1　　［東京工大］

整数の組$(a,\ b)$に対して 2 次式$f(x)=x^2+ax+b$を考える。方程式$f(x)=0$の複素数の範囲のすべての解αに対して$\alpha^n=1$となる正の整数 n が存在するような組$(a,\ b)$をすべて求めよ。

1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京工大］

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, bは整数)に対し，方程式$f(x)=0$のすべての解αについて，ある正の整数nで$\alpha^n=1$より，$|\alpha^n|=1$から$|\alpha|^n=1$となり，$|\alpha|=1$である。

(i)　異なる2実数解$x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$をもつとき

$|\alpha|=|\beta|=1$より$\alpha=\pm1$，$\beta=\pm1$で，$\alpha<\beta$から$(\alpha,\ \beta)=(-1,\ 1)$である。

このとき$\alpha^2=1$，$\beta^2=1$となり，$f(x)=(x+1)(x-1)=x^2-1$から，

$(a,\ b)=(0,\ -1)$

(ii)　重解$x=\alpha$をもつとき

$|\alpha|=1$より$\alpha=\pm1$である。このとき$\alpha^2=1$となる。

すると，$f(x)=(x-1)^2=x^2-2x+1$または$f(x)=(x+1)^2=x^2+2x+1$より，

$(a,\ b)=(-2,\ 1)$，$(2,\ 1)$

(iii) 異なる2虚数解$x=\alpha,\ \overline{\alpha}$をもつとき

$|\alpha|=|\overline{\alpha}|=1$より，$0<\theta<\pi$として，$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$，$\overline{\alpha}=\cos\theta-i\sin\theta$

すると，$a=-(\alpha+\overline{\alpha})=-2\cos\theta$，$b=\alpha\overline{\alpha}=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$となる。

ここで，$-2<-2\cos\theta<2$から，整数aの値は$a=-1,\ 0,\ 1$となり，

・$a=-1$のとき　$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$から$\theta=\dfrac{\pi}{3}$となり，$\alpha=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$

$\alpha^6=1$，$(\overline{\alpha})^6=1$

・$a=0$のとき　$\cos\theta=0$から$\theta=\dfrac{\pi}{2}$となり，$\alpha=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$

$\alpha^4=1$，$(\overline{\alpha})^4=1$

・$a=1$のとき　$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$から$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$となり，$\alpha=\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi$

$\alpha^3=1$，$(\overline{\alpha})^3=1$

よって，$(a,\ b)=(-1,\ 1)$，$(0,\ 1)$，$(1,\ 1)$

(i)～(iii)より，$(a,\ b)=(-2,\ 1)$，$(-1,\ 1)$，$(0,\ 1)$，$(1,\ 1)$，$(2,\ 1)$，$(0,\ -1)$

［解　説］

複素数と方程式の問題です。実数解と虚数解に分けて処理をしていますが，いずれの場合も解の絶対値は1です。

2 ［名古屋大］

c を 1 より大きい実数とする。また，i を虚数単位として，$\alpha = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ とおく。複素数 z に対して，

$$P(z) = z^3 - 3z^2 + (c+2)z - c,\quad Q(z) = -\alpha^7 z^3 + 3\alpha^6 z^2 + (c+2)\alpha z - c$$

と定める。

(1) 方程式 $P(z)=0$ を満たす複素数 z をすべて求め，それらを複素数平面上に図示せよ。

(2) 方程式 $Q(z)=0$ を満たす複素数 z のうち実部が最大のものを求めよ。

(3) 複素数 z についての 2 つの方程式 $P(z)=0$，$Q(z)=0$ が共通解 β をもつとする。そのときの c の値と β を求めよ。

２　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［名古屋大］

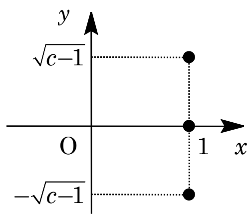
(1) $P(z)=z^3-3z^2+(c+2)z-c$ に対して,

$$P(z)=(z-1)(z^2-2z+c)$$

これより, 方程式 $P(z)=0$ を満たす z は, $c>1$ より,

$$z=1,\ z=1\pm\sqrt{1-c}=1\pm\sqrt{c-1}\,i$$

複素数平面上に図示すると, 右図の 3 点である。



(2) $\alpha=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}=\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$ に対し, $\alpha^4=\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)=-1$ から,

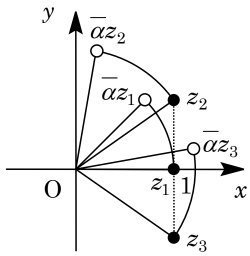
$$Q(z)=-\alpha^7z^3+3\alpha^6z^2+(c+2)\alpha z-c=\alpha^3z^3-3\alpha^2z^2+(c+2)\alpha z-c$$

これより, 方程式 $Q(z)=0$ を満たす αz は, (1)より $\alpha z=1$, $\alpha z=1\pm\sqrt{c-1}\,i$

ここで, $|\alpha|=1$ から $\alpha\overline{\alpha}=1$ となり, $\dfrac{1}{\alpha}=\overline{\alpha}=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}$ から,

$$z=\frac{1}{\alpha}=\overline{\alpha},\ z=\frac{1}{\alpha}(1\pm\sqrt{c-1}\,i)=\overline{\alpha}(1\pm\sqrt{c-1}\,i)$$

$P(z)=0$ の解を $z_1=1$, $z_2=1+\sqrt{c-1}\,i$, $z_3=1-\sqrt{c-1}\,i$ とおくと, $Q(z)=0$ の解は $\overline{\alpha}z_1$, $\overline{\alpha}z_2$, $\overline{\alpha}z_3$ となり, 複素数平面上で z_1, z_2, z_3 を原点まわりに $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転した点となる。



$\overline{\alpha}z_1=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ の実部は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\overline{\alpha}z_2=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{c-1}\,i)$ の実部は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{c-1})$, $\overline{\alpha}z_3=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{c-1}\,i)$ の実部は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{c-1})$ である。

すると, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{c-1})<\dfrac{1}{\sqrt{2}}<\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{c-1})$ から, 実部が最大のものは,

$$\overline{\alpha}z_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{c-1})+\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{c-1})i$$

(3) 2 つの方程式 $P(z)=0$, $Q(z)=0$ が共通解 β をもつとき, $\overline{\alpha}z_1$ と $\overline{\alpha}z_2$ は実部が 1 より小であること, $|\overline{\alpha}z_3|=|z_2|=\sqrt{c}>1$ に注目すると, $\beta=\overline{\alpha}z_3=z_2$ となり,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{c-1})+\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{c-1})i=1+\sqrt{c-1}\,i$$

すると, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{c-1})=1$ ……①, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{c-1})=\sqrt{c-1}$ ……②である。

①から $\sqrt{c-1}=\sqrt{2}-1$ となり, これは②を満たすので,

$$c=(\sqrt{2}-1)^2+1=4-2\sqrt{2},\ \beta=1+(\sqrt{2}-1)i$$

［解 説］

高次方程式と複素数平面の問題です。$P(z)$ と $Q(z)$ の式の類似性に着目することが, 解くための第一歩です。

3 ［大阪大］

α，β を複素数とし，複素数 z に対して，$f(z)=z^2+\alpha z+\beta$ とおく。α，β は $|f(1)-3|\leqq 1$ かつ $|f(i)-1|\leqq 3$ を満たしながら動く。ただし，i は虚数単位である。

(1) $f(1+i)$ がとりうる値の範囲を求め，複素数平面上に図示せよ。

(2) $f(1+i)=0$ であるとき，α，β の値を求めよ。

3　［大阪大］

(1)　$f(z)=z^2+\alpha z+\beta$ に対し，$f(1)=1+\alpha+\beta$，$f(i)=-1+i\alpha+\beta$

さて，$|f(1)-3|\leqq 1$ かつ $|f(i)-1|\leqq 3$ より，

$$|\alpha+\beta-2|\leqq 1\cdots\cdots\cdots①,\quad |i\alpha+\beta-2|\leqq 3\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$u=\alpha+\beta-2\cdots\cdots③$，$v=i\alpha+\beta-2\cdots\cdots④$とおくと，①②より，

$$|u|\leqq 1\cdots\cdots\cdots①',\quad |v|\leqq 3\cdots\cdots\cdots②'$$

③④から，$\alpha(1-i)=u-v$ となり，$\alpha=\dfrac{u-v}{1-i}=\dfrac{1+i}{2}u-\dfrac{1+i}{2}v$ であるので，

$$f(1+i)=(1+i)^2+\alpha(1+i)+\beta=2i+\alpha+(i\alpha+\beta)$$
$$=2i+\frac{1+i}{2}u-\frac{1+i}{2}v+(v+2)=\frac{1+i}{2}u+\frac{1-i}{2}v+2+2i\cdots\cdots\cdots⑤$$

すると，$f(1+i)-(2+2i)=\dfrac{1+i}{2}u+\dfrac{1-i}{2}v$ となり，

$$|f(1+i)-(2+2i)|=\left|\frac{1+i}{2}u+\frac{1-i}{2}v\right|\leqq\left|\frac{1+i}{2}u\right|+\left|\frac{1-i}{2}v\right|\cdots\cdots\cdots⑥$$

