$\boxed{1}$ ［北海道大・理］

次の問いに答えよ。

(1) α を実数とする。次のように定められた数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

$$a_1=\alpha\,,\ \ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(2) 関数 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$，$\cdots$を次の関係式で定める。

$$f_1(x)=3x\,,\ \ f_{n+1}(x)=(n+2)x^{n+1}+\left(\int_0^1 f_n(t)\,dt\right)x\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

関数 $f_n(x)$ を x と n の式で表せ。

1 ［北海道大・理］

(1) $a_1=\alpha$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+1$ に対し，$a_{n+1}-2=\dfrac{1}{2}(a_n-2)$ と変形すると，

$$a_n-2=(a_1-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=(\alpha-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって，$a_n=2+(\alpha-2)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ ………①

(2) $f_{n+1}(x)=(n+2)x^{n+1}+\left(\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt\right)x$ に対し，$c_n=\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt$ とおくと，

$$f_{n+1}(x)=(n+2)x^{n+1}+c_nx$$

すると，$n\geqq 2$ において，$f_n(x)=(n+1)x^n+c_{n-1}x$ となり，

$$c_n=\int_0^1\{(n+1)t^n+c_{n-1}t\}\,dt=\left[t^{n+1}+\frac{c_{n-1}}{2}t^2\right]_0^1=1+\frac{1}{2}c_{n-1}$$

ここで，$f_1(x)=3x$ より $c_1=\displaystyle\int_0^1 3t\,dt=\left[\frac{3}{2}t^2\right]_0^1=\frac{3}{2}$ となり，①から，

$$c_n=2+\left(\frac{3}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

よって，$f_n(x)=(n+1)x^n+\left\{2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}x\quad(n\geqq 2)$ ………②

なお，②に $n=1$ をあてはめると，$f_1(x)=2x+\left\{2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^0\right\}x=3x$ となり，

$$f_n(x)=(n+1)x^n+\left\{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}x$$

［解 説］

(2)は置換え型の積分方程式です。置換えを実行すると(1)の漸化式が現れ，その結果を利用できます。

$\boxed{2}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［名古屋大・文］

t を 0 でない実数として，x の関数 $y=-x^2+tx+t$ のグラフを C とする。

(1)　C 上において y 座標が最大となる点 P の座標を求めよ。

(2)　P と点 O(0, 0) を通る直線を l とする。l と C が P 以外の共有点 Q をもつために t が満たすべき条件を求めよ。また，そのとき，点 Q の座標を求めよ。

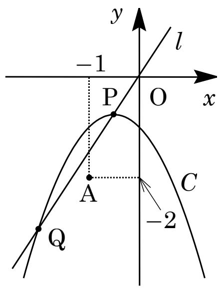
(3)　t は(2)の条件を満たすとする。A$(-1,\ -2)$ として，$X=\dfrac{1}{4}t^2+t$ とおくとき，$\mathrm{AP}^2-\mathrm{AQ}^2$ を X で表せ。また，$\mathrm{AP}<\mathrm{AQ}$ となるために t が満たすべき条件を求めよ。

$\boxed{2}$ ［名古屋大・文］

(1) $C: y=-x^2+tx+t\ (t\neq 0)$ ……①に対して，$y=-\left(x-\dfrac{t}{2}\right)^2+\dfrac{t^2}{4}+t$

これより，C 上で y 座標が最大となる点 P の座標は，$\mathrm{P}\left(\dfrac{t}{2},\ \dfrac{t^2}{4}+t\right)$である。

(2) 直線 OP すなわち l の傾きは$\left(\dfrac{t^2}{4}+t\right)\cdot\dfrac{2}{t}=\dfrac{t}{2}+2$から，



$$l: y=\left(\frac{t}{2}+2\right)x \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$-x^2+tx+t=\left(\dfrac{t}{2}+2\right)x$ となり，

$$x^2+\left(-\frac{t}{2}+2\right)x-t=0,\ \left(x-\frac{t}{2}\right)(x+2)=0$$

これより，$x=\dfrac{t}{2}$，-2 となり，l と C が P 以外の共有点 Q をもつ条件は，$\dfrac{t}{2}\neq -2\ (t\neq -4)$ となる。すると，条件の $t\neq 0$ と合わせると，

$$t<-4,\ -4<t<0,\ 0<t \cdots\cdots\cdots (*)$$

点 Q は，$x=-2$，$y=\left(\dfrac{t}{2}+2\right)\cdot(-2)=-t-4$ から，$\mathrm{Q}(-2,\ -t-4)$ である。

(3) $\mathrm{A}(-1,\ -2)$ に対して，$X=\dfrac{1}{4}t^2+t$ とおくと，

$$\mathrm{AP}^2=\left(\frac{t}{2}+1\right)^2+\left(\frac{t^2}{4}+t+2\right)^2=\frac{t^2}{4}+t+1+(X+2)^2=X+1+(X+2)^2$$

$$=X^2+5X+5$$

$$\mathrm{AQ}^2=(-2+1)^2+(-t-4+2)^2=1+t^2+4t+4=4X+5$$

これより，$\mathrm{AP}^2-\mathrm{AQ}^2=(X^2+5X+5)-(4X+5)=X^2+X$ である。

さて，$\mathrm{AP}<\mathrm{AQ}$ のとき，$\mathrm{AP}^2-\mathrm{AQ}^2<0$ から $X^2+X<0$ となり，$X(X+1)<0$

$$-1<X<0,\ -1<\frac{1}{4}t^2+t<0 \cdots\cdots\cdots ③$$

$-1<\dfrac{1}{4}t^2+t$ に対して，$t^2+4t+4>0$ となり，$(t+2)^2>0$ から $t\neq -2$

$\dfrac{1}{4}t^2+t<0$ に対して，$t^2+4t<0$ となり，$t(t+4)<0$ から $-4<t<0$

よって，③の解は，$-4<t<-2$，$-2<t<0$ となり，$(*)$と合わせると，

$$-4<t<-2,\ -2<t<0$$

［解 説］

放物線と直線の問題です。非常にていねいな誘導がついています。

3　　［広島大・文］

a と r を正の実数とする。座標平面上の放物線 $y=x^2$ と，中心 $(0,\ a)$，半径 r の円 C を考える。次の問いに答えよ。

(1)　$a=r$ とする。このとき，放物線 $y=x^2$ と円 C との共有点が 1 つのみになるような r の値の範囲を求めよ。

(2)　円 C が不等式 $y>0$ を表す領域に含まれるための必要十分条件を a と r を用いて表せ。

(3)　a と r は(2)で求めた条件を満たすとする。このとき，放物線 $y=x^2$ と円 C との共有点がちょうど 2 つになるような $(r,\ a)$ の範囲を ra 平面に図示せよ。

(4)　正の実数 s に対し，中心 $(0,\ a+r+s)$，半径 s の円を C' とする。円 C と円 C' は次の条件(i)と(ii)を満たすとする。

(i)　円 C は不等式 $y>0$ の表す領域に含まれ，さらに放物線 $y=x^2$ と円 C との共有点はちょうど 2 つである。

(ii)　放物線 $y=x^2$ と円 C' との共有点はちょうど 2 つである。

このとき，s を r を用いて表せ。

$\boxed{3}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［広島大・文］

(1)　放物線 $y=x^2$ ……①と円 $C: x^2+(y-a)^2=r^2$ $(a>0,\ r>0)$ ……②に対し，

$a=r$ のとき，②は $x^2+(y-r)^2=r^2$ ……②′となり，①②′を連立すると，

$$y+(y-r)^2=r^2,\quad y^2-(2r-1)y=0,\quad y\{y-(2r-1)\}=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

③より，$y=0,\ 2r-1$ となり，①②′の共有点について，

(i)　$2r-1=0\left(r=\dfrac{1}{2}\right)$ のとき　①③の解は，$(x,\ y)=(0,\ 0)$

(ii)　$2r-1<0\left(0<r<\dfrac{1}{2}\right)$ のとき　①③の解は，$(x,\ y)=(0,\ 0)$

(iii)　$2r-1>0\left(r>\dfrac{1}{2}\right)$ のとき　①③の解は，$(x,\ y)=(0,\ 0)$，$(\pm\sqrt{2r-1},\ 2r-1)$

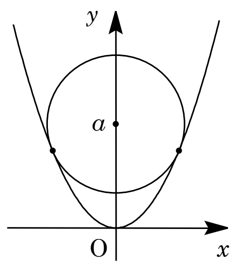
(i)～(iii)より，①②′の共有点が 1 つのみになる条件は，$0<r\leqq\dfrac{1}{2}$ である。

