2+2x-3}{(x+1)(x^2+3)}$$
$$=-\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)(x^2+3)}$$

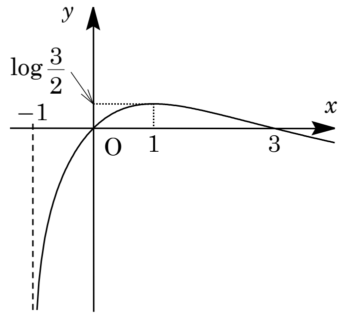
x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\log\dfrac{3}{2}$	$\searrow$

これより，右上表が $f(x)$ の増減である。

そして，$\displaystyle\lim_{x\to-1+0}f(x)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$ であり，$y=f(x)$ と x 軸の交点は $f(x)=0$ から，

$$\log\frac{3x+3}{x^2+3}=0,\quad \frac{3x+3}{x^2+3}=1$$

$3x+3=x^2+3$ から，$x=0,\ 3$ となる。



よって，$y=f(x)$ のグラフの概形は右上図のようになる。

(2)　$f(x)=s$ の異なる実数解の個数は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=s$ の共有点の個数に対応するので，(1)の図より，

$s>\log\dfrac{3}{2}$ のとき 0 個，$s=\log\dfrac{3}{2}$ のとき 1 個，$s<\log\dfrac{3}{2}$ のとき 2 個

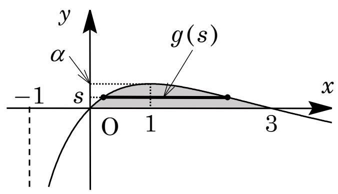
(3)　$I=\displaystyle\int_0^3\frac{2x^2}{x^2+3}dx=\int_0^3\Big(2-\frac{6}{x^2+3}\Big)dx=6-6\int_0^3\frac{1}{x^2+3}dx$ とおく。

ここで，$x=\sqrt{3}\tan\theta\ \Big(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\Big)$ とおくと，$dx=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$ となり，

$$\int_0^3\frac{1}{x^2+3}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{3\tan^2\theta+3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$$

よって，$I=6-6\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi=6-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\pi$ である。

(4)　$\alpha=\log\dfrac{3}{2}$ として $J=\displaystyle\int_0^{\alpha}g(s)ds$ とおくと，右図において，$g(s)$ は太線の線分の長さを表すことから，J の値は網点部の面積に等しい。



$$J=\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3\log\frac{3x+3}{x^2+3}dx$$
$$=\Big[(x+1)\log\frac{3x+3}{x^2+3}\Big]_0^3+\int_0^3(x+1)\cdot\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)(x^2+3)}dx$$
$$=\int_0^3\frac{x^2+2x-3}{x^2+3}dx=\int_0^3\Big(\frac{x^2}{x^2+3}+\frac{2x}{x^2+3}-\frac{3}{x^2+3}\Big)dx$$

(3)より，$J=\dfrac{1}{2}I+\left[\,\log(x^2+3)\,\right]_0^3-3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi$ となり，

$$J=\frac{1}{2}\Big(6-\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi\Big)+\log\frac{12}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi=3+2\log 2-\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi$$

［解 説］

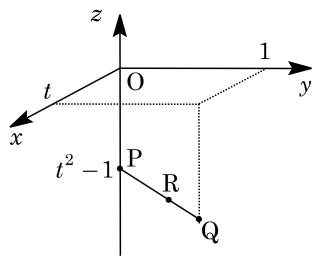
微積分の総合問題です。(1)の $f'(x)$ の式と(3)の定積分を誘導としてみると，(4)の部分積分では，$1=(x+1)'$ という考え方が導けます。

$\boxed{15}$ ［信州大］

t を実数とし，座標空間内の 2 点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ t^2-1)$，$\mathrm{Q}(t,\ 1,\ e^t+e^{-t}-e-e^{-1})$ を考える。t を $-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲で動かすとき，線分 PQ が通過してできる曲面および 2 平面 $y=1$，$z=0$ で囲まれてできる立体の体積を求めよ。