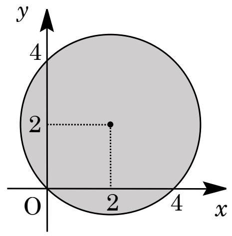
ここで，$\left|\dfrac{1+i}{2}\right|=\left|\dfrac{1-i}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ であり，①′②′を用いると，

$$\left|\frac{1+i}{2}u\right|+\left|\frac{1-i}{2}v\right|=\left|\frac{1+i}{2}\right||u|+\left|\frac{1-i}{2}\right||v|\leqq\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot1+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot3=2\sqrt{2}\cdots\cdots\cdots⑦$$

したがって，⑥⑦より，

$$|f(1+i)-(2+2i)|\leqq 2\sqrt{2}$$

これより，複素数平面上で，$f(1+i)$ は中心 $2+2i$ で半径 $2\sqrt{2}$ の円の周上または内部を動く。図示すると，右図の網点部である。ただし，境界は領域に含む。



(2)　$f(1+i)=0$ のとき，⑤より $\dfrac{1+i}{2}u+\dfrac{1-i}{2}v+2+2i=0\cdots\cdots\cdots⑧$

そして，$|f(1+i)-(2+2i)|=2\sqrt{2}$ から，⑥⑦の等号成立条件より，$k>0$ として，

$$\frac{1-i}{2}v=k\cdot\frac{1+i}{2}u,\quad |u|=1,\quad |v|=3$$

すると，$\left|\dfrac{1-i}{2}\right||v|=k\left|\dfrac{1+i}{2}\right||u|$ から $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot3=k\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot1$ となり，$k=3$ である。

これより，$\dfrac{1-i}{2}v=3\cdot\dfrac{1+i}{2}u$ となり，⑧に代入すると，

$$\frac{1+i}{2}u+3\cdot\frac{1+i}{2}u+2+2i=0,\quad 2(1+i)u+2+2i=0$$

よって，$u=-1$ となり，$v=3\cdot\dfrac{1+i}{1-i}u=\dfrac{3}{2}(1+i)^2u=3iu=-3i$ である。

すると，③④から，$\alpha=\dfrac{1+i}{2}\cdot(-1)-\dfrac{1+i}{2}\cdot(-3i)=-2+i$

$$\beta=-1-(-2+i)+2=3-i$$

［解 説］

複素数平面と図形の問題です。上の解では，⑤式と$|u|\leqq 1$，$|v|\leqq 3$を見比べ，三角不等式が思い浮かびました。もっとも久々の登場でしたが……。

$\boxed{4}$ ［九州大］

整式 $f(z)=z^6+z^4+z^2+1$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(z)=0$ をみたすすべての複素数 z に対して，$|z|=1$ が成り立つことを示せ。

(2) 次の条件をみたす複素数 w をすべて求めよ。

条件：$f(z)=0$ をみたすすべての複素数 z に対して $f(wz)=0$ が成り立つ。

$\boxed{4}$ ［九州大］

(1) $f(z)=z^6+z^4+z^2+1$ に対して，$f(z)=0$ とすると，

$$z^4(z^2+1)+z^2+1=0,\ (z^2+1)(z^4+1)=0$$

・$z^2+1=0$ に対して，$z^2=-1$ から $z=\pm i$ となり，

$$z=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2},\ z=\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi$$

・$z^4+1=0$ に対して，$z^4+2z^2+1-2z^2=0$ と変形すると，

$$(z^2+1)^2-(\sqrt{2}z)^2=0,\ (z^2-\sqrt{2}z+1)(z^2+\sqrt{2}z+1)=0$$

これより，$z=\dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)$，$z=\dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1\pm i)$ となり，

$$z=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4},\ z=\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi$$

$$z=\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi,\ z=\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi$$

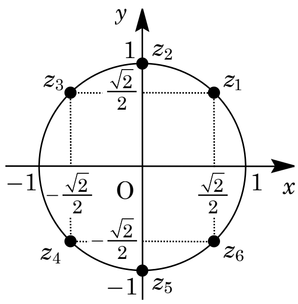
以上より，$f(z)=0$ のすべての解 z について，$|z|=1$ が成り立つ。

(2) $f(z)=0$ をみたすすべての z に対し，$f(wz)=0$ が成り立つとき，(1)より，

$$|z|=1,\ |wz|=1$$

すると，$|w||z|=1$ から $|w|=1$ となり，$w=\cos\theta+i\sin\theta\ (0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと，複素数平面上で，点 wz は点 z を原点まわりに θ だけ回転した点である。

さて，$f(z)=0$ の解を，右図のように，$z=z_1$，z_2，z_3，z_4，z_5，z_6 とおくと，点 wz と点 z が一致する条件は，z_1 に着目すると，



・$wz_1=z_1$ のとき　$\theta=0$ から wz と z は一致する。

・$wz_1=z_2$ のとき　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ となり $f(wz_3)\neq0$ である。

・$wz_1=z_3$ のとき　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ となり $f(wz_2)\neq0$ である。

・$wz_1=z_4$ のとき　$\theta=\pi$ から原点対称移動となり，wz と z は一致する。

・$wz_1=z_5$ のとき　$\theta=\dfrac{5}{4}\pi$ となり $f(wz_3)\neq0$ である。

・$wz_1=z_6$ のとき　$\theta=\dfrac{3}{2}\pi$ となり $f(wz_2)\neq0$ である。

したがって，点 wz と点 z が一致する条件は，$\theta=0$ または $\theta=\pi$ となり，

$$w=\cos0+i\sin0=1,\ w=\cos\pi+i\sin\pi=-1$$

［解 説］

高次方程式の解と複素数平面についての問題です。(1)は複 2 次方程式を解きましたが，他の解法もあります。また，(2)は場合分けを行い，丁寧に記しました。

5 ［大阪公大］

$b,\ c$ は実数で $c>0$ とする。4 次方程式 $x^4+bx^2+c^2=0$ について，次の問いに答えよ。

(1) 4 個の相異なる虚数解をもつための b と c の条件を求めよ。

(2) (1)で求めた条件の下で，二重根号を用いずに 4 個の解を表せ。

(3) (2)で求めた 4 個の解が，複素数平面上の同一円周上にあるための b と c の条件を求めよ。

(4) (2)で求めた 4 個の解が，複素数平面上の同一直線上に等間隔に並ぶための b と c の条件を求めよ。

5　　［大阪公大］

(1)　$c>0$ のとき，4 次方程式 $x^4+bx^2+c^2=0$ ……①に対して，$x^2=t$ とおくと，①は $t^2+bt+c^2=0$ ……②となり，

$$t=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c^2}}{2}=\frac{-b\pm\sqrt{(b+2c)(b-2c)}}{2}$$

さて，①が 4 個の相異なる虚数解をもつには，②が異なる 2 つの解をもつことが必要なので，$b^2-4c^2\neq 0$ となり，

(i)　$b^2-4c^2>0$ $(b<-2c,\ 2c<b)$ のとき

$c^2>0$ から，②は 2 つの異なる正の解または 2 つの異なる負の解をもつ。

すると，①が 4 個の相異なる虚数解をもつ条件は，②が 2 つの異なる負の解をもつことに対応し，$-\frac{b}{2}<0$ すなわち $b>0$ である。

よって，$b<-2c,\ 2c<b$ と合わせると，$0<2c<b$ となる。

(ii)　$b^2-4c^2<0$ $(-2c<b<2c)$ のとき

②は異なる 2 つの虚数解 $t=\frac{-b\pm\sqrt{4c^2-b^2}\,i}{2}$ をもち，$x^2=t$ から，①は 4 個の相異なる虚数解をもつ。

(i)(ii)より，①が 4 個の相異なる虚数解をもつ条件は，

$$0<2c<b,\quad -2c<b<2c$$

(2)　$p,\ q$ を実数として，$x=p+qi$ $(q\neq 0)$ とおくと，$x=p^2-q^2+2pqi$ となる。

(i)　$0<2c<b$ のとき　$p^2-q^2=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c^2}}{2}$ ……③，$2pq=0$ ……④

$q\neq 0$ なので，④から $p=0$ となり，③に代入すると，

$$q^2=-\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c^2}}{2}=\frac{b\mp\sqrt{(b+2c)(b-2c)}}{2}=\frac{2b\mp 2\sqrt{(b+2c)(b-2c)}}{4}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{b+2c}\mp\sqrt{b-2c}\right)^2}{4}\quad\text{（複号同順）}$$

これより，$q=\pm\frac{\sqrt{b+2c}\mp\sqrt{b-2c}}{2}$ となり，①の解は，

$$x=\frac{\sqrt{b+2c}\pm\sqrt{b-2c}}{2}i,\quad -\frac{\sqrt{b+2c}\pm\sqrt{b-2c}}{2}i$$

(ii)　$-2c<b<2c$ のとき　$p^2-q^2=-\frac{b}{2}$ ……⑤，$2pq=\pm\frac{\sqrt{4c^2-b^2}}{2}$ ……⑥