(2)　円 C について，②から $a-r\leqq y\leqq a+r$ である。

すると，円 C が領域 $y>0$ に含まれる条件は，$a-r>0$ すなわち $0<r<a$ である。

(3)　$0<r<a$ のとき，①②を連立すると $y+(y-a)^2=r^2$ から，

$$y^2-(2a-1)y+a^2-r^2=0\ \cdots\cdots\cdots④$$

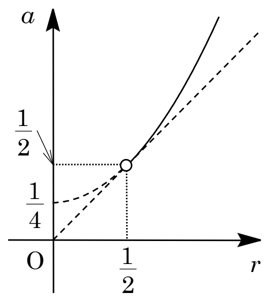


①②が共有点を 2 つもつ条件は，④が正の解を 1 つだけもつことに対応するので，$f(y)=y^2-(2a-1)y+a^2-r^2$ とおき，

$$f(y)=\left(y-\frac{2a-1}{2}\right)^2+a-r^2-\frac{1}{4}$$

$f(0)=a^2-r^2>0$ に注意すると，求める条件は，

$$\frac{2a-1}{2}>0,\quad a-r^2-\frac{1}{4}=0$$



まとめると，$a>\dfrac{1}{2}$，$a=r^2+\dfrac{1}{4}$ となり，$0<r<a$ と合わせ，さらに $a=r^2+\dfrac{1}{4}$ と $a=r$ が $(r,\ a)=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ で接することに留意して $(r,\ a)$ の範囲を ra 平面に図示すると，右図の実線部となる。ただし，$(r,\ a)=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ は含まない。

(4)　円 C と円 $C': x^2+\{y-(a+r+s)\}^2=s^2$ $(s>0)$ ……⑤に対し，(3)と条件(i)から，

$$a=r^2+\frac{1}{4}\ \cdots\cdots\cdots⑥,\quad r>\frac{1}{2}\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

また，円 C' は⑤から $y\geqq(a+r+s)-s>0$ となり $y>0$ に含まれ，条件(ii)から，

$$a+r+s=s^2+\frac{1}{4}\ \cdots\cdots\cdots⑧,\quad s>\frac{1}{2}\ \cdots\cdots\cdots⑨$$

⑥⑧より，$r^2+\dfrac{1}{4}+r+s=s^2+\dfrac{1}{4}$ から，$(r+s)(r-s)+r+s=0$ となり，

$$(r+s)(r-s+1)=0$$

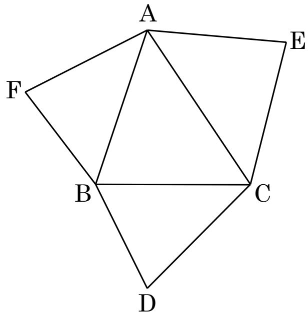
⑦⑨から，$r+s>1$ なので，$s=r+1$ である。

［解 説］

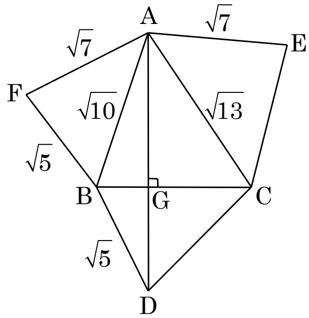
放物線と円についてのよく見かける問題です。誘導は丁寧で，特に(4)は(3)の結果がストレートに利用できます。

$\boxed{4}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［金沢大・理］

右の図は，ある四面体 T の展開図である。ここで，$\mathrm{AB}=\sqrt{10}$，$\mathrm{AC}=\sqrt{13}$，$\mathrm{BF}=\sqrt{5}$，$\mathrm{AF}=\sqrt{7}$，および $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=7$ である。このとき，三角形 ABC の面積および四面体 T の体積を求めよ。



4 ［金沢大・理］



右の四面体 T の展開図において，$\mathrm{AB}=\sqrt{10}$，$\mathrm{AC}=\sqrt{13}$，$\mathrm{BF}=\sqrt{5}$，$\mathrm{AF}=\sqrt{7}$ である。

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=7$ より，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{10\cdot13-7^2}=\frac{9}{2}\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\triangle\mathrm{ABC}$ に余弦定理を適用すると，

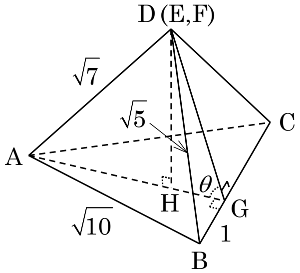
$$\mathrm{BC}^2=10+13-2\cdot7=9,\ \mathrm{BC}=3$$

そして，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ から $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ となり，線分 AD と BC の交点を G とおくと，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AG}=\frac{3}{2}\mathrm{AG}\cdots\cdots\cdots②$$

①②から，$\frac{3}{2}\mathrm{AG}=\frac{9}{2}$ となり，$\mathrm{AG}=3$ から，

$$\mathrm{BG}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{AG}^2}=\sqrt{10-9}=1,\ \mathrm{DG}=\sqrt{\mathrm{DB}^2-\mathrm{BG}^2}=\sqrt{5-1}=2$$



さて，四面体 T において，点 D から AG に下ろした垂線の足 H に対し $\mathrm{DH}\perp\mathrm{AG}$ ……③である。また，$\mathrm{DG}\perp\mathrm{BC}$ かつ $\mathrm{AG}\perp\mathrm{BC}$ より，平面 DAG は辺 BC と垂直になるので，$\mathrm{DH}\perp\mathrm{BC}$ ……④である。

すると，③④から DH は平面 ABC に垂直である。

そこで，$\angle\mathrm{DGA}=\theta$ とおくと，余弦定理から，

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{AG}^2+\mathrm{DG}^2-\mathrm{DA}^2}{2\mathrm{AG}\cdot\mathrm{DG}}=\frac{9+4-7}{2\cdot3\cdot2}=\frac{1}{2}$$
$$\mathrm{DH}=\mathrm{DG}\sin\theta=2\sqrt{1-\cos^2\theta}=2\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\sqrt{3}$$

したがって，四面体 T の体積 V は，

$$V=\frac{1}{3}S\cdot\mathrm{DH}=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{2}\cdot\sqrt{3}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

［解 説］

四面体の展開図を題材にした計量問題で，2009 年に北大で似た構図の問題が出ています。なお，三垂線の定理については，手元にある教科書では省かれていましたので，その説明を加えています。

$\boxed{5}$　　　　［岡山大・文］

平面上に三角形 ABC を考え，その重心を G とする。以下の問いに答えよ。

(1)　等式 $\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\vec{0}$ が成り立つことを示せ。

(2)　平面上の任意の点 P に対して，次の等式が成り立つことを示せ。

$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2=3|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GC}}|^2$$

(3)　次の等式が成り立つことを示せ。

$$|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GC}}|^2=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2}{3}$$

(4)　三角形 ABC の外接円の半径を R とするとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$R^2 \geqq \frac{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2}{9}$$

5　　［岡山大・文］

(1)　△ABC の重心を G とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})$ より，

$$-3\overrightarrow{\mathrm{GA}}=(\overrightarrow{\mathrm{GB}}-\overrightarrow{\mathrm{GA}})+(\overrightarrow{\mathrm{GC}}-\overrightarrow{\mathrm{GA}}),\ \ \overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\vec{0}\ \cdots\cdots\cdots①$$

(2)　平面上の任意の点 P に対して，$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{GA}}-\overrightarrow{\mathrm{GP}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{GA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GP}}+|\overrightarrow{\mathrm{GP}}|^2$

$$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{GB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GP}}+|\overrightarrow{\mathrm{GP}}|^2,\ \ |\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{GC}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{GC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GP}}+|\overrightarrow{\mathrm{GP}}|^2$$

①から，$-2\overrightarrow{\mathrm{GA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GP}}-2\overrightarrow{\mathrm{GB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GP}}-2\overrightarrow{\mathrm{GC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GP}}=-2(\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{GP}}=0$ となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2=3|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GC}}|^2\cdots\cdots\cdots②$$

(3)　②において，P＝A，P＝B，P＝C とおくと，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=3|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GC}}|^2=4|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GC}}|^2$$

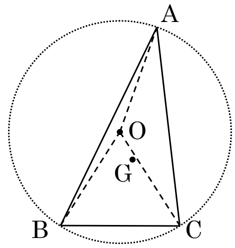
$$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2=3|\overrightarrow{\mathrm{BG}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2+4|\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GC}}|^2$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|^2=3|\overrightarrow{\mathrm{CG}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2+4|\overrightarrow{\mathrm{GC}}|^2$$

各辺を加えると，$2(|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2)=6(|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GC}}|^2)$ より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GC}}|^2=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2}{3}\cdots\cdots\cdots③$$

(4)　△ABC の外心を O，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=R$ とする。



②において，P＝O とおくと，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=3|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GC}}|^2$$

$$3R^2=3|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GC}}|^2$$

③を代入すると，$3R^2=3|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|^2+\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2}{3}$

$$R^2=|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|^2+\frac{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2}{9}\geqq\frac{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2}{9}$$

［解　説］

平面ベクトルの図形への応用問題です。(1)→(2)→(3)という誘導の流れと，(2)かつ(3)→(4)という誘導の流れで，設問が構成されています。

6 ［一橋大・文］

実数 $a,\ b$ は $-1<a<1,\ -1<b<1$ を満たす。座標空間内に 4 点 $\mathrm{A}(a,\ -1,\ -1)$, $\mathrm{B}(-1,\ b,\ -1)$, $\mathrm{C}(-a,\ 1,\ 1)$, $\mathrm{D}(1,\ -b,\ 1)$ をとる。

(1) A, B, C, D がひし形の頂点となるとき, a と b の関係を表す等式を求めよ。

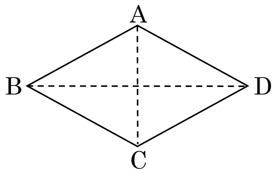
(2) $a,\ b$ が(1)の等式を満たすとき, A, B, C, D を頂点とする四角形の面積の最小値を求めよ。