15 ［信州大］

2 点$\mathrm{P}(0,\ 0,\ t^2-1)$，$\mathrm{Q}(t,\ 1,\ e^t+e^{-t}-e-e^{-1})$に対し，$t$を$-1\leqq t\leqq 1$の範囲で動かす。ここで，$0<k\leqq 1$として，線分PQを$k:1-k$に内分する点$\mathrm{R}(x,\ y,\ z)$とおく。



$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$より，$x=kt$，$y=k$

$$z=(1-k)(t^2-1)+k(e^t+e^{-t}-e-e^{-1})$$

これより，点Rは平面$y=k$上で，

$$x=kt\cdots\cdots①,\ \ z=(1-k)(t^2-1)+k(e^t+e^{-t}-e-e^{-1})\cdots\cdots②$$

①より$\dfrac{dx}{dt}=k>0$，②より$\dfrac{dz}{dt}=2(1-k)t+k(e^t-e^{-t})$となり，

$$\frac{d^2z}{dt^2}=2(1-k)+k(e^t+e^{-t})>0$$

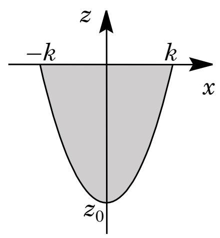
これより，$\dfrac{dz}{dt}$は単調に増加し，$t=0$のとき$\dfrac{dz}{dt}=0$に注意すると，$-1\leqq t\leqq 1$における x, zの増減は右表のようになる。

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$\dfrac{dx}{dt}$		$+$		$+$	
x	$-k$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	k
$\dfrac{dz}{dt}$		$-$	0	$+$	
z	0	$\searrow$	z_0	$\nearrow$	0

なお，$t=0$のとき$z=z_0$とおくと，

$$z_0=-(1-k)+k(2-e-e^{-1})=(3-e-e^{-1})k-1$$

これより，平面$y=k$上での点Rの軌跡は右図の曲線となり，この曲線とx軸で囲まれる図形の面積を$S(k)$とおくと，



$$\begin{aligned}S(k)&=\int_{-k}^{k}(-z)dx\\&=-\int_{-1}^{1}\{(1-k)(t^2-1)+k(e^t+e^{-t}-e-e^{-1})\}k\cdot dt\\&=-2k\int_{0}^{1}\{(1-k)(t^2-1)+k(e^t+e^{-t}-e-e^{-1})\}dt\\&=-2k(1-k)\Big[\frac{t^3}{3}-t\Big]_0^1-2k^2\Big[\ e^t-e^{-t}-et-e^{-1}t\Big]_0^1\\&=-2k(1-k)\Big(-\frac{2}{3}\Big)-2k^2(e-1-e^{-1}+1-e-e^{-1})\\&=\frac{4}{3}(k-k^2)+4e^{-1}k^2=\Big(4e^{-1}-\frac{4}{3}\Big)k^2+\frac{4}{3}k\cdots\cdots\cdots③\end{aligned}$$

③は$k=0$のときも成り立っているので，線分 PQ が通過してできる曲面および 2 平面$y=1$，$z=0$で囲まれてできる立体の体積Vは，

$$\begin{aligned}V&=\int_0^1 S(k)dk=\int_0^1\Big\{\Big(4e^{-1}-\frac{4}{3}\Big)k^2+\frac{4}{3}k\Big\}dk\\&=\Big[\frac{1}{3}\Big(4e^{-1}-\frac{4}{3}\Big)k^3+\frac{2}{3}k^2\Big]_0^1=\frac{1}{3}\Big(4e^{-1}-\frac{4}{3}\Big)+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}e^{-1}+\frac{2}{9}\end{aligned}$$

［解 説］

線分が通過してできる曲面を境界とする立体の体積を求める問題です。点 P の y 座標が 0, 点 Q の y 座標が 1 であることに注目し, 平面 $y=k$ での切り口を考えて求積計算を行っています。