⑥から $q=\pm\frac{\sqrt{4c^2-b^2}}{4p}$ となり，⑤に代入すると $p^2-\frac{4c^2-b^2}{16p^2}=-\frac{b}{2}$ から，

$$16p^4-(4c^2-b^2)+8bp^2=0,\quad 16p^4+8bp^2-(2c+b)(2c-b)=0$$

これより，$\{4p^2+(2c+b)\}\{4p^2-(2c-b)\}=0$ となり，$2c+b>0$ から，

$$4p^2-(2c-b)=0\,,\ \ p^2=\frac{2c-b}{4}\,,\ \ p=\pm\frac{\sqrt{2c-b}}{2}$$

⑤に代入すると $q^2=\dfrac{2c-b}{4}+\dfrac{b}{2}=\dfrac{2c+b}{4}$ から，$q=\pm\dfrac{\sqrt{2c+b}}{2}$ となり，①の解は，

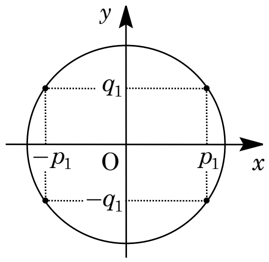
$$x=\frac{\sqrt{2c-b}\pm\sqrt{2c+b}\,i}{2}\,,\ \ -\frac{\sqrt{2c-b}\pm\sqrt{2c+b}\,i}{2}$$

(3)　①の 4 個の解が，複素数平面上の同一円周上にあるのは，

(i)　$0<2c<b$ のとき　4 個の解はすべて虚軸上にあり，同一円周上にない。

(ii)　$-2c<b<2c$ のとき

$p_1=\dfrac{\sqrt{2c-b}}{2}>0$，$q_1=\dfrac{\sqrt{2c+b}}{2}>0$ とおくと，4 個の解は，p_1+q_1i，p_1-q_1i，$-p_1+q_1i$，$-p_1-q_1i$ となる。



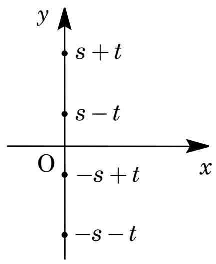
複素数平面上に図示すると，4 個の解は，中心が原点で半径 $\sqrt{{p_1}^2+{q_1}^2}$ の円周上にある。

(i)(ii)より，求める条件は $-2c<b<2c$ である。

(4)　①の 4 個の解が，複素数平面上の同一直線上に等間隔に並ぶのは，

(i)　$0<2c<b$ のとき

$s=\dfrac{\sqrt{b+2c}}{2}>0$，$t=\dfrac{\sqrt{b-2c}}{2}>0$ とおくと，4 個の解は，$(s+t)i$，$(s-t)i$，$(-s+t)i$，$(-s-t)i$ となる。



$s+t>s-t>0$ に注目し，複素数平面上に図示すると，4 個の解は虚軸上に並び，$(-s-t)i=-(s+t)i$，$(-s+t)i=-(s-t)i$ から，等間隔に並ぶ条件は，

$$(s+t)-(s-t)=(s-t)-(-s+t)\,,\ \ 2t=2s-2t$$

すると，$s=2t$ から $\dfrac{\sqrt{b+2c}}{2}=2\cdot\dfrac{\sqrt{b-2c}}{2}$ となり，$b+2c=4(b-2c)$ より，

$3b=10c$　（この式は $0<2c<b$ を満たしている）

(ii)　$-2c<b<2c$ のとき　4 個の解は同一円周上にあるので，同一直線上にない。

(i)(ii)より，求める条件は $3b=10c$ である。

［解　説］

複 2 次方程式と複素数平面の融合問題です。質と量，ともにハードです。

6　　［筑波大］

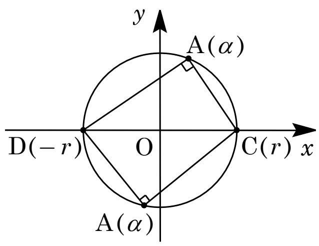
定数αは実数でない複素数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\dfrac{\alpha-|\alpha|}{\alpha+|\alpha|}$は純虚数であることを示せ。

(2)　純虚数βで，$\dfrac{\beta-|\alpha|}{\alpha+|\alpha|}$が純虚数となるものがただ１つ存在することを示せ。

(3)　複素数zを$\dfrac{z-|\alpha|}{\alpha+|\alpha|}$が純虚数となるように動かすとき，$|z|$が最小となる$z$を$\alpha$を用いて表せ。

$\boxed{6}$ ［筑波大］

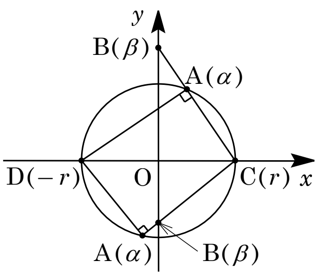


(1) まず，実数でない複素数αに対して$r=|\alpha|>0$とし，複素数平面上で，$A(\alpha)$，$C(r)$，$D(-r)$とおくと，$AC\perp AD$である。

ここで，$u=\dfrac{\alpha-|\alpha|}{\alpha+|\alpha|}=\dfrac{\alpha-r}{\alpha+r}$とおくと，$u\neq0$で，

$$\arg u=\arg\frac{\alpha-r}{\alpha+r}=\arg\frac{\alpha-r}{\alpha-(-r)}=\pm\frac{\pi}{2}$$

したがって，uは純虚数である。



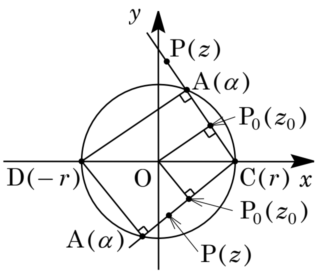
(2) 純虚数βに対し，複素数平面上で$B(\beta)$とおく。

$v=\dfrac{\beta-|\alpha|}{\alpha+|\alpha|}=\dfrac{\beta-r}{\alpha+r}$とおくと，$v$は純虚数なので，

$$\arg v=\arg\frac{\beta-r}{\alpha+r}=\arg\frac{\beta-r}{\alpha-(-r)}=\pm\frac{\pi}{2}$$

これより$BC\perp AD$となり，点$B(\beta)$は直線 AC 上にある。そして，AC は実軸にも虚軸にも平行でないので，$A(\alpha)$に対して原点以外の虚軸上の点$B(\beta)$はただ１つ決まる。

すなわち，vが純虚数となる純虚数βはただ１つ存在する。



(3) 複素数zに対し，複素数平面上で$P(z)$とおく。

$w=\dfrac{z-|\alpha|}{\alpha+|\alpha|}=\dfrac{z-r}{\alpha+r}$とおくと，$w$は純虚数なので，

$$\arg w=\arg\frac{z-r}{\alpha+r}=\arg\frac{z-r}{\alpha-(-r)}=\pm\frac{\pi}{2}$$

これより$PC\perp AD$となり，点$P(z)$は直線 AC 上を動く。すると，$|z|$が最小となるのは，$P(z)$が原点 O から AC に下ろした垂線の足$P_0(z_0)$に一致するときである。

このとき，点P_0は線分 AC の中点となるので，$z_0=\dfrac{\alpha+r}{2}=\dfrac{\alpha+|\alpha|}{2}$である。

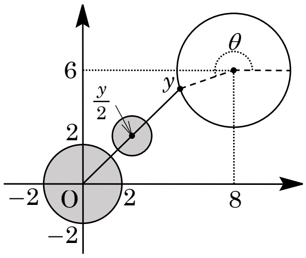
［解 説］

複素数平面の問題です。まず，共役複素数を利用して(1)と(2)を解いたのですが，その方法では(3)の処理がたいへん複雑になり，方針を転換しました。そして，図形的に説明したのが上の解答例です。

$\boxed{7}$　［京都大］

$|x| \leqq 2$ を満たす複素数 x と，$|y-(8+6i)|=3$ を満たす複素数 y に対して，$z=\dfrac{x+y}{2}$ とする。このような複素数 z が複素数平面において動く領域を図示し，その面積を求めよ。

$\boxed{7}$ ［京都大］



複素数 x, y に対して,

$$\left|x\right| \leqq 2 \cdots\cdots\cdots ①,\ \left|y-(8+6i)\right| = 3 \cdots\cdots\cdots ②$$

②から, y は中心 $8+6i$ で半径 3 の円周を動き,

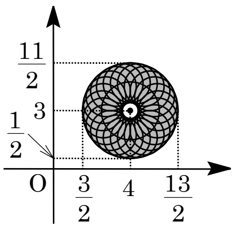
$$y = (8+3\cos\theta)+(6+3\sin\theta)i \cdots\cdots\cdots ③$$

さて, y の位置をいったん固定したとき, z は $z = \dfrac{x+y}{2}$ から $x = 2z - y$ となり, ①に代入すると,

$$\left|2z-y\right| \leqq 2,\ \left|z-\frac{y}{2}\right| \leqq 1 \cdots\cdots\cdots ④$$

④より, z は中心 $\dfrac{y}{2}$ で半径 1 の円の内部または周上を動く。そして, この領域を中心 $\dfrac{y}{2}$ の円板 D とする。

ここで, この状態を保ったまま, ③を満たすように y の位置を動かすと, 円板 D の中心 $\dfrac{y}{2}$ は, $\dfrac{y}{2} = \left(4+\dfrac{3}{2}\cos\theta\right)+\left(3+\dfrac{3}{2}\sin\theta\right)i$ となり, 中心 $4+3i$ で半径 $\dfrac{3}{2}$ の円周上を動くことになる。



