

1

[信州大・医]

a は実数とする。関数 $f(x)$ を $f(x) = x^3 - 3(a+2)x^2 + 24ax - 2a^2 - 41a + 28$ と定めるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $f(2) \geq 0$ となるとき、 a のとり得る値の範囲を求めよ。
- (2) $x \geq 2$ となるすべての x に対して $f(x) \geq 0$ が成り立つとき、 a のとり得る値の範囲を求めよ。

1

[信州大・医]

(1) $f(x) = x^3 - 3(a+2)x^2 + 24ax - 2a^2 - 41a + 28$ に対し, $f(2) \geq 0$ から,

$$8 - 12(a+2) + 48a - 2a^2 - 41a + 28 \geq 0, \quad 2a^2 + 5a - 12 \leq 0$$

すると, $(a+4)(2a-3) \leq 0$ より, $-4 \leq a \leq \frac{3}{2}$ となる。

(2) $x \geq 2$ となるすべての x に対して $f(x) \geq 0$ が成り立つとき, まず $f(2) \geq 0$ であることが必要であり, (1)から $-4 \leq a \leq \frac{3}{2}$ のもとで,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6(a+2)x + 24a \\ &= 3(x-2a)(x-4) \end{aligned}$$

すると, $-8 \leq 2a \leq 3$ から, $f(x)$ の増減は

x	$\cdots$	$2a$	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

右表のようになる。

したがって, $x \geq 2$ で $f(x) \geq 0$ の条件は, $f(2) \geq 0$ から, $2a$ と 2 の大小関係にかかわらず $f(4) \geq 0$ であり,

$$64 - 48(a+2) + 96a - 2a^2 - 41a + 28 \geq 0, \quad 2a^2 - 7a + 4 \leq 0$$

これより, $\frac{7-\sqrt{17}}{4} \leq a \leq \frac{7+\sqrt{17}}{4}$ となり, $-4 \leq a \leq \frac{3}{2}$ と合わせると,

$$\frac{7-\sqrt{17}}{4} \leq a \leq \frac{3}{2}$$

[コメント]

微分と増減の問題です。(1)の設問により, (2)では場合分けが不要になりました。

2

[大阪大・文]

座標平面において、 $y = x^2 - 1$ で表される放物線を C とする。 C 上の点 P における C の接線を l とする。ただし、点 P は y 軸上にはないものとする。 O を原点とし、放物線 C と線分 OP および y 軸で囲まれた図形の面積を S 、放物線 C と接線 l および y 軸で囲まれた図形の面積を T とする。 $S - T$ の最大値を求めよ。

2

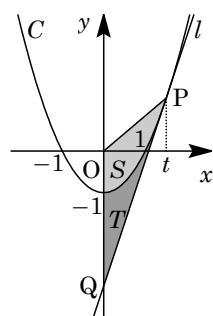
[大阪大・文]

放物線 $C: y = x^2 - 1$ に対して、 C 上の点 $P(t, t^2 - 1)$ とすると、 $y' = 2x$ から、 P における接線 l の方程式は、

$$y - (t^2 - 1) = 2t(x - t), \quad y = 2tx - t^2 - 1$$

そして、 l と y 軸の交点を Q とおくと、 $Q(0, -t^2 - 1)$ となる。

さて、 $t \neq 0$ のとき、 C と線分 OP および y 軸で囲まれた図形の面積を S 、 C と l および y 軸で囲まれた図形の面積を T とするとき、 $S - T$ の値については、 y 軸についての対称性から $t > 0$ として、



$$\begin{aligned} S - T &= (S + T) - 2T = \frac{1}{2}(t^2 + 1)t - 2 \int_0^t \{(x^2 - 1) - (2tx - t^2 - 1)\} dx \\ &= \frac{1}{2}(t^3 + t) - 2 \int_0^t (x^2 - 2tx + t^2) dx = \frac{1}{2}(t^3 + t) - 2 \left[\frac{x^3}{3} - tx^2 + t^2x \right]_0^t \\ &= \frac{1}{2}(t^3 + t) - \frac{2}{3}t^3 + 2t^3 - 2t^3 = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t \end{aligned}$$

ここで、 $f(t) = S - T = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t$ とおくと、

$$f'(t) = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(t+1)(t-1)$$

すると、 $t > 0$ における $f(t)$ の増減は右表のようになり、これより $S - T$ の最大値は $\frac{1}{3}$ である。

t	0	...	1	...
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$		↗	$\frac{1}{3}$	↘