$\boxed{6}$　　［一橋大・文］

(1)　4 点 $A(a,\ -1,\ -1)$，$B(-1,\ b,\ -1)$，$C(-a,\ 1,\ 1)$，$D(1,\ -b,\ 1)$ に対して，

$$\overrightarrow{AD}=(1-a,\ -b+1,\ 2),\ \overrightarrow{BC}=(-a+1,\ 1-b,\ 2)$$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ から，四角形 ABCD は平行四辺形であり，四角形 ACBD と四角形 ABDC は平行四辺形でない。



すると，4 点 A, B, C, D がひし形の頂点となるのは，四角形 ABCD がひし形であるときなので，$AC\perp BD$ より，

$$\overrightarrow{AC}=(-2a,\ 2,\ 2)=2(-a,\ 1,\ 1),\ \overrightarrow{BD}=(2,\ -2b,\ 2)=2(1,\ -b,\ 1)$$

よって，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ から $-a-b+1=0$ となり，$a+b=1$ である。

(2)　(1)から $b=1-a$ となり，$-1<b<1$ から $-1<1-a<1$ すなわち $0<a<2$ である。

すると，$-1<a<1$ と合わせ，$0<a<1$ において，

$$|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{a^2+1+1}=2\sqrt{a^2+2}$$

$$|\overrightarrow{BD}|=2\sqrt{1+b^2+1}=2\sqrt{b^2+2}=2\sqrt{(1-a)^2+2}=2\sqrt{a^2-2a+3}$$

さて，ひし形 ABCD の面積を S とおくと，

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{a^2+2}\cdot 2\sqrt{a^2-2a+3}=2\sqrt{(a^2+2)(a^2-2a+3)}$$

ここで，$f(a)=(a^2+2)(a^2-2a+3)=a^4-2a^3+5a^2-4a+6$ とおくと，

$$\begin{aligned}f'(a)&=4a^3-6a^2+10a-4\\&=2(2a-1)(a^2-a+2)\\&=2(2a-1)\left\{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right\}\end{aligned}$$

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	6	↘	$\frac{81}{16}$	↗	6

すると，$0<a<1$ における $f(a)$ の増減は右表のようになり，$f(a)$ は $a=\frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{81}{16}$ をとる。

したがって，$S=2\sqrt{f(a)}$ から，S の最小値は $2\sqrt{\frac{81}{16}}=\frac{9}{2}$ である。

［解　説］

空間ベクトルの応用問題です。(1)で平行四辺形がひし形になる条件を，隣り合う辺の長さが等しいとしてもよいのですが，(2)のひし形の面積に(対角線)×(対角線)÷2 を利用しようと思ったため，$AC\perp BD$ で処理をしました。

7　　［岡山大・理］

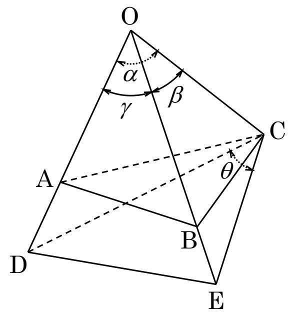
四面体 OABC において，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$ とし，$\angle\mathrm{COA}=\alpha$，$\angle\mathrm{COB}=\beta$，$\angle\mathrm{AOB}=\gamma$ とする。ただし，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。辺 OA の延長上に点 D を $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ が垂直になるようにとり，辺 OB の延長上に点 E を $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ が垂直になるようにとる。$\angle\mathrm{DCE}=\theta$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\cos\alpha$ を用いて表せ。また，$\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\cos\beta$ を用いて表せ。

(2)　$\cos\theta$ を $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\sin\beta$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ を用いて表せ。

(3)　$\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta$，$\beta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ とする。点 C から平面 DOE に下ろした垂線の足を P とするとき，$\mathrm{CP}=\dfrac{1}{\tan\gamma}$ となることを示せ。

7　　［岡山大・理］



(1)　四面体 OABC において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$ から，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\cos\gamma,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=\cos\beta,\ \vec{c}\cdot\vec{a}=\cos\alpha$$

ここで，k を実数として $\overrightarrow{OD}=k\vec{a}$ とおくと，

$$\overrightarrow{CD}=k\vec{a}-\vec{c}$$

$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{CD}$ から，$\vec{c}\cdot(k\vec{a}-\vec{c})=0$ となり，$k\cos\alpha-1=0$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ から $\cos\alpha>0$ なので，$k=\dfrac{1}{\cos\alpha}$ となり，

$$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{\cos\alpha}\vec{a}-\vec{c}\ \cdots\cdots\cdots①$$

同様に，l を実数として $\overrightarrow{OE}=l\vec{b}$ とおくと，$\overrightarrow{CE}=l\vec{b}-\vec{c}$ となり，$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{CE}$ から，

$$\vec{c}\cdot(l\vec{b}-\vec{c})=0,\ l\cos\beta-1=0$$

$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ から $\cos\beta>0$ なので，$l=\dfrac{1}{\cos\beta}$ となり，$\overrightarrow{CE}=\dfrac{1}{\cos\beta}\vec{b}-\vec{c}\ \cdots\cdots\cdots②$

(2)　①から，$|\overrightarrow{CD}|^2=\left|\dfrac{1}{\cos\alpha}\vec{a}-\vec{c}\right|^2=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-\dfrac{2}{\cos\alpha}\cdot\cos\alpha+1=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$

②から，$|\overrightarrow{CE}|^2=\left|\dfrac{1}{\cos\beta}\vec{b}-\vec{c}\right|^2=\dfrac{1}{\cos^2\beta}-\dfrac{2}{\cos\beta}\cdot\cos\beta+1=\dfrac{1}{\cos^2\beta}-1=\dfrac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}$

$$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CE}=\left(\frac{1}{\cos\alpha}\vec{a}-\vec{c}\right)\cdot\left(\frac{1}{\cos\beta}\vec{b}-\vec{c}\right)=\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\beta}{\cos\beta}+1$$

$$=\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}-1=\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$\angle DCE=\theta$ から，$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CE}}{|\overrightarrow{CD}||\overrightarrow{CE}|}$ となり，

$$\cos\theta=\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\beta}=\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$$

(3)　$\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta$ から $\cos\theta=0$ となり，$\overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{CE}$ であるので，

$$\triangle CDE=\frac{1}{2}|\overrightarrow{CD}||\overrightarrow{CE}|=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{1}{2}\tan\alpha\tan\beta$$

$\beta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ から，$\triangle CDE=\dfrac{1}{2}\tan\alpha\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\dfrac{1}{2}\tan\alpha\cdot\dfrac{1}{\tan\alpha}=\dfrac{1}{2}$

また，$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{CE}$ から，直線 OC は平面 CDE に垂直であり，ここで四面体 ODEC の体積を V とおくと，

$$V=\frac{1}{3}(\triangle CDE)\cdot OC=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{6}\ \cdots\cdots\cdots③$$

また，$|\overrightarrow{OD}|=\dfrac{1}{\cos\alpha}|\vec{a}|=\dfrac{1}{\cos\alpha}$，$|\overrightarrow{OE}|=\dfrac{1}{\cos\beta}|\vec{b}|=\dfrac{1}{\cos\beta}$ より，

$$\triangle\mathrm{ODE}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OD}}||\overrightarrow{\mathrm{OE}}|\sin\gamma=\frac{\sin\gamma}{2\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin\gamma}{2\cos\gamma}=\frac{1}{2}\tan\gamma$$

点 C から平面 DOE に下ろした垂線の足を P とすると,

$$V=\frac{1}{3}(\triangle\mathrm{ODE})\cdot\mathrm{CP}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\tan\gamma\cdot\mathrm{CP}=\frac{1}{6}\mathrm{CP}\tan\gamma\cdots\cdots\cdots④$$

③④から，$\frac{1}{6}\mathrm{CP}\tan\gamma=\frac{1}{6}$ となり，$\mathrm{CP}=\frac{1}{\tan\gamma}$ である。

［解 説］

空間ベクトルの応用についての標準的な問題です。(3)は，与えられた条件から，体積を利用する方法で記述しました。

8 ［名古屋大・理］

座標空間の 3 点 $\mathrm{A}(3,\ 1,\ 3)$，$\mathrm{B}(4,\ 2,\ 2)$，$\mathrm{C}(4,\ 0,\ 1)$ の定める平面を H とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ($s,\ t$ は非負の実数)を満たすすべての点 P からなる領域を K とする。

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を求めよ。

(2) 原点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ から平面 H に下ろした垂線の足を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ。

(3) 領域 K 上の点 P に対して，線分 QP 上の点で $\overrightarrow{\mathrm{AR}}=r\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ (r は非負の実数)を満たす点 R が存在することを示せ。

(4) 領域 K において原点 O からの距離が最小となる点 S の座標を求めよ。

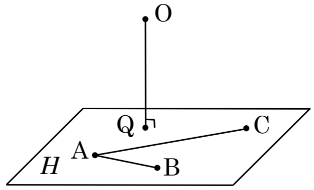
８　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[名古屋大・理]

(1)　3 点 $A(3,\ 1,\ 3)$，$B(4,\ 2,\ 2)$，$C(4,\ 0,\ 1)$ の定める平面 H に対して，

$$\overrightarrow{AB}=(1,\ 1,\ -1),\ \overrightarrow{AC}=(1,\ -1,\ -2)$$

すると，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=1+1+1=3$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=1+1+4=6$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1-1+2=2$