以上より, z が動く領域は右図の網点部となり, 中心が $4+3i$ で, 外径が $\dfrac{3}{2}+1=\dfrac{5}{2}$, 内径が $\dfrac{3}{2}-1=\dfrac{1}{2}$ のドーナツ型である。

なお, 境界は領域に含む。また, この領域の面積は,

$$\pi\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}\pi - \frac{1}{4}\pi = 6\pi$$

［解 説］

複素数平面上の軌跡の問題です。1 文字固定して考えるタイプです。

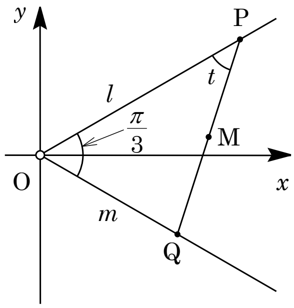
$\boxed{8}$ ［信州大］

原点を O とする座標平面において，直線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ の $x>0$ の部分を l，直線 $y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ の $x>0$ の部分を m とする。点 P は l 上を，点 Q は m 上を，$\mathrm{PQ}=2$ を満たしながら動くとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\angle\mathrm{OPQ}=t$ とするとき，P, Q の座標を t を用いて表せ。

(2) 線分 PQ の中点 M の軌跡を求め，座標平面上に図示せよ。

8　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［信州大］



(1)　$l: y=\frac{1}{\sqrt{3}}x\ (x>0)$ 上の点 P，$m: y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x\ (x>0)$ 上の点 Q に対して，$PQ=2$，$\angle OPQ=t$ のとき，

$$\angle POQ=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3},\ \angle OQP=\frac{2}{3}\pi-t$$

さて，$\triangle OPQ$ に正弦定理を適用すると，

$$\frac{OQ}{\sin t}=\frac{OP}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi-t\right)}=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{3}}$$

すると，$\frac{2}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$ から，$OQ=\frac{4}{\sqrt{3}}\sin t$ となり，

$$OP=\frac{4}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{2}{3}\pi-t\right)=\frac{4}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t\right)=2\cos t+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin t$$

ここで，点 $P(p_1,\ p_2)$，$Q(q_1,\ q_2)$ とおくと，

$$(p_1,\ p_2)=OP\left(\cos\frac{\pi}{6},\ \sin\frac{\pi}{6}\right)=\left(2\cos t+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin t\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$
$$=\left(\sqrt{3}\cos t+\sin t,\ \cos t+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin t\right)$$

$$(q_1,\ q_2)=OQ\left(\cos\frac{\pi}{6},\ -\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{\sqrt{3}}\sin t\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)=\left(2\sin t,\ -\frac{2}{\sqrt{3}}\sin t\right)$$

よって，$P\left(\sqrt{3}\cos t+\sin t,\ \cos t+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin t\right)$，$Q\left(2\sin t,\ -\frac{2}{\sqrt{3}}\sin t\right)$ である。

(2)　線分 PQ の中点 M を $M(x,\ y)$ とおくと，

$$x=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos t+\sin t+2\sin t)=\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos t+\sqrt{3}\sin t)=\sqrt{3}\cos\left(t-\frac{\pi}{3}\right)$$
$$y=\frac{1}{2}\left(\cos t+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin t-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin t\right)=\frac{1}{2\sqrt{3}}(\sqrt{3}\cos t-\sin t)=-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(t-\frac{\pi}{3}\right)$$

これより，$\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+(-\sqrt{3}y)^2=1$ となり，$\frac{x^2}{3}+3y^2=1$ である。

また，$0<t<\frac{2}{3}\pi$ から，$-\frac{\pi}{3}<t-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{3}$ となるので，

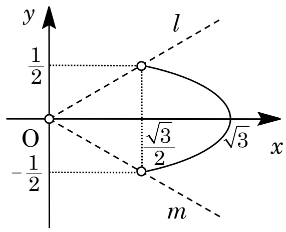
$$\frac{1}{2}<\cos\left(t-\frac{\pi}{3}\right)\leqq 1,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin\left(t-\frac{\pi}{3}\right)<\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，$\frac{\sqrt{3}}{2}<x\leqq\sqrt{3}$，$-\frac{1}{2}<y<\frac{1}{2}$ である。

以上より，中点 M の軌跡は，

$$\text{楕円}\ \frac{x^2}{3}+3y^2=1\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}<x\leqq\sqrt{3},\ -\frac{1}{2}<y<\frac{1}{2}\right)$$

図示すると右図の曲線である。ただし端点は含まない。



［解 説］

楕円を題材とした有名問題です。(2)の軌跡の限界については数式的に処理をしましたが, 題意から 2 つの半直線 l と m にはさまれた領域としてもよいでしょう。

$\boxed{9}$ ［京都大］

自然数 k に対して，$a_k = 2^{\sqrt{k}}$ とする。n を自然数とし，a_k の整数部分が n 桁であるような k の個数を N_n とする。また，a_k の整数部分が n 桁であり，その最高次の数字が 1 であるような k の個数を L_n とする。次を求めよ。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{N_n}$

ただし，例えば実数 2345.678 の整数部分 2345 は 4 桁で，最高次の数字は 2 である。

9　　　　［京都大］

$a_k = 2^{\sqrt{k}}$ に対して，a_k の整数部分が n 桁であるとき，$10^{n-1} \leqq 2^{\sqrt{k}} < 10^n$ より，

$$\log_2 10^{n-1} \leqq \log_2 2^{\sqrt{k}} < \log_2 10^n,\ (n-1)\log_2 10 \leqq \sqrt{k} < n\log_2 10$$

これより，$(n-1)^2(\log_2 10)^2 \leqq k < n^2(\log_2 10)^2$ ………①

そして，①を満たす k の個数 N_n は，$(\log_2 10)^2$ が有理数でないことに注意して，

$$N_n = [\,n^2(\log_2 10)^2\,] - [\,(n-1)^2(\log_2 10)^2\,] \text{ ………②}$$

すると，$n^2(\log_2 10)^2 - 1 < [\,n^2(\log_2 10)^2\,] \leqq n^2(\log_2 10)^2$

$$(n-1)^2(\log_2 10)^2 - 1 < [\,(n-1)^2(\log_2 10)^2\,] \leqq (n-1)^2(\log_2 10)^2$$

②より，$\{n^2 - (n-1)^2\}(\log_2 10)^2 - 1 < N_n < \{n^2 - (n-1)^2\}(\log_2 10)^2 + 1$ となり，

$$(2n-1)(\log_2 10)^2 - 1 < N_n < (2n-1)(\log_2 10)^2 + 1 \text{ ………③}$$

また，a_k の整数部分が n 桁で，その最高次の数字が 1 であるとき，

$$10^{n-1} \leqq 2^{\sqrt{k}} < 2\cdot 10^{n-1}$$

同様にすると，$(n-1)\log_2 10 \leqq \sqrt{k} < 1 + (n-1)\log_2 10$ となり，

$$(n-1)^2(\log_2 10)^2 \leqq k < 1 + 2(n-1)\log_2 10 + (n-1)^2(\log_2 10)^2 \text{ ………④}$$

そして，④を満たす k の個数 L_n は，

$$L_n = [\,1 + 2(n-1)\log_2 10 + (n-1)^2(\log_2 10)^2\,] - [\,(n-1)^2(\log_2 10)^2\,] \text{ ………⑤}$$

⑤より，$1 + 2(n-1)\log_2 10 - 1 < L_n < 1 + 2(n-1)\log_2 10 + 1$ となり，

$$2(n-1)\log_2 10 < L_n < 2(n-1)\log_2 10 + 2 \text{ ………⑥}$$

③⑥から，$\dfrac{2(n-1)\log_2 10}{(2n-1)(\log_2 10)^2 + 1} < \dfrac{L_n}{N_n} < \dfrac{2(n-1)\log_2 10 + 2}{(2n-1)(\log_2 10)^2 - 1}$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2(n-1)\log_2 10}{(2n-1)(\log_2 10)^2 + 1} = \frac{2\log_2 10}{2(\log_2 10)^2} = \frac{1}{\log_2 10} = \log_{10} 2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2(n-1)\log_2 10 + 2}{(2n-1)(\log_2 10)^2 - 1} = \frac{2\log_2 10}{2(\log_2 10)^2} = \frac{1}{\log_2 10} = \log_{10} 2$$

したがって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{N_n} = \log_{10} 2$ である。

［解　説］

整数の個数と極限の融合問題です。極限については，まずアバウトに評価をして，その後，詰めの作業を行っています。なお，$(\log_2 10)^2$ が有理数でないことは，証明せずに使っています。ただ，この点が気になれば，N_n の②の個数や L_n の⑤の個数が 1 だけ大きくなったり，1 だけ小さくなったりすることも含め，③と⑥の評価式の範囲を少し拡大するという手もあります。