[コメント]

微積分の基本題です。 $S - T$ は普通に計算してもよいのですが、解答例では $S + T$ が $\triangle OPQ$ の面積であることを利用して、計算量を減らしています。

3

[東北大・文]

k を正の実数とする。曲線 $y = x(x-2)^2$ と放物線 $y = kx^2$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるような k の値を求めよ。

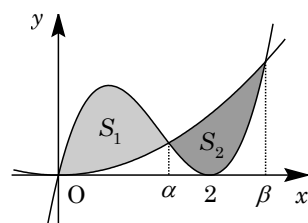
3

[東北大・文]

$y = x(x-2)^2 \cdots \cdots \textcircled{1}$ と $y = kx^2 \ (k > 0) \cdots \cdots \textcircled{2}$ を連立し、

$$x(x-2)^2 = kx^2, \quad x\{x^2 - (k+4)x + 4\} = 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

ここで、 $x^2 - (k+4)x + 4 = 0$ について、判別式 $D = (k+4)^2 - 16 = k^2 + 8k > 0$ から、その解を $x = \alpha, \beta$ ($\alpha < \beta$) とおくと、 $\alpha + \beta = k+4 > 0$ かつ $\alpha\beta = 4 > 0$ より $0 < \alpha < \beta$ である。これより、 $\textcircled{3}$ の解は、 $x = 0, \alpha, \beta$ となる。



さて、曲線 $\textcircled{1}$ と放物線 $\textcircled{2}$ で囲まれた 2 つの部分のうち、 $0 \leq x \leq \alpha$ の部分の面積を S_1 、 $\alpha \leq x \leq \beta$ の部分の面積を S_2 とおくと、

$$S_1 = \int_0^\alpha \{x(x-2)^2 - kx^2\} dx, \quad S_2 = \int_\alpha^\beta -\{x(x-2)^2 - kx^2\} dx$$

条件より、 $S_1 = S_2$ なので $S_1 - S_2 = 0$ となり、

$$\int_0^\alpha \{x(x-2)^2 - kx^2\} dx + \int_\alpha^\beta \{x(x-2)^2 - kx^2\} dx = 0$$

これより、 $\int_0^\beta \{x(x-2)^2 - kx^2\} dx = \int_0^\beta \{x^3 - (k+4)x^2 + 4x\} dx = 0$ となり、

$$\left[\frac{x^4}{4} - \frac{k+4}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^\beta = 0, \quad \frac{\beta^4}{4} - \frac{k+4}{3}\beta^3 + 2\beta^2 = 0$$

$$\beta > 0 \text{ から, } \frac{\beta^2}{4} - \frac{k+4}{3}\beta + 2 = 0, \quad 3\beta^2 - 4(k+4)\beta + 24 = 0 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

ここで、 $\beta^2 - (k+4)\beta + 4 = 0$ から $\beta^2 = (k+4)\beta - 4 \cdots \cdots \textcircled{5}$ となり、 $\textcircled{4}\textcircled{5}$ から、

$$3(k+4)\beta - 12 - 4(k+4)\beta + 24 = 0, \quad (k+4)\beta = 12 \cdots \cdots \textcircled{6}$$

すると、 $\textcircled{5}$ から $\beta^2 = 12 - 4 = 8$ となり、 $\beta = 2\sqrt{2}$ を $\textcircled{6}$ に代入して、

$$k = \frac{12}{\beta} - 4 = \frac{12}{2\sqrt{2}} - 4 = 3\sqrt{2} - 4$$

[コメント]

定積分と面積についての頻出問題です。ポイントは、1 回だけの定積分および β の次数下げという計算の工夫です。

4

[東北大・理]

a を実数とし、関数 $f(x)$ を次のように定める。 $f(x) = x^4 + \frac{4a}{3}x^3 + (a+2)x^2$

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(x)$ が極大値をもつような a のとり得る値の範囲を求めよ。
- (2) 関数 $f(x)$ が $x=0$ で極大値をもつような a のとり得る値の範囲を求めよ。

4

[東北大・理]