(2)　$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC}$ ($k,\ l$ は実数) とおくと，$OQ\perp H$ から，$\overrightarrow{OQ}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OQ}\perp\overrightarrow{AC}$ となる。



$$(\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}=0\ \cdots\cdots\cdots①$$

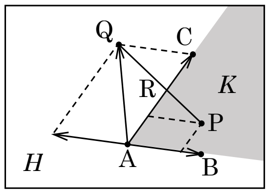
$$(\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AC}=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=3+1-3=1$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}=3-1-6=-4$ となる。

①から $1+3k+2l=0$，②から $-4+2k+6l=0$ なので，$k=-1$，$l=1$ となり，

$$\overrightarrow{AQ}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\ \cdots\cdots\cdots③$$

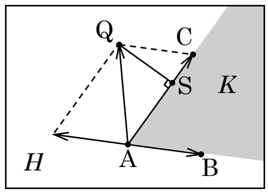
(3)　$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ ($s\geqq 0,\ t\geqq 0$) を満たすすべての点 P からなる領域 K は，右図の網点部である。



すると，③から点 Q と領域 K は半直線 AC に関して反対側にあり，線分 QP は半直線 AC と交わる。その交点を R とすると，$\overrightarrow{AR}=r\overrightarrow{AC}$ を満たす非負の実数 r が存在する。

(4)　領域 K 上の点 P に対して，$OQ\perp H$ から，

$$OP=\sqrt{OQ^2+QP^2}$$



これより，OP が最小となるのは QP が最小のときであり，このとき点 P は，点 Q から半直線 AC に下ろした垂線と半直線 AC との交点 S に一致する。

ここで，$\overrightarrow{AS}=s\overrightarrow{AC}$ とおくと，③から，

$$\overrightarrow{QS}=\overrightarrow{AS}-\overrightarrow{AQ}=s\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+(s-1)\overrightarrow{AC}$$

$\overrightarrow{QS}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ より $2+6(s-1)=0$ となり，$s-1=-\dfrac{1}{3}$ から $s=\dfrac{2}{3}$ なので，

$$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=(3,\ 1,\ 3)+\frac{2}{3}(1,\ -1,\ -2)=\left(\frac{11}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{5}{3}\right)$$

したがって，$S\left(\dfrac{11}{3},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{5}{3}\right)$ である。

[解　説]

空間ベクトルの応用問題です。誘導が非常に細かく，しかも丁寧です。

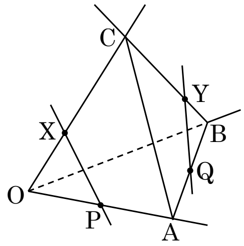
$\boxed{9}$ ［京都大・理］

座標空間の 4 点 O, A, B, C は同一平面上にないとする。線分 OA の中点を P, 線分 AB の中点を Q とする。実数 x, y に対して, 直線 OC 上の点 X と, 直線 BC 上の点 Y を次のように定める。

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = x\overrightarrow{\mathrm{OC}},\ \ \overrightarrow{\mathrm{BY}} = y\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

このとき, 直線 QY と直線 PX がねじれの位置にあるための x, y に関する必要十分条件を求めよ。

9　　　　［京都大・理］



線分 OA, AB の中点を，それぞれ P, Q とすると，

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\cdots\cdots①,\ \ \overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\cdots\cdots②$$

また，$\overrightarrow{OX}=x\overrightarrow{OC}\cdots\cdots③$，$\overrightarrow{BY}=y\overrightarrow{BC}$ から，

$$\overrightarrow{OY}=\overrightarrow{OB}+y(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=(1-y)\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}\cdots\cdots④$$

ここで，直線 QY と直線 PX がねじれの位置にない，すなわち同一平面上にあるとき，k, l を実数として，

$$\overrightarrow{PY}=k\overrightarrow{PQ}+l\overrightarrow{PX},\ \ \overrightarrow{OY}-\overrightarrow{OP}=k(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP})+l(\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OP})\cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤に①～④を代入して，

$$(1-y)\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=k\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right)+l\left(x\overrightarrow{OC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+(1-y)\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}=-\frac{1}{2}l\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}k\overrightarrow{OB}+lx\overrightarrow{OC}$$

$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ は１次独立なので，$-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}l$，$1-y=\frac{1}{2}k$，$y=lx$ となり，

$$l=1,\ \ k=2-2y,\ \ x=y$$

これより，直線 QY と直線 PX がねじれの位置にある条件は，$x\neq y$ である。

［解 説］

空間ベクトルの応用問題です。2 直線がねじれの位置にあることに関しては，同一平面上にない，または交わらず平行でもないという 2 方面からの処理が考えられますが，ここでは前者を採用しました。

10 ［東北大・理］

xyz 空間において，点 $P_1(3,\ -1,\ 1)$ を中心とし半径が $\sqrt{5}$ の球面 S_1 と，点 $P_2(5,\ 0,\ -1)$ を中心とし半径が $\sqrt{2}$ の球面 S_2 を考える。

(1) 線分 P_1P_2 の長さを求めよ。

(2) S_1 と S_2 が交わりをもつことを示せ。この交わりは円となる。この円を C とし，その中心を P_3 とする。C の半径および中心 P_3 の座標を求めよ。

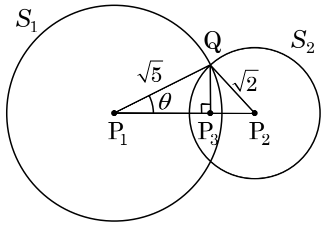
(3) (2)の円 C に対し，C を含む平面を H とする。xy 平面と H の両方に平行で，大きさが 1 のベクトルをすべて求めよ。

(4) 点 Q が(2)の円 C 上を動くとき，Q と xy 平面の距離 d の最大値を求めよ。また，d の最大値を与える点 Q の座標を求めよ。

10　　［東北大・理］

(1)　$P_1(3,\ -1,\ 1)$，$P_2(5,\ 0,\ -1)$に対して，$P_1P_2=\sqrt{(5-3)^2+1^2+(-1-1)^2}=3$

(2)　(1)から，$\sqrt{5}-\sqrt{2}<P_1P_2<\sqrt{5}+\sqrt{2}$ となり，球面S_1と球面S_2は交わる。



さて，S_1とS_2の交わりの円 C 上の点 Q に対して，$\angle QP_1P_2=\theta$とおくと，余弦定理から，

$$\cos\theta=\frac{5+3^2-2}{2\sqrt{5}\cdot 3}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Cの半径は$\sqrt{5}\sin\theta=\sqrt{5}\cdot\sqrt{1-\frac{4}{5}}=1$となり，また$C$の中心$P_3$に対して，

$$P_1P_3=\sqrt{5}\cos\theta=2,\quad P_2P_3=3-2=1$$

これより，点P_3は線分P_1P_2を$2:1$に内分するので，その座標は，

$$x=\frac{3+10}{3}=\frac{13}{3},\quad y=\frac{-1+0}{3}=-\frac{1}{3},\quad z=\frac{1-2}{3}=-\frac{1}{3}$$

よって，$P_3\left(\frac{13}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$である。

(3)　Cを含む平面Hは，点P_3を通り法線ベクトル$\overrightarrow{P_1P_2}=(2,\ 1,\ -2)$の平面である。

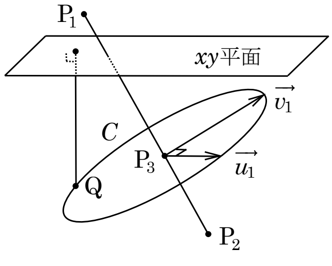
さて，xy平面とHの両方に平行で大きさ1のベクトルを$\vec{u}=(a,\ b,\ c)$とおくと，$a^2+b^2+c^2=1$ ……①のもとで，xy 平面に平行から$c=0$ ……②，H に平行から$\vec{u}\perp\overrightarrow{P_1P_2}$となり，$\vec{u}\cdot\overrightarrow{P_1P_2}=2a+b-2c=0$ ……③である。

①②から$a^2+b^2=1$，②③から$2a+b=0$となり，

$$a=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}=\pm\frac{\sqrt{5}}{5},\quad b=\mp\frac{2}{5}\sqrt{5}\ \ （複号同順）$$

よって，$\vec{u}=\left(\frac{\sqrt{5}}{5},\ -\frac{2}{5}\sqrt{5},\ 0\right)$，$\vec{u}=\left(-\frac{\sqrt{5}}{5},\ \frac{2}{5}\sqrt{5},\ 0\right)$である。

(4)　$\overrightarrow{u_1}=\left(\frac{\sqrt{5}}{5},\ -\frac{2}{5}\sqrt{5},\ 0\right)$とおき，$\overrightarrow{u_1}$に垂直で H に平行な大きさ1のベクトルを$\vec{v}=(p,\ q,\ r)$とおく。



すると，$p^2+q^2+r^2=1$ ……④のもとで，$\overrightarrow{u_1}$に垂直から$\frac{\sqrt{5}}{5}p-\frac{2}{5}\sqrt{5}q=0$となり$p-2q=0$ ……⑤，H に平行から$\vec{v}\cdot\overrightarrow{P_1P_2}=2p+q-2r=0$ ……⑥となる。