$\boxed{10}$ ［筑波大］

a と b は実数の定数とする。関数

$$f(x)=(1-2x^2)\cos 2x+2x\sin 2x+a\cos^2 x+b\int_0^x t\sin 2t\,dt$$

について，以下の問いに答えよ。

(1)　$a=8\pi^2$，$b=-4\pi$ のとき，$0<x<\dfrac{3}{2}\pi$ において $f(x)$ が極値をとる x の値をすべて求めよ。

(2)　次の条件(B)を満たす $a,\ b$ を求めよ。

(B)　$0<x<\dfrac{3}{2}\pi$ において，$f(x)$ は極値をとらない。

$\boxed{10}$ 　［筑波大］

(1)　$f(x)=(1-2x^2)\cos 2x+2x\sin 2x+a\cos^2 x+b\int_0^x t\sin 2t\,dt$ に対して，

$$f'(x)=-4x\cos 2x-2(1-2x^2)\sin 2x+2\sin 2x+4x\cos 2x-2a\cos x\sin x+bx\sin 2x$$
$$=-2(1-2x^2)\sin 2x+2\sin 2x-a\sin 2x+bx\sin 2x$$
$$=(4x^2+bx-a)\sin 2x$$

ここで，$a=8\pi^2$，$b=-4\pi$ のとき，

$$f'(x)=(4x^2-4\pi x-8\pi^2)\sin 2x=4(x+\pi)(x-2\pi)\sin 2x$$

すると，$0<x<\frac{3}{2}\pi$ において $(x+\pi)(x-2\pi)<0$ から，この区間における $f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，極値をとる x の値は $x=\frac{\pi}{2}$，π である。

(2)　$g(x)=4x^2+bx-a$ とおくと，(1)から $f'(x)=g(x)\sin 2x$ である。

さて，$0<x<\frac{3}{2}\pi$ において，$\sin 2x$ の符号変化は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$
$\sin 2x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

すると，$f(x)$ が極値をとらない，すなわち $f'(x)$ に符号変化がない条件は, 2 次関数 $g(x)$ が，$x=\frac{\pi}{2}$ の前後および $x=\pi$ の前後で符号変化があるときより，

$$g(x)=4\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(x-\pi)=4x^2-6\pi x+2\pi^2$$

したがって，$a=-2\pi^2$，$b=-6\pi$ である。

［解　説］

微分と増減の問題です。(2)の方針を立てるとき，(1)の具体例が誘導になっていることがわかります。

11 ［東北大］

$x \geqq 2$ を満たす実数 x に対し，$f(x)=\dfrac{\log(2x-3)}{x}$ とおく。必要ならば，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t}=0$ であること，および，自然対数の底 e が $2<e<3$ を満たすことを証明なしで用いてもよい。

(1) $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2(2x-3)}$ とおくとき，関数 $g(x)$ $(x \geqq 2)$ を求めよ。

(2) (1)で求めた関数 $g(x)$ に対し，$g(\alpha)=0$ を満たす 2 以上の実数 α がただ 1 つ存在することを示せ。

(3) 関数 $f(x)$ $(x \geqq 2)$ の増減と極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$ を調べ，$y=f(x)$ $(x \geqq 2)$ のグラフの概形を xy 平面上に描け。ただし，(2)の α は用いてよい。グラフの凹凸は調べなくてよい。

(4) $2 \leqq m < n$ を満たす整数 m, n の組 $(m,\ n)$ に対して，等式

(＊) $(2m-3)^n=(2n-3)^m$

が成り立つとする。このような組 $(m,\ n)$ をすべて求めよ。

11　［東北大］

(1)　$f(x)=\dfrac{\log(2x-3)}{x}\ (x\geqq 2)$ に対して，

$$f'(x)=\frac{\frac{2}{2x-3}x-\log(2x-3)}{x^2}=\frac{2x-(2x-3)\log(2x-3)}{x^2(2x-3)}$$

$f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2(2x-3)}$ から，$g(x)=x^2(2x-3)f'(x)=2x-(2x-3)\log(2x-3)$

(2)　$g'(x)=2-2\log(2x-3)-(2x-3)\cdot\dfrac{2}{2x-3}=-2\log(2x-3)$

$x\geqq 2$ において $g'(x)\leqq 0$ となり，$g(x)$ は単調に減少し，

$$g(2)=4>0,\ \lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}2x\left\{1-\left(1-\frac{3}{2x}\right)\log(2x-3)\right\}=-\infty$$

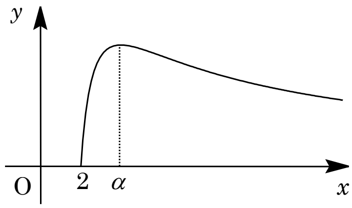
したがって，$g(\alpha)=0$ を満たす 2 以上の実数 α がただ 1 つ存在する。

(3)　$x\geqq 2$ において，$f'(x)$ の符号と $g(x)$ の符号は一致するので，(2)の結果から，$f(x)$ の増減は右表のようになり，

x	2	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\log(2x-3)}{2x-3}\cdot\frac{2x-3}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\log(2x-3)}{2x-3}\left(2-\frac{3}{x}\right)=0$$

これより，$y=f(x)\ (x\geqq 2)$ のグラフの概形は右図のようになる。



(4)　整数 m,n が $2\leqq m<n$ のとき，等式 $(2m-3)^n=(2n-3)^m$ ……(＊)に対して，

$$\log(2m-3)^n=\log(2n-3)^m,\ n\log(2m-3)=m\log(2n-3)$$

すると，$\dfrac{\log(2m-3)}{m}=\dfrac{\log(2n-3)}{n}$ から，$f(m)=f(n)$ となる。

さて，$f(3)=\dfrac{\log 3}{3}$，$f(4)=\dfrac{\log 5}{4}$，$f(5)=\dfrac{\log 7}{5}$，$f(6)=\dfrac{\log 9}{6}=\dfrac{\log 3}{3}$ から，

$$f(3)-f(4)=\frac{\log 3}{3}-\frac{\log 5}{4}=\frac{\log 3^4-\log 5^3}{12}=\frac{\log 81-\log 125}{12}<0$$

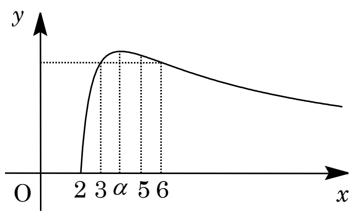
$$f(4)-f(5)=\frac{\log 5}{4}-\frac{\log 7}{5}=\frac{\log 5^5-\log 7^4}{20}=\frac{\log 3125-\log 2401}{20}>0$$

$$f(5)-f(6)=\frac{\log 7}{5}-\frac{\log 3}{3}=\frac{\log 7^3-\log 3^5}{15}=\frac{\log 343-\log 243}{15}>0$$

すると，$0=f(2)<f(3)<f(4)>f(5)>f(6)$ となり，$3<\alpha<5$ である。

したがって，$f(3)=f(6)$，$f(4)\neq f(5)$ から，等式(＊)が成立する $(m,\ n)$ は，

$$(m,\ n)=(3,\ 6)$$



［解 説］

微分の方程式への応用問題です。頻出タイプですが，詰めの作業がやや面倒です。

$\boxed{12}$ ［東京医歯大］

$f(x)$を連続関数とするとき，次の各問いに答えよ。

(1) 次の等式を示せ。 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\cos x\,dx$

(2) 次の等式を示せ。 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)(\sin x + \cos x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(1-t^2)\,dt$

(3) 次の定積分の値を求めよ。 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sqrt{\sin 2x}}\,dx$

12　［東京医歯大］

(1)　$u=\dfrac{\pi}{2}-x$ とおくと $du=-dx$ となり，$x=0\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき $u=\dfrac{\pi}{2}\to 0$ から，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\sin x\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\sin(\pi-2u))\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)(-du)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2u)\cos u\,du=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\cos x\,dx\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　$t=\sin x-\cos x$ とおくと $dt=(\cos x+\sin x)dx$ となり，$t=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ と変形すると，$x=0\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき $t=-1\to 1$ である。

また，$t^2=1-2\sin x\cos x=1-\sin 2x$ から，$\sin 2x=1-t^2$ となるので，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)(\sin x+\cos x)dx=\int_{-1}^1 f(1-t^2)dt\cdots\cdots\cdots②$$

(3)　$I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\sqrt{\sin 2x}}dx$ とする。ここで，$f(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ とおくと，$f(x)$ は連続関数であり，$I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\sin x\,dx$ と表せる。

すると，①から $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\cos x\,dx$ となり，$I+I$ を考え②を利用すると，

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)(\sin x+\cos x)dx=\int_{-1}^1 f(1-t^2)dt=\int_{-1}^1\frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}}dt$$

ここで，$f(1-t^2)$ は t についての偶関数なので，$2I=2\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}}dt$ となる。

さらに，$t=\sin\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと $dt=(\cos\theta)d\theta$ となり，$t=0\to 1$ のとき $\theta=0\to\dfrac{\pi}{2}$ から，$I=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}}dt$ は，

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{1+\sqrt{1-\sin^2\theta}}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{1+\cos\theta}\right)d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{2\cos^2\dfrac{\theta}{2}}\right)d\theta=\left[\theta-\tan\frac{\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$$