- (1) $f(x) = x^4 + \frac{4a}{3}x^3 + (a+2)x^2$ に対して,

$$f'(x) = 4x^3 + 4ax^2 + 2(a+2)x = 2x(2x^2 + 2ax + a+2)$$

ここで, $g(x) = 2x^2 + 2ax + a+2$ とおくと, $f'(x) = 2xg(x)$ となり,

- (i) $g(x) = 0$ が $x = 0$ を解にもつとき

$$g(0) = 0 \text{ から } a = -2 \text{ となり, } f'(x) = 2x(2x^2 - 4x) = 4x^2(x-2)$$

$f'(x)$ の符号変化は $x = 2$ の前後で負から正だけより, $f(x)$ は極大値をもたない。

- (ii) $g(x) = 0$ が $x = 0$ を解にもたないとき

$$g(0) \neq 0 \text{ から } a \neq -2 \text{ となり, } g(x) = 0 \text{ の } D/4 = a^2 - 2(a+2) = a^2 - 2a - 4 \text{ から,}$$

- (ii-i) $a^2 - 2a - 4 > 0$ ($a < 1 - \sqrt{5}$, $1 + \sqrt{5} < a$) のとき

$g(x) = 0$ は $x \neq 0$ の異なる 2 実数解をもつので, $f'(x) = 0$ は異なる 3 実数解をもつ。この実数解を $x = \alpha, \beta, \gamma$ ($\alpha < \beta < \gamma$) とおくと, $f(x)$ の増減は右表のようになり, $f(x)$ は $x = \beta$ で極大値をもつ。

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	γ	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

- (ii-ii) $a^2 - 2a - 4 = 0$ ($a = 1 \pm \sqrt{5}$) のとき

$g(x) = 0$ は重解 $x = \alpha$ ($\alpha \neq 0$) をもち, $f'(x) = 0$ の実数解は $x = 0, \alpha$ である。

$f'(x)$ の符号変化は $x = 0$ の前後で負から正だけより, $f(x)$ は極大値をもたない。

- (ii-iii) $a^2 - 2a - 4 < 0$ ($1 - \sqrt{5} < a < 1 + \sqrt{5}$) のとき

$g(x) = 0$ は実数解なしで, $g(x) > 0$ から $f'(x) = 0$ の実数解は $x = 0$ だけである。

$f'(x)$ の符号変化は $x = 0$ の前後で負から正だけより, $f(x)$ は極大値をもたない。

- (i)(ii) より, $f(x)$ が極大値をもつ条件は, $a \neq -2$ かつ「 $a < 1 - \sqrt{5}$, $1 + \sqrt{5} < a$ 」から,

$$a < -2, -2 < a < 1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5} < a$$

- (2) (1)の(ii-i)の場合から, $x = \beta$ で極大値をもつので, 条件から $\beta = 0$ である。

$\alpha < 0 < \gamma$ から, $g(x) = 0$ の解は正と負に 1 つずつとなり, $g(0) = a + 2 < 0$ から $a < -2$ である。

[コメント]

4 次関数のグラフの増減を問う問題です。基本的な内容ですが, 場合分けについてどのような記述方法をとればよいのか迷うところがあります。

5

[一橋大・文]

座標平面上に原点を中心とする半径 3 の円 C_1 がある。また、直線 $x = 2$ 上の点 P を中心とする半径 1 の円を C_2 とする。

- (1) C_1 と C_2 が共有点を 2 つもつような P の y 座標の範囲を求めよ。
- (2) C_1 と C_2 が共有点を 2 つもつとき、その 2 つの共有点を通る直線を l とする。 l に関して P と対称な位置にある点を Q とする。ただし、 P が l 上にあるときは $Q = P$ とする。 P の y 座標が(1)で求めた範囲を動くとき、点 Q の軌跡を求め、図示せよ。

5

[一橋大・文]

- (1) $C_1: x^2 + y^2 = 9$ ……①, また点 P の座標を $(2, t)$ とおくと, $C_2: (x-2)^2 + (y-t)^2 = 1$ ……②である。