⑤⑥から$p=2q$，$r=\frac{5}{2}q$となり，④に代入すると$\frac{45}{4}q^2=1$から，

$$q=\pm\frac{2}{3\sqrt{5}}=\pm\frac{2}{15}\sqrt{5},\quad p=\pm\frac{4}{15}\sqrt{5},\quad r=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}\ \ （複号同順）$$

よって，$\vec{v}=\left(\frac{4}{15}\sqrt{5},\ \frac{2}{15}\sqrt{5},\ \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$，$\vec{v}=\left(-\frac{4}{15}\sqrt{5},\ -\frac{2}{15}\sqrt{5},\ -\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$である。

そこで，$\overrightarrow{v_1}=\left(\dfrac{4}{15}\sqrt{5},\ \dfrac{2}{15}\sqrt{5},\ \dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)$とおくと，円 C 上の任意の点 Q は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP_3}}+(\cos\theta)\overrightarrow{u_1}+(\sin\theta)\overrightarrow{v_1}$$

$$=\left(\frac{13}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right)+(\cos\theta)\left(\frac{\sqrt{5}}{5},\ -\frac{2}{5}\sqrt{5},\ 0\right)+(\sin\theta)\left(\frac{4}{15}\sqrt{5},\ \frac{2}{15}\sqrt{5},\ \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$$

点 Q と xy 平面の距離 d は，Q の z 座標の絶対値となり，

$$d=\left|-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}\sin\theta\right|=\frac{1}{3}\left|\sqrt{5}\sin\theta-1\right|$$

ここで，θ は任意の実数をとるので，d は $\sin\theta=-1$ のとき最大となり，最大値は，

$$\frac{1}{3}\left|-\sqrt{5}-1\right|=\frac{1+\sqrt{5}}{3}$$

このとき $\cos\theta=0$ なので，最大値を与える点 Q は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP_3}}-\overrightarrow{v_1}=\left(\frac{13}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{4}{15}\sqrt{5},\ \frac{2}{15}\sqrt{5},\ \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$$

$$=\left(\frac{65-4\sqrt{5}}{15},\ -\frac{5+2\sqrt{5}}{15},\ -\frac{1+\sqrt{5}}{3}\right)$$

よって，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{65-4\sqrt{5}}{15},\ -\dfrac{5+2\sqrt{5}}{15},\ -\dfrac{1+\sqrt{5}}{3}\right)$である。

［解 説］

質と量ともにハードな空間図形の問題です。空間内の円のパラメータ表示である⑦については，久々に登場という感じです。

$\boxed{11}$ ［大阪大・文］

素数を小さい順に並べて得られる数列を，p_1，p_2，…，p_n，…とする。

(1) p_{15}の値を求めよ。

(2) $n \geqq 12$のとき，不等式$p_n > 3n$が成り立つことを示せ。

11 ［大阪大・文］

(1) 素数を小さい順に並べると,

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, \cdots$$

この数列を，p_1，p_2，…，p_n，…とすると，$p_{15}=47$ である。

(2) $n \geqq 12$ のとき，$p_n > 3n$ が成り立つことを数学的帰納法で示す。

(i) $n=12$ のとき $p_{12}=37$ より，$p_{12}>3\times 12$ となり成り立っている。

(ii) $n=k$ のとき $p_k>3k$ が成り立つと仮定する。

このとき，$p_k \geqq 3k+1$ であり, 3 以上の素数は奇数なので,

$$p_{k+1} \geqq p_k+2 \geqq 3k+1+2 = 3(k+1)$$

ところが，$p_{k+1}=3(k+1)$ の場合は，p_{k+1} は 3 の倍数なので素数ではない。

すると，$p_{k+1}>3(k+1)$ となり，$n=k+1$ のときも成り立っている。

(i)(ii)より，$n \geqq 12$ のとき，$p_n>3n$ が成り立つ。

［解 説］

素数を題材とした不等式の証明問題です。ただ, 帰納法を用いると, 予想以上にあっさりと示せました。

12 ［京都大・文］

ある自然数を八進法，九進法，十進法でそれぞれ表したとき，桁数がすべて同じになった。このような自然数で最大のものを求めよ。ただし，必要なら次を用いてもよい。$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$，$0.4771 < \log_{10} 3 < 0.4772$

12 ［京都大・文］

自然数 N を八進法，九進法，十進法で表したとき，いずれも k 桁であるとすると，

$$8^{k-1} \leqq N < 8^k \cdots\cdots ①,\ \ 9^{k-1} \leqq N < 9^k \cdots\cdots ②,\ \ 10^{k-1} \leqq N < 10^k \cdots\cdots ③$$

$k \geqq 2$ で，$8^{k-1} < 9^{k-1} < 10^{k-1}$，$8^k < 9^k < 10^k$ から，①②③を満たす N が存在するためには，$10^{k-1} < 8^k \cdots\cdots ④$が必要である。すると，

$$\log_{10} 10^{k-1} < \log_{10} 8^k,\ \ k-1 < 3k\log_{10} 2,\ \ (1-3\log_{10} 2)k < 1$$

ここで，$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ から，$0.0967 < 1-3\log_{10} 2 < 0.097$ となり，

$$k < \frac{1}{1-3\log_{10} 2}$$

$10.3 < \dfrac{1}{1-3\log_{10} 2} < 10.4$ から，④を満たす最大の整数 k は $k=10$ である。

逆に，$k=10$ のとき，①②③は $8^9 \leqq N < 8^{10}$，$9^9 \leqq N < 9^{10}$，$10^9 \leqq N < 10^{10}$ となり，④から $10^9 < 8^{10}$ であるので，N が満たす範囲は，

$$10^9 \leqq N < 8^{10},\ \ 10^9 \leqq N \leqq 8^{10}-1$$

したがって，最大の自然数 N は $8^{10}-1$ である。

［解 説］

整数と対数計算の融合問題です。数直線を利用して，連立不等式が解をもつ条件を考えています。

13 ［広島大・理］

x 座標，y 座標がともに整数である座標平面上の点を格子点と呼ぶことにする。座標平面上の 3 点を頂点にもつ三角形上の格子点とは，頂点，辺または内部に含まれている格子点のことをいう。四角形に対しても同様に四角形上の格子点を定めるものとする。$\mathrm{O}(0,\ 0)$ を座標平面上の原点とする。a と b を互いに素な自然数，n を自然数として，座標平面上の点 $\mathrm{P}_n(an,\ 0)$，$\mathrm{Q}_n(0,\ bn)$ を考える。次の問いに答えよ。

(1) 直線 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ 上の格子点 $(x,\ y)$ で $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ を満たすものは，$(ak,\ b(n-k))$ $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ のみであることを示せ。

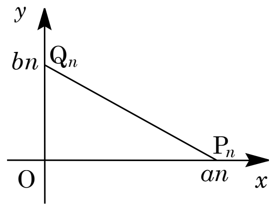
(2) P_1 と Q_1 をそれぞれ P, Q と表す。点 $\mathrm{R}(a,\ b)$ に対し，長方形 OPRQ 上の格子点の個数を a と b を用いて表せ。また，三角形 OPQ 上の格子点の個数を a と b を用いて表せ。

(3) 三角形 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$ 上の格子点の個数を a, b, n を用いて表せ。

(4) 座標空間内の原点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ と 3 点 $\mathrm{X}(an,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{Y}(0,\ bn,\ 0)$，$\mathrm{Z}(0,\ 0,\ n)$ をとる。点 O, X, Y, Z を 4 頂点とする四面体 OXYZ 上の格子点の個数を a, b, n を用いて表せ。ただし，x 座標，y 座標，z 座標のすべてが整数である座標空間内の点を格子点と呼ぶことにする。また，四面体上の格子点とは，頂点，辺，面または内部に含まれている格子点のことをいう。

13 ［広島大・理］

(1) 互いに素な自然数 a と b，自然数 n に対して，$\mathrm{P}_n(an,\ 0)$，$\mathrm{Q}_n(0,\ bn)$とすると，直線$\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$の方程式は，



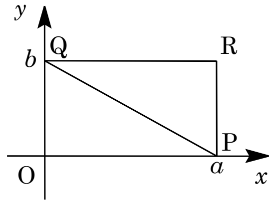
$$\frac{x}{an}+\frac{y}{bn}=1,\quad y=bn\left(1-\frac{x}{an}\right)=-\frac{b}{a}x+bn$$

線分$\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$上の格子点$(x,\ y)$は，a と b が互いに素から x は a の倍数となり，$0\leqq x\leqq an$ から $x=ak$ $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$とおくと，

$$y=-\frac{b}{a}\cdot ak+bn=b(n-k)$$

すなわち，$(x,\ y)=(ak,\ b(n-k))$ $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$である。

(2) $\mathrm{P}(a,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ b)$，$\mathrm{R}(a,\ b)$に対して，長方形 OPRQ 上の格子点$(x,\ y)$は，$0\leqq x\leqq a$，$0\leqq y\leqq b$であるので，その個数は$(a+1)(b+1)$となる。



線分 PQ 上の格子点$(x,\ y)$は，$(ak,\ b(1-k))$ $(k=0,\ 1)$記すことができるので，その個数は 2 である。

これより，三角形 OPQ 上の格子点の個数は，

$$\frac{(a+1)(b+1)-2}{2}+2=\frac{ab+a+b+3}{2}$$

(3) (2)と同様に考えて$\mathrm{R}_n(an,\ bn)$とおくと，長方形$\mathrm{OP}_n\mathrm{R}_n\mathrm{Q}_n$上の格子点の個数は，