［解　説］

定積分の計算問題です。(2)の置換を見つけるところがポイントです。

$\boxed{13}$ ［広島大］

関数 $f(x)=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ に対し，次の問いに答えよ。

(1) 曲線 $y=f(x)$ は $x>0$ で上に凸であることを示せ。

(2) すべての $x \geqq 0$ に対し，不等式 $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \leqq f(x) \leqq x$ が成り立つことを示せ。

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{4}} f(x)\,dx$ の値 S を求めよ。

(4) 曲線 $y=f(x)$ 上の点で，x 座標が $\dfrac{3}{4}$ であるものを A とする。また，A における曲線 $y=f(x)$ の接線を l とする。l と直線 $y=x$ の交点を B とする。点 O$(0,\ 0)$，A，B と点 C$\left(\dfrac{3}{4},\ 0\right)$ を頂点にもつ四角形 ABOC の面積 T を求めよ。

(5) (1)～(4)を利用して，$\log 2$ の小数第 1 位の数字を求めよ。

13　　　　［広島大］

(1)　$f(x)=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$に対して，

$$f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=-x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

すると，$x>0$ で $f''(x)<0$ なので，曲線 $y=f(x)$ は $x>0$ で上に凸である。

(2)　$x\geqq 0$ のとき，$g(x)=x-f(x)$ とおくと，$g'(x)=1-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\geqq 0$ となり，

$$g(x)\geqq g(0)=0,\ \ x\geqq f(x)\cdots\cdots\cdots①$$

また，$x\geqq 0$ のとき，$h(x)=f(x)-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ とおくと，

$$h'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}-x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{(1+x^2)-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}=\frac{x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\geqq 0$$

これより，$h(x)\geqq h(0)=0$ となり，$f(x)\geqq\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdots\cdots\cdots②$

①②より，$x\geqq 0$ のとき，$\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\leqq f(x)\leqq x$ が成り立つ。

(3)　$S=\displaystyle\int_0^{\frac{3}{4}}f(x)\,dx=\int_0^{\frac{3}{4}}\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$

$$=\left[x\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]_0^{\frac{3}{4}}-\int_0^{\frac{3}{4}}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\frac{3}{4}\log\left(\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{25}{16}}\right)-\left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^{\frac{3}{4}}$$

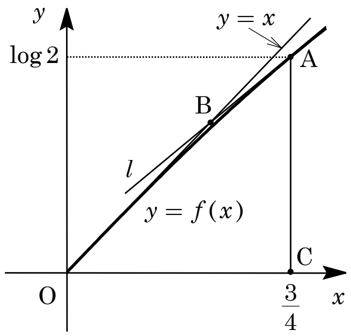
$$=\frac{3}{4}\log 2-\left(\sqrt{\frac{25}{16}}-1\right)=\frac{3}{4}\log 2-\frac{1}{4}$$

(4)　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{3}{4},\ \log 2\right)$ における接線 l の方程式は，$f'\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{4}{5}$ から，$y-\log 2=\dfrac{4}{5}\left(x-\dfrac{3}{4}\right)$

$$y=\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}+\log 2$$

$y=x$ との交点 B は，$x=\dfrac{4}{5}x-\dfrac{3}{5}+\log 2$ から，

$$\mathrm{B}(5\log 2-3,\ 5\log 2-3)$$



$\mathrm{C}\left(\dfrac{3}{4},\ 0\right)$ とするとき，四角形 ABOC の面積 T は，

$$T=\triangle\mathrm{OCB}+\triangle\mathrm{ACB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}(5\log 2-3)+\frac{1}{2}(\log 2)\left(\frac{3}{4}-5\log 2+3\right)$$

$$=\frac{1}{8}\{(15\log 2-9)+(\log 2)(15-20\log 2)\}=-\frac{5}{2}(\log 2)^2+\frac{15}{4}\log 2-\frac{9}{8}$$

(5) 曲線 $y=f(x)$ は $x>0$ で上に凸なので，$S<T$ であり，

$$\frac{3}{4}\log 2-\frac{1}{4}<-\frac{5}{2}(\log 2)^2+\frac{15}{4}\log 2-\frac{9}{8},\ \ 20(\log 2)^2-24\log 2+7<0$$

すると，$(2\log 2-1)(10\log 2-7)<0$ から，$\dfrac{1}{2}<\log 2<\dfrac{7}{10}$ ………③

また，(2)から $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\leqq f(x)$ なので，$\displaystyle\int_0^{\frac{3}{4}}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx\leqq\int_0^{\frac{3}{4}}f(x)dx$ となり，

$$\frac{1}{4}\leqq\frac{3}{4}\log 2-\frac{1}{4},\ \ \log 2\geqq\frac{2}{3}\ \cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$\dfrac{2}{3}\leqq\log 2<\dfrac{7}{10}$ となるので，$\log 2$ の小数第 1 位の数字は 6 である。

［解　説］

詳しい誘導のついた定積分と不等式の問題です。なお，(5)では，③だけでは $\log 2$ の小数第 1 位の数字が決まらないので，この設問で利用していない(2)の左側の不等式を再登場させて処理をしています。

14　　［東京工大］

実数全体を定義域にもつ微分可能な関数 $f(t)$，$g(t)$ が次の 6 つの条件を満たしているとする。

$$f'(t)=-f(t)g(t),\quad g'(t)=\{f(t)\}^2$$
$$f(t)>0,\quad |g(t)|<1,\quad f(0)=1,\quad g(0)=0$$

このとき，$p(t)=\{f(t)\}^2+\{g(t)\}^2$，$q(t)=\log\dfrac{1+g(t)}{1-g(t)}$ とおく。

(1)　$p'(t)$ を求めよ。

(2)　$q'(t)$ は定数関数であることを示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}g(t)$ を求めよ。

(4)　$f(T)=g(T)$ となる正の実数 T に対して，媒介変数表示された平面曲線 $(x,\ y)=(f(t),\ g(t))$ $(0\leqq t\leqq T)$ の長さを求めよ。

14　　［東京工大］

(1)　$p(t)=\{f(t)\}^2+\{g(t)\}^2$ に対して，$f'(t)=-f(t)g(t)$，$g'(t)=\{f(t)\}^2$ から，

$$p'(t)=2f(t)f'(t)+2g(t)g'(t)=-2\{f(t)\}^2g(t)+2g(t)\{f(t)\}^2=0$$

(2)　$|g(t)|<1$ より，$q(t)=\log\dfrac{1+g(t)}{1-g(t)}=\log\{1+g(t)\}-\log\{1-g(t)\}$ となり，

$$q'(t)=\frac{g'(t)}{1+g(t)}-\frac{-g'(t)}{1-g(t)}=\frac{g'(t)\{1-g(t)+1+g(t)\}}{1-\{g(t)\}^2}=\frac{2g'(t)}{1-\{g(t)\}^2}$$

ここで，C_1 を定数とすると，(1)より $p(t)=C_1$ となり，$f(0)=1$，$g(0)=0$ から，

$$p(0)=\{f(0)\}^2+\{g(0)\}^2=1$$

これより $C_1=1$ となり，$p(t)=\{f(t)\}^2+\{g(t)\}^2=1$，また $g'(t)=\{f(t)\}^2$ から，

$$q'(t)=\frac{2\{f(t)\}^2}{\{f(t)\}^2}=2$$

(3)　C_2 を定数とすると，(2)より $q(t)=2t+C_2$ となり，$g(0)=0$ から，

$$q(0)=\log\frac{1+g(0)}{1-g(0)}=\log\frac{1}{1}=0$$

これより $C_2=0$ となり，$q(t)=\log\dfrac{1+g(t)}{1-g(t)}=2t$，すなわち $\dfrac{1+g(t)}{1-g(t)}=e^{2t}$ であり，

$$1+g(t)=e^{2t}\{1-g(t)\},\ (e^{2t}+1)g(t)=e^{2t}-1$$

よって，$g(t)=\dfrac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}=\dfrac{1-e^{-2t}}{1+e^{-2t}}$ となり，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}g(t)=\frac{1}{1}=1$ である。

(4)　$(x,\ y)=(f(t),\ g(t))$ で表される曲線に対し，$0\leqq t\leqq T$ の長さを L とすると，

$$\begin{aligned}\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2&=\{-f(t)g(t)\}^2+\{f(t)\}^4=\{f(t)\}^2[\{g(t)\}^2+\{f(t)\}^2]\\&=\{f(t)\}^2p(t)=\{f(t)\}^2=1-\{g(t)\}^2\\&=1-\frac{(e^{2t}-1)^2}{(e^{2t}+1)^2}=\frac{4e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}\end{aligned}$$

これより，$L=\displaystyle\int_0^T\sqrt{\frac{4e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}}\,dt=2\int_0^T\frac{e^t}{e^{2t}+1}dt$

ここで，$u=e^t$ とおくと $du=e^tdt$ となり，$t=0\to T$ は $u=1\to e^T$ に対応し，

$$L=2\int_1^{e^T}\frac{1}{u^2+1}du\cdots\cdots\cdots①$$

さて，$f(T)=g(T)\ (T>0)$ と $p(T)=\{f(T)\}^2+\{g(T)\}^2=1$ から，

$$2\{g(T)\}^2=1$$

$f(T)>0$ から $g(T)>0$ なので，$g(T)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となり，$\dfrac{e^{2T}-1}{e^{2T}+1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より，

$$\sqrt{2}(e^{2T}-1)=e^{2T}+1,\ (\sqrt{2}-1)e^{2T}=\sqrt{2}+1$$

すると，$e^{2T}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{2}+1)^2$ より，$e^T=\sqrt{2}+1$ である。