ここで, C_1 と C_2 が共有点を 2 つもつ条件は, 中心間距離が $\sqrt{4+t^2}$ より, $3-1 < \sqrt{4+t^2} < 3+1$ となり,

$$4 < 4+t^2 < 16$$

$4 < 4+t^2$ から $t \neq 0$, $4+t^2 < 16$ から $t^2 - 12 < 0$ すなわち $-2\sqrt{3} < t < 2\sqrt{3}$ なので, P の y 座標 t の範囲は,

$$-2\sqrt{3} < t < 0, 0 < t < 2\sqrt{3} \text{ ……③}$$

- (2) ③のとき, 2 つの共有点を通る直線 l は, ①-②から,

$$4x - 4 + 2ty - t^2 = 8, 4x + 2ty = t^2 + 12 \text{ ……④}$$

l に関して P と対称な位置にある点を $Q(X, Y)$ とおくと, l の法線ベクトルの成分が $(4, 2t) = 2(2, t)$ から, k を実数として $\overrightarrow{PQ} = k(2, t)$ となり,

$$X - 2 = 2k, Y - t = tk$$

すると, $t(X-2) - 2(Y-t) = 0$ から, $tX - 2Y = 0$ ……⑤

また, 線分 PQ の中点 $(\frac{2+X}{2}, \frac{t+Y}{2})$ が l 上にあることから, ④より,

$$4 \cdot \frac{2+X}{2} + 2t \cdot \frac{t+Y}{2} = t^2 + 12, 2(2+X) + t(t+Y) = t^2 + 12$$

まとめると, $2X + tY = 8$ ……⑥となり, $Q(X, Y)$ の軌跡は, ⑤⑥を連立して,

・ $X = 0$ のとき ⑤より $Y = 0$ となるが, ⑥に代入すると成立しない。

・ $X \neq 0$ のとき ⑤より $t = \frac{2Y}{X}$ となり, ⑥に代入すると $2X + \frac{2Y}{X} \cdot Y = 8$ から,

$$X^2 + Y^2 = 4X, (X-2)^2 + Y^2 = 4 \text{ ……⑦}$$

さて, ⑤から $Y = \frac{t}{2}X$ となり, ③から $-\sqrt{3} < \frac{t}{2} < 0, 0 < \frac{t}{2} < \sqrt{3}$ である。そして, ⑦と $Y = \pm\sqrt{3}X$ との交点は, $X^2 + 3X^2 = 4X (X \neq 0)$ から,

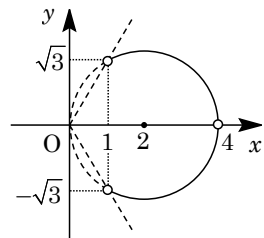
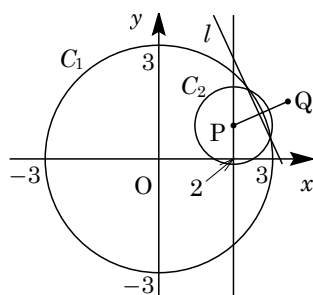
$$X = 1, Y = \pm\sqrt{3}$$

したがって, 点 $Q(X, Y)$ の軌跡は,

$$\text{円弧: } (x-2)^2 + y^2 = 4$$

ただし $-\sqrt{3}x < y < 0, 0 < y < \sqrt{3}x$ を満たす部分である。

図示すると, 右図の実線部 (白丸は除く) である。



[コメント]

軌跡の標準的な問題です。軌跡の限界のチェックがやや面倒ですが。

6

[九州大・理]

半径 1 の円周上に反時計回りに点 A, B, C, D を順にとり、線分 AD は直径で、 $AC = CD$ 、 $AB = BC$ が成り立つとする。

- (1) $\angle ACB$ を求めよ。
- (2) BC を求めよ。
- (3) 線分 AC と線分 BD の交点を E とするとき、三角形 BCE の面積を求めよ。

6

[九州大・理]

- (1) 半径 1 の円の中心を O とおき、円周上の反時計回りに 4 点 A, B, C, D をとり、このとき線分 AD が直径で、 $AC = CD$, $AB = BC$ のとき、

$$\angle ACB = \angle ADB = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$$

- (2) $AD = 2$ から $AC = \sqrt{2}$, また $\angle ABC = \pi - 2 \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{3}{4}\pi$ から、

$BC = AB = x$ において、 $\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると、

$$x^2 + x^2 - 2x^2 \cos \frac{3}{4}\pi = (\sqrt{2})^2, (2 + \sqrt{2})x^2 = 2$$

$$\text{これより, } BC = x = \sqrt{\frac{2}{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2(2 - \sqrt{2})}{4 - 2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \text{ である.}$$

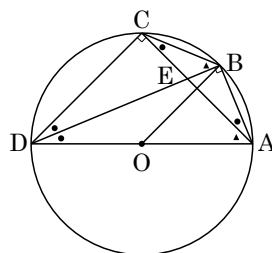
- (3) (2)から、 $\triangle ABC = \frac{1}{2}x^2 \sin \frac{3}{4}\pi = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$