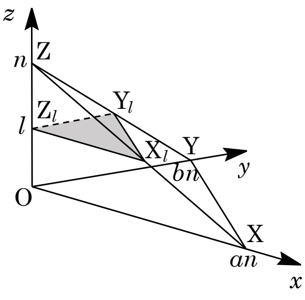
$$(an+1)(bn+1)$$

また，線分$\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$上の格子点の個数は，(1)から$n+1$である。

これより，三角形$\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$上の格子点の個数は，

$$\frac{(an+1)(bn+1)-(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{abn^2+(a+b+1)n+2}{2}$$

(4) $\mathrm{X}(an,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{Y}(0,\ bn,\ 0)$，$\mathrm{Z}(0,\ 0,\ n)$に対して，平面 XYZ の方程式は，

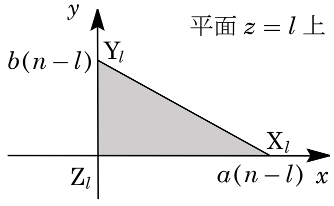


$$\frac{x}{an}+\frac{y}{bn}+\frac{z}{n}=1\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

$\mathrm{Z}_l(0,\ 0,\ l)$とおき，平面$z=l$ $(l=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$と線分 ZX，ZY との交点を，それぞれX_l，Y_lとおく。

$(*)$に$z=l$を代入すると，$\dfrac{x}{an}+\dfrac{y}{bn}=1-\dfrac{l}{n}$となり，

直線$\mathrm{X}_l\mathrm{Y}_l$：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=n-l$かつ$z=l$



これより，$\mathrm{X}_l(a(n-l),\ 0,\ l)$，$\mathrm{Y}_l(0,\ b(n-l),\ l)$となる。そして，三角形$\mathrm{Z}_l\mathrm{X}_l\mathrm{Y}_l$上の格子点の個数を$N_l$とおくと，(3)の結果から，

$$N_l=\frac{ab(n-l)^2+(a+b+1)(n-l)+2}{2}$$

そこで，四面体 OXYZ 上の格子点の個数を N とおくと，

$$N=\sum_{l=0}^{n}N_l=\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{n}\{ab(n-l)^2+(a+b+1)(n-l)+2\}$$

さらに，$m=n-l$ と置き換えると，

$$\begin{aligned}N&=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n}\{abm^2+(a+b+1)m+2\}\\&=\frac{ab}{2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{a+b+1}{2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{1}{2}\cdot 2(n+1)\\&=\frac{n+1}{12}\{abn(2n+1)+3(a+b+1)n+12\}\\&=\frac{1}{12}(n+1)\{2abn^2+(ab+3a+3b+3)n+12\}\end{aligned}$$

［解　説］

四面体の内部または面上にある格子点の個数を数える問題です。(1)→(2)→(3)→(4)と，非常に丁寧な誘導がついています。

14 ［九州大］

以下の問いに答えよ。

(1) 自然数 a,b が $a<b$ をみたすとき，$\dfrac{b!}{a!} \geqq b$ が成り立つことを示せ。

(2) $2\cdot a! = b!$ をみたす自然数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

(3) $a!+b! = 2\cdot c!$ をみたす自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。

$\boxed{14}$ ［九州大］

(1) 自然数 $a,\ b$ が $1 \leqq a < b$ をみたすとき，

(i) $b = a+1\ (a = b-1)$ のとき　$a! = (b-1)!$ から，$\dfrac{b!}{a!} = \dfrac{b!}{(b-1)!} = b$

(ii) $b > a+1\ (a < b-1)$ のとき　$a! < (b-1)!$ から，$\dfrac{b!}{a!} > \dfrac{b!}{(b-1)!} = b$

(i)(ii)より，$\dfrac{b!}{a!} \geqq b$ ……①が成り立つ。

(2) 自然数 $a,\ b$ が $2\cdot a! = b!$ ……②をみたすとき，$a! < b!$ から $a < b$ である。

すると，①から $2 = \dfrac{b!}{a!} \geqq b$ となり，$1 \leqq a < b$ から，$a = 1$，$b = 2$ である。

このとき，$2\cdot 1! = 2!$ が成り立ち，②をみたす自然数 $(a,\ b)$ は，

$(a,\ b) = (1,\ 2)$

(3) 自然数 $a,\ b,\ c$ が $a! + b! = 2\cdot c!$ ……③をみたすとき，

(i) $a = b$ のとき　③より $a! + a! = 2\cdot c!$ となり，$a! = c!$ から $a = c$

したがって，k を自然数として，$(a,\ b,\ c) = (k,\ k,\ k)$ である。

(ii) $a < b$ のとき　$a! < b!$ となり，$2\cdot a! < a! + b! < 2\cdot b!$

③から $2\cdot a! < 2\cdot c! < 2\cdot b!$ となり，$a! < c! < b!$ から $1 \leqq a < c < b$ である。

さて，③より $2 = \dfrac{a!}{c!} + \dfrac{b!}{c!}$ となり，①から $\dfrac{b!}{c!} \geqq b$ なので，

$$2 = \frac{a!}{c!} + \frac{b!}{c!} \geqq \frac{a!}{c!} + b > b$$

すると，$b < 2$ となるが，これは $1 \leqq a < c < b$ をみたさない。

(iii) $a > b$ のとき　(ii)と同様にすると，$1 \leqq b < c < a$，$2 = \dfrac{a!}{c!} + \dfrac{b!}{c!}$ である。

このとき，①から $\dfrac{a!}{c!} \geqq a$ なので，$2 = \dfrac{a!}{c!} + \dfrac{b!}{c!} \geqq a + \dfrac{b!}{c!} > a$

すると，$a < 2$ となるが，これは $1 \leqq b < c < a$ をみたさない。

(i)～(iii)より，③をみたす自然数 $(a,\ b,\ c)$ は，

$(a,\ b,\ c) = (k,\ k,\ k)$ (k は自然数)

［解 説］

誘導つきの整数問題です。不等式①の使い方がポイントです。

$\boxed{15}$ ［京都大・理］

与えられた自然数a_0に対して，自然数からなる数列a_0，a_1，a_2，…を次のように定める。

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{2} & (a_n\text{が偶数のとき})\\[2mm] \dfrac{3a_n+1}{2} & (a_n\text{が奇数のとき})\end{cases}$$

次の問いに答えよ。

(1) a_0，a_1，a_2，a_3がすべて奇数であるような最小の自然数a_0を求めよ。

(2) a_0，a_1，…，a_{10}がすべて奇数であるような最小の自然数a_0を求めよ。

15 ［京都大・理］

自然数a_0に対して，数列a_0，a_1，a_2，…を，

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{2}\ (a_n\text{が偶数のとき}),\ a_{n+1}=\frac{3a_n+1}{2}\ (a_n\text{が奇数のとき})$$

(1) a_0，a_1，a_2，a_3がすべて奇数であるとき，

$$a_1=\frac{3a_0+1}{2},\ a_2=\frac{3a_1+1}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{3a_0+1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{9a_0+5}{4}$$

$$a_3=\frac{3a_2+1}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{9a_0+5}{4}+\frac{1}{2}=\frac{27a_0+19}{8}$$

a_3が奇数であることが必要なので，このとき$27a_0+19$は 8 の倍数で 16 の倍数でない。すると，kを自然数として，$27a_0+19=16k-8$と表すことができ，

$$27a_0+27=16k,\ 27(a_0+1)=16k$$

27 と 16 は互いに素なので，a_0+1は 16 の倍数となり，最小の自然数a_0は，

$$a_0+1=16,\ a_0=15$$

逆に，$a_0=15$とき，$a_1=\frac{3\cdot15+1}{2}=23$，$a_2=\frac{9\cdot15+5}{4}=35$となり，$a_0$，$a_1$，$a_2$，$a_3$はすべて奇数である。

したがって，求める最小の自然数a_0は$a_0=15$である。

(2) a_0，a_1，…，a_{10}がすべて奇数であるとき，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10$として，

$$a_{n+1}=\frac{3a_n+1}{2},\ a_{n+1}+1=\frac{3}{2}(a_n+1)$$

すると，$a_n+1=(a_0+1)\left(\frac{3}{2}\right)^n$となり，$a_n=(a_0+1)\left(\frac{3}{2}\right)^n-1$

a_{10}が奇数であることが必要なので，このとき$(a_0+1)\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$は偶数である。すると，$l$を自然数として，$(a_0+1)\left(\frac{3}{2}\right)^{10}=2l$と表すことができ，

$$(a_0+1)\cdot3^{10}=2^{11}l$$

3^{10}と2^{11}は互いに素なので，a_0+1は2^{11}の倍数となり，最小の自然数a_0は，

$$a_0+1=2^{11},\ a_0=2^{11}-1=2047$$

逆に，$a_0=2047$とき，$a_n=(2047+1)\left(\frac{3}{2}\right)^n-1=2^{11}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n-1=2^{11-n}\cdot3^n-1$

$1\leqq n\leqq9$のとき$2\leqq11-n\leqq10$より，$2^{11-n}\cdot3^n$は偶数となるので，a_0，a_1，…，a_{10}はすべて奇数である。