よって，①より，$L=2\int_1^{\sqrt{2}+1}\dfrac{1}{u^2+1}du$………②

さらに，$u=\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$とおくと$du=\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$となり，$\tan\alpha=\sqrt{2}+1$とすると，$u=1\to\sqrt{2}+1$は$\theta=\dfrac{\pi}{4}\to\alpha$に対応する。

ここで，$\tan^2\dfrac{3}{8}\pi=\dfrac{1-\cos\frac{3}{4}\pi}{1+\cos\frac{3}{4}\pi}=\dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{2}+1)^2$から，

$$\tan\frac{3}{8}\pi=\sqrt{2}+1$$

これより，$\alpha=\dfrac{3}{8}\pi$なので，②から，

$$L=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi}d\theta=2\left(\frac{3}{8}\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$$

［解 説］

連立タイプの微分方程式の問題です。与えられた誘導から，$p(t)\to q(t)\to g(t)$と決定していきます。これらの結果をもとに，(4)の曲線の長さにつないでいくわけですが，上記のαの値を求めるところで，少し止まってしまいます。

$\boxed{15}$ ［神戸大］

1 辺の長さが $\sqrt{2}$ の正方形 ABCD を底面にもち，高さが 1 である直方体 ABCD-EFGH を，頂点の座標がそれぞれ $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{C}(-1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{D}(0,\ -1,\ 0)$，$\mathrm{E}(1,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{F}(0,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{G}(-1,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{H}(0,\ -1,\ 1)$になるように xyz 空間内におく。以下の問いに答えよ。

(1) 直方体ABCD-EFGHを直線 AE のまわりに 1 回転してできる回転体を X_1 とし，また直線 AB のまわりに 1 回転してできる回転体を X_2 とする。X_1 の体積 V_1 と X_2 の体積 V_2 を求めよ。

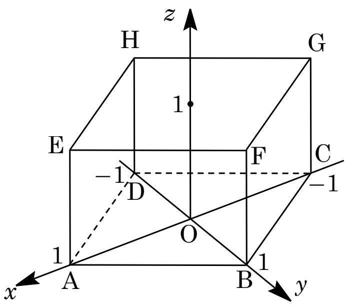
(2) $0 \leqq t \leqq 1$ とする。平面 $x = t$ と線分 EF の共有点の座標を求めよ。

(3) 直方体ABCD-EFGHを x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を X_3 とする。X_3 の体積 V_3 を求めよ。

$\boxed{15}$ ［神戸大］

(1) 直方体ABCD-EFGHを直線AEのまわりに1回転してできる回転体X_1は，底面の半径が$\mathrm{AC}=2$，高さが$\mathrm{AE}=1$の円柱なので，その体積V_1は，

$$V_1=\pi\cdot 2^2\cdot 1=4\pi$$



また，直線ABのまわりに1回転してできる回転体X_2は，底面の半径が$\mathrm{AH}=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}$，高さが$\mathrm{AB}=\sqrt{2}$の円柱なので，その体積$V_2$は，

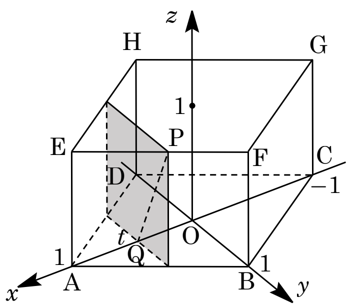
$$V_2=\pi\cdot(\sqrt{3})^2\cdot\sqrt{2}=3\sqrt{2}\pi$$

(2) 線分EFのパラメータ表示は，$0\leqq k\leqq 1$として，

$$(x,\ y,\ z)=\overrightarrow{\mathrm{OE}}+k\overrightarrow{\mathrm{EF}}=(1,\ 0,\ 1)+k(-1,\ 1,\ 0)=(1-k,\ k,\ 1)$$

線分 EF と平面$x=t$の共有点を P とすると，$1-k=t$から$k=1-t$となるので，その座標は$\mathrm{P}(t,\ 1-t,\ 1)$である。

(3) まず，x軸上の点$\mathrm{Q}(t,\ 0,\ 0)$とおく。



さて，直方体ABCD-EFGHをx軸のまわりに1回転してできる回転体X_3を，x軸に垂直な平面$x=t$で切断する。その切り口は，右図の網点をかけた長方形を点Qのまわりに1回転したものとなり，点Qを中心とする半径QPの円である。

その面積を$S(t)$とおくと，

$$S(t)=\pi\mathrm{QP}^2=\pi\{(1-t)^2+1\}=\pi(t^2-2t+2)$$

X_3はyz平面について対称なので，その体積V_3は，

$$V_3=2\int_0^1 S(t)\,dt=2\pi\int_0^1(t^2-2t+2)\,dt=2\pi\Big[\frac{t^3}{3}-t^2+2t\Big]_0^1=2\pi\cdot\frac{4}{3}=\frac{8}{3}\pi$$

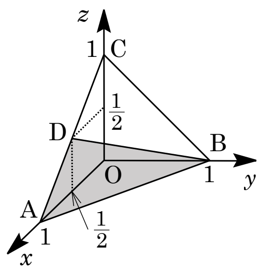
［解　説］

回転体の体積の問題です。誘導つきで，しかも計算は穏やかです。

$\boxed{16}$ ［東京大］

座標空間内に 3 点 A(1, 0, 0)，B(0, 1, 0)，C(0, 0, 1) をとり，D を線分 AC の中点とする。三角形 ABD の周および内部を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体の体積を求めよ。

16　　［東京大］



3 点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 1,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 1)$と，線分 AC の中点 D$\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$に対して，△ABD を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体を考える。

まず，△ABD を含む平面の方程式は，$x+y+z=1$ であり，

(a)　辺 AB を表す方程式は，$0 \leqq x \leqq 1$ において，

$$x+y=1,\ z=0\ \cdots\cdots\cdots ①$$

(b)　辺 AD を表す方程式は，$\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1$ において，$x+z=1,\ y=0\ \cdots\cdots\cdots ②$

(c)　辺 BD を表す方程式は，$0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ において，$x=z,\ 2x+y=1\ \cdots\cdots\cdots ③$

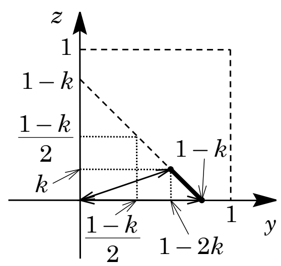
さて，△ABD を平面 $x=k\ (0 \leqq k \leqq 1)$ で切断したとき，その切り口は線分になり，これを x 軸のまわりに 1 回転させてできるドーナツ型の図形の面積を $S(k)$ とおく。

(i)　$0 \leqq k \leqq \frac{1}{2}$ のとき

平面 $x=k$ と辺 AB との交点は，①から$(k,\ 1-k,\ 0)$，辺 BD との交点は，③から$(k,\ 1-2k,\ k)$となり，△ABD の切り口はこの 2 点を両端とする線分である。

ここで，この線分を含む直線$(x=k,\ y+z=1-k)$に点$(k,\ 0,\ 0)$から下ろした垂線の足$\left(k,\ \frac{1-k}{2},\ \frac{1-k}{2}\right)$が，線分に含まれるかどうかで，さらに場合分けをする。

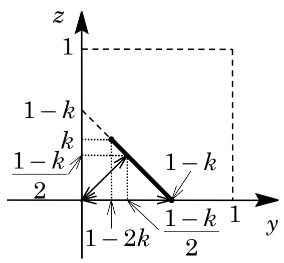
(i-i)　$\frac{1-k}{2} \leqq 1-2k\ \left(0 \leqq k \leqq \frac{1}{3}\right)$ のとき



このとき，垂線の足は線分に含まれないので，ドーナツ型の外径は $1-k$，内径は $\sqrt{(1-2k)^2+k^2}=\sqrt{5k^2-4k+1}$ となり，その面積は，

$$\begin{aligned} S(k) &= \pi\{(1-k)^2-(5k^2-4k+1)\} \\ &= \pi(-4k^2+2k) \end{aligned}$$

(i-ii)　$\frac{1-k}{2} \geqq 1-2k\ \left(\frac{1}{3} \leqq k \leqq \frac{1}{2}\right)$ のとき



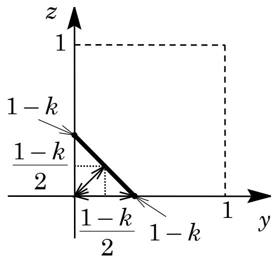
このとき，垂線の足は線分に含まれるので，ドーナツ型の外径は $1-k$，内径は $\frac{1}{\sqrt{2}}(1-k)$ となり，その面積は，

$$S(k)=\pi\left\{(1-k)^2-\frac{1}{2}(1-k)^2\right\}=\frac{\pi}{2}(1-k)^2$$

(ii)　$\frac{1}{2} \leqq k \leqq 1$ のとき

平面 $x=k$ と辺 AB との交点は，①から$(k,\ 1-k,\ 0)$，辺 AD との交点は，②から$(k,\ 0,\ 1-k)$となり，△ABD の切り口はこの 2 点を両端とする線分である。