ここで、線分 AC と線分 BD の交点を E とするとき、 $AB = BC$ から $\angle ADB = \angle BDC$ となり、線分 DE は $\angle ADC$ の二等分線なので、

$$AE : EC = DA : DC = 2 : \sqrt{2}$$

$$\text{これより, } \triangle BCE = \frac{EC}{AE + EC} \triangle ABC = \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \triangle ABC \text{ となり,}$$

$$\triangle BCE = \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{2} = \frac{(\sqrt{2} - 1)^2}{2(2 - 1)} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}$$



[コメント]

円を題材にした図形と計量の問題です。初めは座標設定をしようかとも思いましたが、それほどでもありませんでした。なお、いろいろな解法が考えられ、上記はその 1 例です。

7

[東京大・理]

平行四辺形 $ABCD$ において、 $\angle ABC = \frac{\pi}{6}$ 、 $AB = a$ 、 $BC = b$ 、 $a \leq b$ とする。次の条件を満たす長方形 $EFGH$ を考え、その面積を S とする。

条件：点 A, B, C, D はそれぞれ辺 EF, FG, GH, HE 上にある。

ただし、辺はその両端の点も含むものとする。

- (1) $\angle BCG = \theta$ とするとき、 S を a, b, θ を用いて表せ。
- (2) S のとりうる値の最大値を a, b を用いて表せ。

7

[東京大・理]

- (1) $\angle ABC = \frac{\pi}{6}$, $AB = a$, $BC = b$, $a \leq b$ である

平行四辺形 ABCD の面積は, $ab \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}ab$

$\angle BCG = \theta$ から, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$ となり,

$$\triangle BCG = \frac{1}{2}b \cos \theta \cdot b \sin \theta = \frac{1}{4}b^2 \sin 2\theta$$

$\angle BAF + \theta = \frac{\pi}{6}$ から, $\angle BAF = \frac{\pi}{6} - \theta$ となり,

$$\begin{aligned} \triangle ABF &= \frac{1}{2}a \cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) \cdot a \sin\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) = \frac{1}{4}a^2 \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2\theta\right) \\ &= \frac{1}{4}a^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta\right) = \frac{1}{8}a^2 (\sqrt{3} \cos 2\theta - \sin 2\theta) \end{aligned}$$

ここで, $\triangle DAE \equiv \triangle BCG$, $\triangle CDH \equiv \triangle ABF$ から, 長方形 EFGH の面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ab + 2 \cdot \frac{1}{4}b^2 \sin 2\theta + 2 \cdot \frac{1}{8}a^2 (\sqrt{3} \cos 2\theta - \sin 2\theta) \\ &= \frac{1}{2}ab + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cos 2\theta + \frac{1}{4}(2b^2 - a^2) \sin 2\theta \end{aligned}$$

- (2) $f(\theta) = \sqrt{3}a^2 \cos 2\theta + (2b^2 - a^2) \sin 2\theta$ とおくと, $S = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}f(\theta)$ となる。

ここで, $\vec{a} = (\sqrt{3}a^2, 2b^2 - a^2)$, $\vec{p} = (\cos 2\theta, \sin 2\theta)$ とおくと, $f(\theta) = \vec{a} \cdot \vec{p}$ となり, 以下, $0 \leq 2\theta \leq \frac{\pi}{3}$ のもとで $f(\theta)$ の最大値を求める。

さて, $|\vec{a}| = \sqrt{3a^4 + (2b^2 - a^2)^2} = \sqrt{4a^4 - 4a^2b^2 + 4b^4} = 2\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}$ となり, $\tan \alpha = \frac{2b^2 - a^2}{\sqrt{3}a^2}$ とおくと, $\sqrt{3}a^2 > 0$, $2b^2 - a^2 > 0$ から $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ であり,

・ $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{3}$ のとき $\tan \alpha \leq \sqrt{3}$ から $2b^2 - a^2 \leq 3a^2$ となり, $a \leq b \leq \sqrt{2}a$

・ $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ のとき $\tan \alpha > \sqrt{3}$ から $2b^2 - a^2 > 3a^2$ となり, $b > \sqrt{2}a$