したがって，求める最小の自然数a_0は$a_0=2047$である。

［解 説］

漸化式と整数の融合問題です。(1)はa_3，(2)はa_{10}に着目して必要条件を求め，逆を確認するという同じ方法で解いています。

16 ［東京医歯大・医］

n を 2 以上の自然数とする。自然数の組$(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$を解とする方程式

$$(*)\quad a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1\times a_2\times\cdots\times a_n$$

を考えるとき，以下の各問いに答えよ。

(1) $n=3$ のとき，(∗)の解$(a_1,\ a_2,\ a_3)$のうち，$a_1\leqq a_2\leqq a_3$ を満たすものをすべて求めよ。

(2) $n\geqq 3$ のとき，(∗)の任意の解$(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$において，$a_i=1$ となる i が少なくとも 1 つ存在することを示せ。

(3) (∗)のある解$(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$において，$a_i=1$ となる i がちょうど 2 個存在しているとする。このとき，n のとり得る値をすべて求めよ。

$\boxed{16}$　　［東京医歯大・医］

自然数a_1，a_2，…，a_n $(n\geqq 2)$に対して，$a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1a_2\cdots a_n$ ………(＊)

(1)　$n=3$で，(＊)は$a_1+a_2+a_3=a_1a_2a_3$ ……①となり，$a_1\leqq a_2\leqq a_3$を満たすとき，

$$a_1+a_2+a_3\leqq a_3+a_3+a_3=3a_3$$

①から$a_1a_2a_3\leqq 3a_3$となり，$a_3>0$から，$a_1a_2\leqq 3$ $(a_1\leqq a_2)$である。

・$a_1a_2=1$のとき　$(a_1,\ a_2)=(1,\ 1)$となるが，①は$2+a_3=a_3$となり不成立。

・$a_1a_2=2$のとき　$(a_1,\ a_2)=(1,\ 2)$となり，①は$3+a_3=2a_3$から$a_3=3$である。

・$a_1a_2=3$のとき　$(a_1,\ a_2)=(1,\ 3)$となり，①は$4+a_3=3a_3$から$a_3=2$である。

よって，①かつ$a_1\leqq a_2\leqq a_3$を満たすのは，$(a_1,\ a_2,\ a_3)=(1,\ 2,\ 3)$である。

(2)　$n\geqq 3$のとき，(＊)の任意の解$(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$において，$a_1\leqq a_2\leqq\cdots\leqq a_n$としてよいので，(1)と同様にすると$a_1+a_2+\cdots+a_n\leqq na_n$となり，

$$a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n\leqq na_n,\quad a_1a_2\cdots a_{n-1}\leqq n\ \cdots\cdots②$$

ここで，$a_i=1$となるiが存在しないと仮定すると，$2\leqq a_1\leqq a_2\leqq\cdots\leqq a_{n-1}$から，

$$2^{n-1}\leqq a_1a_2\cdots a_{n-1}\ \cdots\cdots③$$

②③より，$2^{n-1}\leqq n$ ………④

さて，$n\geqq 3$のとき，$2^{n-1}=(1+1)^{n-1}$と考えて，二項展開すると，

$$2^{n-1}\geqq {}_{n-1}\mathrm{C}_0+{}_{n-1}\mathrm{C}_1+{}_{n-1}\mathrm{C}_2=1+(n-1)+\frac{1}{2}(n-1)(n-2)>n$$

すると，$n\geqq 3$のとき④は成立しない。

以上より，(＊)を満たす$a_i=1$となるiは少なくとも 1 つ存在する。

(3)　(＊)のある解$(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$に対し，$a_1\leqq a_2\leqq\cdots\leqq a_n$とすると，$a_i=1$となる$i$がちょうど 2 個存在するとき，$a_1=a_2=1$とおくことができ，

$$1=a_1=a_2<a_3\leqq a_4\leqq\cdots\leqq a_n$$

(i)　$n=2$のとき　(＊)は$a_1+a_2=a_1a_2$となり，$2=1$から不成立。

(ii)　$n=3$のとき　(＊)は$a_1+a_2+a_3=a_1a_2a_3$となり，$2+a_3=a_3$から不成立。

(iii)　$n\geqq 4$のとき　(＊)は$2+a_3+a_4+\cdots+a_n=a_3a_4\cdots a_n$ ………⑤

$2+a_3+a_4+\cdots+a_n\leqq 2+(n-2)a_n$から，$a_3a_4\cdots a_{n-1}a_n\leqq 2+(n-2)a_n$となり，

$$\{a_3a_4\cdots a_{n-1}-(n-2)\}a_n\leqq 2\ \cdots\cdots⑥$$

さて，$2\leqq a_3\leqq a_4\leqq\cdots\leqq a_{n-1}$から，$a_3a_4\cdots a_{n-1}\geqq 2^{n-3}$となり，$n\geqq 4$のとき，

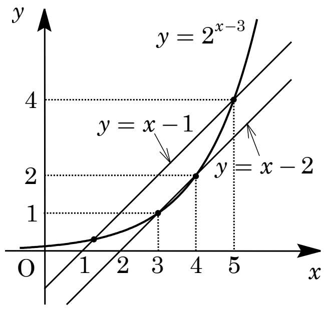
$$2^{n-3}\geqq {}_{n-3}\mathrm{C}_0+{}_{n-3}\mathrm{C}_1=1+(n-3)=n-2$$

よって，$a_3a_4\cdots a_{n-1}\geqq 2^{n-3}\geqq n-2$ ……⑦となり，$a_n\geqq 2$なので，⑥から，

$$0\leqq a_3a_4\cdots a_{n-1}-(n-2)\leqq 1$$

(iii-i)　$a_3a_4\cdots a_{n-1}-(n-2)=0$のとき

$a_3a_4\cdots a_{n-1}=n-2$となり，⑦から$2^{n-3}=n-2$ ……⑧，$a_3a_4\cdots a_{n-1}=2^{n-3}$ ……⑨



⑧より $n=4$，⑨より $a_3=\cdots=a_{n-1}=2$

これより，⑤から $2+2+a_4=2a_4$ となり，

$a_4=4$

すると，$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)=(1,\ 1,\ 2,\ 4)$ において，(＊)は成立している。

(iii-ii) $a_3a_4\cdots a_{n-1}-(n-2)=1$ のとき

⑥から $a_n=2$ となり，$a_3=a_4=\cdots=a_{n-1}=2$

これより，$a_3a_4\cdots a_{n-1}=n-1$ から $2^{n-3}=n-1$ となり，$n=5$

すると，$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5)=(1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2)$ において，(＊)は成立している。

(i)～(iii)より，求める n の値は，$n=4,\ 5$ である。

［解 説］

和と積が等しくなる不定方程式を題材とした問題で，医歯大らしく誘導が細かく付いています。(3)はいろいろな記述方法があると思われます。なお，指数方程式はグラフを用いて処理をしていますが，丁寧に記述するならば，数学的帰納法でしょう。

17 ［広島大］

A, B, C, D, E の 5 人が，それぞれゲーム α とゲーム β の 2 種類のゲームを行った。ゲーム α の得点を x，ゲーム β の得点を y で表す。右の表はそれぞれのゲームにおける得点である。ただし，a, b は整数である。なお，得点が負になることもあり得る。

	A	B	C	D	E
得点 x	7	6	8	a	4
得点 y	0	-4	-1	2	b

ゲーム α の得点 x の平均値は 7 であるとし，ゲーム β の得点 y の平均値を m とする。次の問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) p, q は実数で，$p \neq 0$ とする。ゲーム β の得点 y を $z = py + q$ により変換し，新たな変量 z を作成する。z の分散を $s_z{}^2$，2 つの変量 x，z の共分散を s_{xz} とする。このとき，$s_z{}^2$ と s_{xz} を p，q，m のうちの必要なものを用いて表せ。ただし，変量 x と z の共分散は x の偏差と z の偏差の積の平均値である。

(3) 変量 x と(2)で作った変量 z の相関係数が $\dfrac{3}{4}$ であるとき，m と b の値を求めよ。また，p が正であるか負であるかを答えよ。

$\boxed{17}$ ［広島大］

(1)　x の平均値は 7 なので，$\dfrac{7+6+8+a+4}{5}=7$ から $a=10$ である。

(2)　y の平均値は m なので，$\dfrac{0-4-1+2+b}{5}=m$ から $b=5m+3$ となり，

$$s_y{}^2=\overline{y^2}-(\overline{y})^2=\frac{0+16+1+4+(5m+3)^2}{5}-m^2=\frac{25m^2+30m+30}{5}-m^2$$
$$=4m^2+6m+6$$
$$s_{xy}=\overline{xy}-\overline{x}\cdot\overline{y}=\frac{0-24-8+20+4(5m+3)}{5}-7m=\frac{20m}{5}-7m=-3m$$

ここで，$z=py+q$ から，$s_z{}^2=p^2s_y{}^2$，$s_{xz}=ps_{xy}$ となり，

$$s_z{}^2=p^2(4m^2+6m+6)=2p^2(2m^2+3m+3)\,,\ \ s_{xz}=-3pm$$

(3)　まず，$s_x{}^2=\overline{x^2}-(\overline{x})^2=\dfrac{49+36+64+100+16}{5}-49=4$ である。