このとき，ドーナツ型の外径は$1-k$，内径は$\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-k)$となり，その面積は，



$$S(k)=\pi\left\{(1-k)^2-\frac{1}{2}(1-k)^2\right\}=\frac{\pi}{2}(1-k)^2$$

(i)(ii)より，$S(k)=\pi(-4k^2+2k)\ \left(0\leqq k\leqq\dfrac{1}{3}\right)$

$$S(k)=\frac{\pi}{2}(1-k)^2\ \left(\frac{1}{3}\leqq k\leqq 1\right)$$

以上より，求める立体の体積Vは,

$$V=\pi\int_0^{\frac{1}{3}}(-4k^2+2k)\,dk+\frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{3}}^{1}(1-k)^2\,dk$$

$$=\pi\Big[-\frac{4}{3}k^3+k^2\Big]_0^{\frac{1}{3}}-\frac{\pi}{6}\Big[(1-k)^3\Big]_{\frac{1}{3}}^{1}=\frac{5}{81}\pi+\frac{4}{81}\pi=\frac{\pi}{9}$$

［解 説］

回転体の体積の問題で，頻出タイプです。単純な構図で，しかも計算は穏やかであるにもかかわらず，それなりに時間を費やします。演習しておくべき１題でしょう。

17　　［東北大］

xyz 空間内の xy 平面上にある円 $C: x^2+y^2=1$ および円板 $D: x^2+y^2 \leqq 1$ を考える。D を底面とし点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 1)$ を頂点とする円錐を K とする。$\mathrm{A}(0,\ -1,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1,\ 0)$ とする。xyz 空間内の平面 $H: z=x$ を考える。すなわち，H は xz 平面上の直線 $z=x$ と線分 AB をともに含む平面である。K の側面と H の交わりとしてできる曲線を E とする。$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ に対し，円 C 上の点 $\mathrm{Q}(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ をとり，線分 PQ と E の共有点を R とする。

(1)　線分 PR の長さを $r(\theta)$ とおく。$r(\theta)$ を θ を用いて表せ。

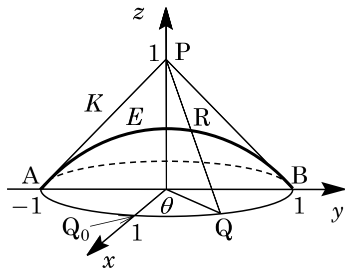
(2)　円錐 K の側面のうち，曲線 E の点 A から点 R までを結ぶ部分，線分 PA，および線分 PR により囲まれた部分の面積を $S(\theta)$ とおく。θ と実数 h が条件 $0 \leqq \theta < \theta + h \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{h\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}} \leqq S(\theta+h)-S(\theta) \leqq \frac{h\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

(3)　円錐 K の側面のうち，円 C の $x \geqq 0$ の部分と曲線 E により囲まれた部分の面積を T とおく。T を求めよ。必要であれば $\tan\dfrac{\theta}{2}=u$ とおく置換積分を用いてもよい。

17 ［東北大］

(1) xy 平面上の $D: x^2+y^2 \leqq 1$ を底面とし $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 1)$ を頂点とする円錐 K の側面と，平面 $H: z=x$ の交線を E とする。$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ として $\mathrm{Q}(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ をとり，線分 PQ と E の共有点を R とする。



このとき，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(\cos\theta,\ \sin\theta,\ -1)$ から，円錐 K の側面上の線分 PQ は，$0 \leqq t \leqq 1$ として，

$$(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 1)+t(\cos\theta,\ \sin\theta,\ -1)=(t\cos\theta,\ t\sin\theta,\ 1-t)$$

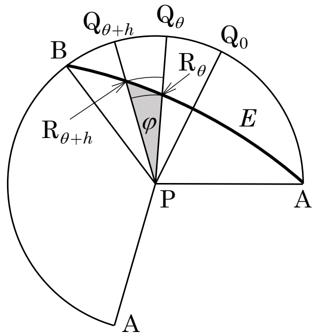
点 R は平面 H 上にあることより，$z=x$ から $1-t=t\cos\theta$ となり，

$$1=t(\cos\theta+1),\quad t=\frac{1}{\cos\theta+1}$$

すると，$\mathrm{R}\left(\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta+1},\ \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta+1},\ 1-\dfrac{1}{\cos\theta+1}\right)$ と表せるので，

$$r(\theta)=\mathrm{PR}=\sqrt{\left(\frac{\cos\theta}{\cos\theta+1}\right)^2+\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta+1}\right)^2+\left(-\frac{1}{\cos\theta+1}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{\cos\theta+1}$$

(2) 円錐 K の側面を展開し，$0 \leqq \theta < \theta+h \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\mathrm{Q}_\theta(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$，$\mathrm{Q}_{\theta+h}\left(\cos(\theta+h),\ \sin(\theta+h),\ 0\right)$ とおく。そして，線分 PQ_θ，$\mathrm{PQ}_{\theta+h}$ と E の共有点を，それぞれ R_θ，$\mathrm{R}_{\theta+h}$ とする。



すると，$\mathrm{PR}_\theta=r(\theta)$，$\mathrm{PR}_{\theta+h}=r(\theta+h)$ となり，$r(\theta)$ は単調増加するので，$r(\theta)<r(\theta+h)$ である。

また，$\overset{\frown}{\mathrm{Q}_\theta\mathrm{Q}_{\theta+h}}=1\cdot(\theta+h-\theta)=h$ であり，$\mathrm{PA}=\sqrt{2}$ から $\varphi=\angle\mathrm{Q}_\theta\mathrm{PQ}_{\theta+h}$ とおくと，$\overset{\frown}{\mathrm{Q}_\theta\mathrm{Q}_{\theta+h}}=\sqrt{2}\varphi$ となり，$\sqrt{2}\varphi=h$ から $\varphi=\dfrac{h}{\sqrt{2}}$ ……①である。

さて，曲線 E の A から R までの部分，線分 PA，線分 PR で囲まれた部分の面積を $S(\theta)$ とおくと，$S(\theta+h)-S(\theta)$ は右上図の網点部の面積となり，半径 PR_θ で中心角 φ のおうぎ形の面積，半径 $\mathrm{PR}_{\theta+h}$ で中心角 φ のおうぎ形の面積と比べると，

$$\frac{1}{2}\{r(\theta)\}^2\varphi \leqq S(\theta+h)-S(\theta) \leqq \frac{1}{2}\{r(\theta+h)\}^2\varphi$$

すると，①から，$\dfrac{h\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}} \leqq S(\theta+h)-S(\theta) \leqq \dfrac{h\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}}$ ………②

(3) ②より，$h>0$ のとき，$\dfrac{\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}} \leqq \dfrac{S(\theta+h)-S(\theta)}{h} \leqq \dfrac{\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}}$ となり，

$$\lim_{h\to+0}\frac{S(\theta+h)-S(\theta)}{h}=\frac{\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}}\ \cdots\cdots\cdots③$$

また，$h<0$として，$0\leqq \theta+h<\theta\leqq \dfrac{\pi}{2}$のとき，(2)と同様にすると，

$$\frac{(-h)\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}}\leqq S(\theta)-S(\theta+h)\leqq \frac{(-h)\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

各辺を$-h>0$で割ると，$\dfrac{\{r(\theta+h)\}^2}{2\sqrt{2}}\leqq \dfrac{S(\theta+h)-S(\theta)}{h}\leqq \dfrac{\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}}$となり，

$$\lim_{h\to -0}\frac{S(\theta+h)-S(\theta)}{h}=\frac{\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}}\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$0\leqq \theta\leqq \dfrac{\pi}{2}$のとき，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{S(\theta+h)-S(\theta)}{h}=\frac{\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}}$なので，(1)から，

$$S'(\theta)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{(\cos\theta+1)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}(\cos\theta+1)^2}$$

さて，円錐Kの側面のうち，$x\geqq 0$の部分で円Cと曲線Eにより囲まれた図形の面積Tは，展開図の$\mathrm{PQ_0}$についての対称性に着目し，さらに$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=1\cdot\pi=\pi$から，

$$T=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\pi-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}S'(\theta)d\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi-\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(\cos\theta+1)^2}d\theta$$

ここで，$\displaystyle I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(\cos\theta+1)^2}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4\cos^4\frac{\theta}{2}}d\theta$とおき，さらに$\tan\dfrac{\theta}{2}=u$と置き換えると，$\dfrac{1}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}d\theta=du$となり，$\theta=0\to\dfrac{\pi}{2}$は$u=0\to 1$に対応する。

そして，$\dfrac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}=1+u^2$から，$\displaystyle I=\frac{1}{2}\int_0^1(1+u^2)du=\frac{1}{2}\Big[u+\frac{u^3}{3}\Big]_0^1=\frac{2}{3}$となり，

$$T=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi-\frac{2}{3}\sqrt{2}$$

［解 説］

曲面の面積を求める問題で，展開図をもとに計算しています。誘導は付いているものの，最後の定積分の計算も含めて，かなり難攻します。