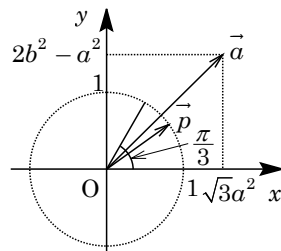
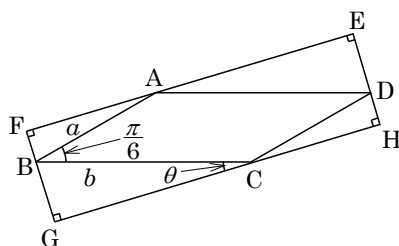
- (i) $a \leq b \leq \sqrt{2}a$ ($0 < \alpha \leq \frac{\pi}{3}$) のとき

$f(\theta)$ が最大になるのは $\vec{a}$ と $\vec{p}$ のなす角が最小, すなわち $2\theta = \alpha$ ($\theta = \frac{\alpha}{2}$) のときである。

$|\vec{p}| = 1$ に注意すると, $f(\theta)$ の最大値は,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= 2\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4} \cdot 1 \cdot \cos 0 \\ &= 2\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4} \end{aligned}$$

したがって, S の最大値は $S = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}$ である。

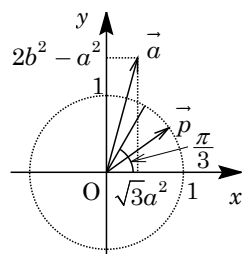


(ii) $b > \sqrt{2}a \left(\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$ のとき

$f(\theta)$ が最大になるのは $\vec{a}$ と $\vec{p}$ のなす角が最小，すなわち $2\theta = \frac{\pi}{3} \left(\theta = \frac{\pi}{6} \right)$ のときであり， $f(\theta)$ の最大値は，

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \sqrt{3}a^2 \cos \frac{\pi}{3} + (2b^2 - a^2) \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}(2b^2 - a^2) = \sqrt{3}b^2 \end{aligned}$$

したがって， S の最大値は $S = \frac{1}{2}ab + \frac{\sqrt{3}}{4}b^2$ である。



[コメント]

三角関数の応用問題です。(2)はサインでの合成で処理をしてもよいのですが，係数が複雑なので，図から判断できる内積を利用しました。

8

[一橋大・文]

原点を O とする座標空間内の 2 点 $A(0, 3, -5)$, $B(5, -2, 10)$ に対して,
 $\overrightarrow{OP} = s\{(1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}\}$, $s \geq 0$, $\frac{1}{5} \leq t \leq \frac{3}{5}$ で定まる点 P が存在する範囲を D とする。 D に含まれる半径 $10\sqrt{2}$ の円のうち, その中心と原点との距離が最小となるものを C とする。円 C の中心の座標を求めよ。

8

[一橋大・文]

点 $A(0, 3, -5)$, $B(5, -2, 10)$ に対して, 点 Q_1, Q_2 を,

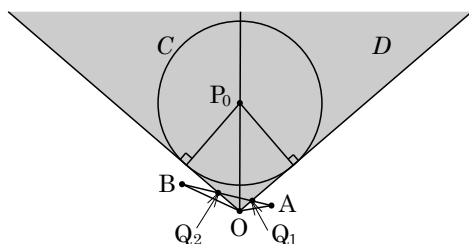
$$\overrightarrow{OQ_1} = \frac{4}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{OB} = \frac{4}{5}(0, 3, -5) + \frac{1}{5}(5, -2, 10) = (1, 2, -2)$$

$$\overrightarrow{OQ_2} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{OB} = \frac{2}{5}(0, 3, -5) + \frac{3}{5}(5, -2, 10) = (3, 0, 4)$$

ここで, $\overrightarrow{OQ} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ ($\frac{1}{5} \leq t \leq \frac{3}{5}$) とおくと, 点 Q は線分 Q_1Q_2 上にある。

さて, $\overrightarrow{OP} = s\{(1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}\} = s\overrightarrow{OQ}$ で,
 $s \geq 0$ から, 点 P は右図の領域 D に存在する。

そして, D に含まれる半径 $10\sqrt{2}$ の円のうち,
 その中心と O との距離が最小となるものを C
 とし, その中心を P_0 , $\theta = \angle Q_1OQ_2$ とおくと,
 半直線 OP_0 は $\angle Q_1OQ_2$ の二等分線である。