ここで，x と z の相関係数が $\dfrac{3}{4}$ から $\dfrac{s_{xz}}{\sqrt{s_x{}^2}\sqrt{s_z{}^2}}=\dfrac{3}{4}$ となり，$4s_{xz}=3s_xs_z$ より，

$$-12pm=3\cdot2\sqrt{2p^2(2m^2+3m+3)}\,,\ \ -2pm=|\,p\,|\sqrt{2(2m^2+3m+3)}$$

すると，$-2pm\geqq0$ ($pm\leqq0$) として，両辺 2 乗すると，

$$4p^2m^2=2p^2(2m^2+3m+3),\ \ 2m^2=2m^2+3m+3$$

よって，$3m+3=0$ から $m=-1$ となり，$b=5\cdot(-1)+3=-2$ である。

また，$p\neq0$ かつ $-p\leqq0$ から，p は正である。

［解 説］

データの分析の内容で，文系では 8 年ぶり，理系は初めての出題です。なお，(2)では，共分散についての公式 $s_{xy}=\overline{xy}-\overline{x}\cdot\overline{y}$，$s_{xz}=ps_{xy}$ を，説明なしに利用しています。

$\boxed{18}$　　　　［信州大・医］

3 つの箱 A, B, C と, 赤球 8 個, 白球 30 個がある。この 38 個の球から 30 個選び, 3 つの箱 A, B, C に 10 個ずつ入れるとき, 次の問いに答えよ。ただし, 同じ色の球は区別しないものとする。

(1)　どの箱にも少なくとも 1 個の赤球が入り, かつ, すべての赤球がいずれかの箱に入るような入れ方は何通りあるか。

(2)　入れ方は全部で何通りあるか。

18 ［信州大・医］

赤球 8 個，白球 30 個の合計 38 個の球から 30 個選び，3 つの箱 A，B，C に 10 個ずつ入れる。このとき，A, B, C に入る赤球の個数をそれぞれ a, b, c とおく。

(1) すべての赤球がいずれかの箱に入るのは，赤球 8 個，白球 22 個選んだときで，しかもどの箱にも少なくとも 1 個の赤球が入るのは，

$$a+b+c=8 \quad (a\geqq 1,\ b\geqq 1,\ c\geqq 1)\cdots\cdots\cdots①$$

①を満たす$(a,\ b,\ c)$の組の数は，右図のように 8 個の○を並べ，その間の 7 か所から 2 か所を選んで仕切りを入れる場合の数に対応する。

○|○ ○ ○ ○|○ ○ ○
a b c

これより，求める入れ方は${}_7\mathrm{C}_2=21$通りとなる。

(2) 選んだ赤球の数を $k\,(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 8)$ として，(1)と同様に考えると，

$$a+b+c=k \quad (a\geqq 0,\ b\geqq 0,\ c\geqq 0)\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$a'=a+1$，$b'=b+1$，$c'=c+1$ とおくと，②は，

$$a'+b'+c'=k+3 \quad (a'\geqq 1,\ b'\geqq 1,\ c'\geqq 1)\cdots\cdots\cdots③$$

$(a,\ b,\ c)$ の組の個数と $(a',\ b',\ c')$ の組の個数は一致するので，②を満たす$(a,\ b,\ c)$の組は，③から ${}_{k+2}\mathrm{C}_2=\dfrac{1}{2}(k+2)(k+1)$ 通りとなる。

したがって，入れ方の総数を N とすると，

$$N=\sum_{k=0}^{8}\frac{1}{2}(k+2)(k+1)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{8}\frac{1}{3}\{(k+3)(k+2)(k+1)-(k+2)(k+1)k\}$$

$$=\frac{1}{6}(11\cdot 10\cdot 9-2\cdot 1\cdot 0)=165$$

［解 説］

重複組合せについての有名問題です。(2)は(1)の解法の流用を考え，変数の変換を行っています。

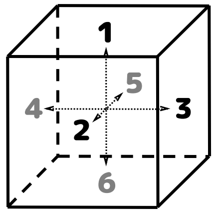
$\boxed{19}$ ［京都大・文］

n 個の異なる色を用意する。立方体の各面にいずれかの色を塗る。各面にどの色を塗るかは同様に確からしいとする。辺を共有するどの 2 つの面にも異なる色が塗られる確率を p_n とする。次の問いに答えよ。

(1) p_3 を求めよ。

(2) p_4 を求めよ。

$\boxed{19}$ ［京都大・文］



まず，右図のように，立方体の面に，1 と 6, 2 と 5, 3 と 4 が対面になるように印をつける。そして，辺を共有するどの 2 つの面にも異なる色が塗られることを「塗り分ける」とよぶ。

(1) 3 色 A, B, C を用意し，立方体の各面を塗るとき，3^6 通りの場合が同様に確からしいとする。

まず，2 色以下では立方体を塗り分けられないので，3 色すべてを用いる。

塗り分けのパターンは，対面 1 と 6，対面 2 と 5，対面 3 と 4 が同色のときだけで 1 通りとなり，このときの面と色との対応は $3!$ 通りある。

すると，3 色を用意したとき，立方体を塗り分ける確率 p_3 は，

$$p_3=\frac{1\times 3!}{3^6}=\frac{2}{243}$$

(2) 4 色 A, B, C, D を用意し，立方体の各面を塗るとき，4^6 通りの場合が同様に確からしいとする。このとき，立方体を塗り分けるには，3 色または 4 色が必要で，

(i) 3 色で塗るとき

3 色の選び方が ${}_4\mathrm{C}_3=4$ 通りで，塗り分け方は(1)と同様に $1\times 3!$ 通りずつある。

すると，3 色で塗り分けるときの確率は $\dfrac{4\times 1\times 3!}{4^6}=\dfrac{3}{2^9}$ となる。

(ii) 4 色で塗るとき

塗り分けのパターンは，対面 1 と 6，対面 2 と 5，対面 3 と 4 のうち，2 組の対面が同色のときで，その対面の選び方より ${}_3\mathrm{C}_2=3$ 通りとなる。そして，このときの面と色との対応は $4!$ 通りずつある。

すると，4 色で塗り分けるときの確率は $\dfrac{3\times 4!}{4^6}=\dfrac{9}{2^9}$ となる。

(i)(ii)より，4 色を用意したとき，立方体を塗り分ける確率 p_4 は，

$$p_4=\frac{3}{2^9}+\frac{9}{2^9}=\frac{3}{2^7}=\frac{3}{128}$$

［解 説］

塗り分けを題材にした確率の問題です。さいころと同じように各面に印をつけて考えています。なお，(2)は(i)の場合について要注意です。

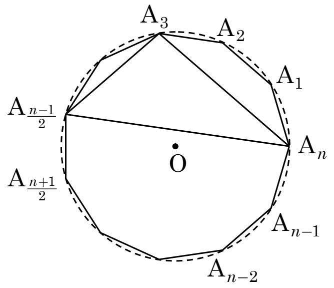
$\boxed{20}$　　［一橋大・文］

n を 3 以上の奇数とする。円に内接する正 n 角形の頂点から無作為に相異なる 3 点を選んだとき，その 3 点を頂点とする三角形の内部に円の中心が含まれる確率 p_n を求めよ。

20　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［一橋大・文］

3 以上の奇数 n に対して，点 O を中心とする円をとり，それに内接する正 n 角形を $A_1A_2\cdots A_n$ とおく。

そして，n 個の頂点から異なる 3 点を同時に選び，選んだ 3 点を頂点とする三角形が O を内部に含む確率を p_n，内部に含まない確率を q_n とおく。



まず，n 個の頂点から異なる 3 点を選ぶ場合の数は，

$$ {}_nC_3=\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)\ \text{（通り）}$$

ここで，n が 5 以上の奇数で，1 つの頂点が A_n の三角形が O を内部に含まないとき，残りの頂点を，$1\leqq i<j\leqq\dfrac{n-1}{2}$ として，A_i，A_j とする。

このとき，i の選び方の数 N は，$j=2$，$j=3$，…，$j=\dfrac{n-1}{2}$ の場合を考え，

$$N={}_1C_1+{}_2C_1+\cdots+{}_{\frac{n-3}{2}}C_1=1+2+\cdots+\frac{n-3}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\cdot\frac{n-1}{2}$$

$$=\frac{1}{8}(n-3)(n-1)\ \text{（通り）}$$

これより，最長辺 A_nA_j で O を内部に含まない三角形は N 個となる。

そして，これらの三角形を O のまわりに回転して考えると，O を内部に含まない三角形は合わせて nN 個となり，

$$nN=\frac{1}{8}n(n-3)(n-1)$$

したがって，三角形が O を内部に含まない確率 q_n は，

$$q_n=\frac{nN}{{}_nC_3}=\frac{6}{8}\cdot\frac{n(n-3)(n-1)}{n(n-1)(n-2)}=\frac{3(n-3)}{4(n-2)}$$

なお，$n=3$ のとき $q_n=0$ となり，このときも成立している。

さらに，n は奇数のため，点 O が三角形の辺上に位置する場合はないので，$p_n+q_n=1$ となり，

$$p_n=1-q_n=1-\frac{3(n-3)}{4(n-2)}=\frac{n+1}{4(n-2)}$$

［解　説］

図形と確率についての問題です。n の値を 5, 7, 9, …として，余事象を考えるという方針を立てました。なお，今年の東大・文系に，三角形を四角形にしただけの問題が出ていましたので，その解答例を流用しています。