$\boxed{16}$ ［京都大］

O を原点とする xyz 空間において，点 P と点 Q は次の 3 つの条件(a)，(b)，(c)を満たしている。

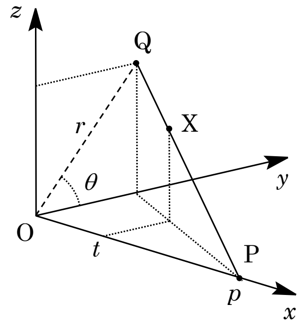
(a) 点 P は x 軸上にある。

(b) 点 Q は yz 平面上にある。

(c) 線分 OP と線分 OQ の長さの和は 1 である。

点 P と点 Q が条件(a)，(b)，(c)を満たしながらくまなく動くとき，線分 PQ が通過してできる立体の体積を求めよ。

16　　［京都大］



条件(a)(b)から，$P(p,\ 0,\ 0)$ とし，また $r \geqq 0$，θ を任意の実数として，$Q(0,\ r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ とおく。

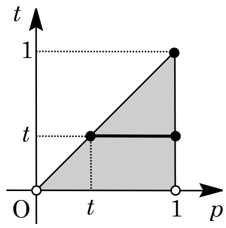
さらに，条件(c)から $p+r=1$ となり，$r=1-p$ から，

$$Q(0,\ (1-p)\cos\theta,\ (1-p)\sin\theta)\quad (p \leqq 1)$$

(i)　$p=0$ のとき

線分 PQ が通過してできる図形は，yz 平面上で，原点を中心とする半径 1 の円の周または内部である。

(ii)　$0<p \leqq 1$ のとき



線分 PQ と平面 $x=t\ (0<t \leqq p \leqq 1)$ との交点を X とおくと，点 X は線分 QP を $t:p-t$ に内分し，

$$\overrightarrow{OX}=\frac{t\overrightarrow{OP}+(p-t)\overrightarrow{OQ}}{t+(p-t)}=\frac{t}{p}\overrightarrow{OP}+\frac{p-t}{p}\overrightarrow{OQ}$$

$$=\frac{t}{p}(p,\ 0,\ 0)+\frac{p-t}{p}(0,\ (1-p)\cos\theta,\ (1-p)\sin\theta)$$

$$=(t,\ 0,\ 0)+\left(1-\frac{t}{p}\right)(1-p)(0,\ \cos\theta,\ \sin\theta)$$

これより，点 X は平面 $x=t$ 上で，中心 $(t,\ 0,\ 0)$，半径 $\left(1-\frac{t}{p}\right)(1-p)$ の円を描く。

そこで，$f(p)=\left(1-\frac{t}{p}\right)(1-p)=-p+(t+1)-\frac{t}{p}\ (t \leqq p \leqq 1)$ とおくと，

$$f'(p)=-1+\frac{t}{p^2}$$

$$=-\frac{(p+\sqrt{t})(p-\sqrt{t})}{p^2}$$

p	t	$\cdots$	$\sqrt{t}$	$\cdots$	1
$f'(p)$		$+$	0	$-$	
$f(p)$	0	↗	$(1-\sqrt{t})^2$	↘	0

すると，$f(p)$ の増減は右表のようになり，平面 $x=t$ 上で線分 PQ の動きうる範囲の面積 $S(t)$ とおくと，

$$S(t)=\pi\{(1-\sqrt{t})^2\}^2=\pi(1-\sqrt{t})^4 \cdots\cdots\cdots(*)$$

なお，$t=0$ のときは，線分 PQ の動きうる範囲は，(i)の $p=0$ のときも合わせて考えると，その面積は $\pi\cdot 1^2=\pi$ となるが，この場合も$(*)$は成り立っている。

したがって，線分 PQ が通過してできる立体の体積を V とすると，yz 平面についての対称性から，

$$V=2\int_0^1 S(t)\,dt=2\pi\int_0^1(1-\sqrt{t})^4\,dt=2\pi\int_0^1\left(1-4t^{\frac{1}{2}}+6t-4t^{\frac{3}{2}}+t^2\right)dt$$

$$=2\pi\left[t-\frac{8}{3}t^{\frac{3}{2}}+3t^2-\frac{8}{5}t^{\frac{5}{2}}+\frac{t^3}{3}\right]_0^1=2\pi\left(1-\frac{8}{3}+3-\frac{8}{5}+\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{15}\pi$$

［解 説］

線分の通過領域の体積を求める問題です。x 軸に垂直な断面をもとに処理をしています。