まず, $|\overrightarrow{OQ_1}| = \sqrt{1+4+4} = 3$, $|\overrightarrow{OQ_2}| = \sqrt{9+0+16} = 5$ から, k を正の実数として,

$$\overrightarrow{OP_0} = k\left(\frac{\overrightarrow{OQ_1}}{3} + \frac{\overrightarrow{OQ_2}}{5}\right) = \frac{k}{3}(1, 2, -2) + \frac{k}{5}(3, 0, 4) = \frac{2k}{15}(7, 5, 1)$$

$$\text{これより, } |\overrightarrow{OP_0}| = \frac{2k}{15}\sqrt{49+25+1} = \frac{2k}{15} \cdot 5\sqrt{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3}k \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また, $\overrightarrow{OQ_1} \cdot \overrightarrow{OQ_2} = 3+0-8 = -5$ から, $\cos \theta = \frac{-5}{3 \cdot 5} = -\frac{1}{3}$ となり,

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos \theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

そこで, $|\overrightarrow{OP_0}| \sin \frac{\theta}{2} = 10\sqrt{2}$ に①②を適用すると, $\frac{2}{3}\sqrt{3}k \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = 10\sqrt{2}$ から,

$$k = 10 \cdot \frac{3}{2} = 15$$

したがって, $\overrightarrow{OP_0} = \frac{2 \cdot 15}{15}(7, 5, 1) = (14, 10, 2)$ から, $P_0(14, 10, 2)$ である。

[コメント]

空間ベクトルと領域の融合問題です。いろいろな基本事項を組み合わせることが必要ですが, 数値がうまく選ばれているため, 計算は容易でホッとします。

9

[東北大・理]

S を xyz 空間内の原点 $O(0, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の球面とする。また、点 $P(a, b, c)$ を点 $N(0, 0, 1)$ とは異なる球面 S 上の点とする。点 P と点 N を通る直線 l と xy 平面との交点を Q とおく。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 点 Q の座標を a, b, c を用いて表せ。
- (2) xy 平面上の点 $(p, q, 0)$ と点 N を通る直線を m とする。直線 m と球面 S の交点のうち、点 N 以外の交点の座標を p, q を用いて表せ。
- (3) 点 $(0, 0, \frac{1}{2})$ を通り、ベクトル $(3, 4, 5)$ に直交する平面 α を考える。点 P が平面 α と球面 S との交わりを動くとき、点 Q は xy 平面上の円周上を動くことを示せ。

9

[東北大・理]

- (1) 球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上に点 $N(0, 0, 1)$ とは異なる点 $P(a, b, c)$ をとる。

ここで、直線 NP と xy 平面との交点を $Q(x, y, 0)$ とすると、 t を実数として、 $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{ON} + t\overrightarrow{NP}$ から、

$$(x, y, 0) = (0, 0, 1) + t(a, b, c-1)$$

z 成分を比べ $0 = 1 + t(c-1)$ から、 $c \neq 1$ なので、

$$t = \frac{1}{1-c}$$

これより、 $x = \frac{a}{1-c}$ 、 $y = \frac{b}{1-c}$ となり、 $Q\left(\frac{a}{1-c}, \frac{b}{1-c}, 0\right)$ である。

- (2) 点 $(p, q, 0)$ と点 N を通る直線 m と球面 S の点 N 以外の交点について、(1)から、

$$p = \frac{a}{1-c}, \quad q = \frac{b}{1-c} \quad \text{とおくと、} \quad a = (1-c)p, \quad b = (1-c)q \cdots \cdots (*)$$

ここで、 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ より、 $(1-c)^2 p^2 + (1-c)^2 q^2 + c^2 = 1$ となり、

$$(1-c)^2(p^2 + q^2) - (1+c)(1-c) = 0$$

$c \neq 1$ から $(1-c)(p^2 + q^2) - (1+c) = 0$ となり、 $(p^2 + q^2 + 1)c = p^2 + q^2 - 1$ より、

$$c = \frac{p^2 + q^2 - 1}{p^2 + q^2 + 1}, \quad 1-c = \frac{2}{p^2 + q^2 + 1}$$

したがって、 m と S の点 N 以外の交点の座標は、 $(*)$ から、

$$(a, b, c) = \left(\frac{2p}{p^2 + q^2 + 1}, \frac{2q}{p^2 + q^2 + 1}, \frac{p^2 + q^2 - 1}{p^2 + q^2 + 1} \right)$$

- (3) 点 $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$ を通り、ベクトル $(3, 4, 5)$ に直交する平面 α の方程式は、

$$3x + 4y + 5\left(z - \frac{1}{2}\right) = 0, \quad 6x + 8y + 10z = 5$$

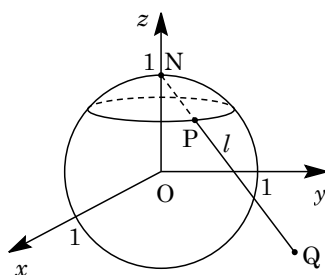
ここで、点 P が平面 α と球面 S との交わりを動くとき、(2)から、

$$6 \cdot \frac{2p}{p^2 + q^2 + 1} + 8 \cdot \frac{2q}{p^2 + q^2 + 1} + 10 \cdot \frac{p^2 + q^2 - 1}{p^2 + q^2 + 1} = 5$$

$$12p + 16q + 10(p^2 + q^2 - 1) = 5(p^2 + q^2 + 1)$$

まとめると、 $5p^2 + 5q^2 + 12p + 16q = 15$ から、 $\left(p + \frac{6}{5}\right)^2 + \left(q + \frac{8}{5}\right)^2 = 7$ となり、

点 Q は xy 平面上で中心 $\left(-\frac{6}{5}, -\frac{8}{5}, 0\right)$ 、半径 $\sqrt{7}$ の円周上を動く。



[コメント]

空間図形と軌跡の融合問題です。ポイントは、(1)から(2)、(2)から(3)という丁寧な誘導に従うことです。

10

[東京科学大・理]

空間の点 $(0, 0, 1)$ を通り $(1, -1, 0)$ を方向ベクトルとする直線を l とし、点 $(1, 0, 3)$ を通り $(0, 1, -2)$ を方向ベクトルとする直線を m とする。

- (1) P を l 上の点とし、 Q を m 上の点とする。また直線 PQ は直線 l と直線 m に垂直であるとする。このとき P と Q の座標、および線分 PQ の長さを求めよ。
- (2) l 上に 2 点 $A = (t, -t, 1)$ 、 $B = (2+t+\sin t, -2-t-\sin t, 1)$ があり、 m 上に 2 点 $C = (1, t, 3-2t)$ 、 $D = (1, 2+t+\cos t, -1-2t-2\cos t)$ があるとする。ただし、 t は実数とする。四面体 $ABCD$ の体積を $V(t)$ とする。 $V(0)$ を求めよ。
- (3) t が $t \geq 0$ を動くとき、 $V(t)$ の最大値と最小値を求めよ。

10

[東京科学大・理]

- (1) 点 $(0, 0, 1)$ を通り方向ベクトル $\vec{u} = (1, -1, 0)$ の直線 l は, p を実数として,

$$(x, y, z) = (0, 0, 1) + p(1, -1, 0) = (p, -p, 1)$$

- 点 $(1, 0, 3)$ を通り方向ベクトル $\vec{v} = (0, 1, -2)$ の直線 m は, q を実数として,

$$(x, y, z) = (1, 0, 3) + q(0, 1, -2) = (1, q, 3-2q)$$

これより, l 上の点 $P(p, -p, 1)$, m 上の点 $Q(1, q, 3-2q)$ と表せ,

$$\overrightarrow{PQ} = (1-p, q+p, 2-2p)$$

ここで, $PQ \perp l$ から $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = (1-p) - (q+p) = 0$ となり, $2p+q=1$ ……①

$PQ \perp m$ から $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = (q+p) - 2(2-2q) = 0$ となり, $p+5q=4$ ……②

①②より, $p = \frac{1}{9}$, $q = \frac{7}{9}$ となり, $P(\frac{1}{9}, -\frac{1}{9}, 1)$, $Q(1, \frac{7}{9}, \frac{13}{9})$ から,

$$PQ = \sqrt{\left(\frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^2} = \frac{4}{9}\sqrt{4+4+1} = \frac{4}{3}$$

- (2) l 上の 2 点 $A(t, -t, 1)$, $B(2+t+\sin t, -2-t-\sin t, 1)$, m 上の 2 点 $C(1, t, 3-2t)$, $D(1, 2+t+\cos t, -1-2t-2\cos t)$ に対して, $t=0$ のとき,

$$A(0, 0, 1), B(2, -2, 1), C(1, 0, 3), D(1, 3, -3)$$

$$\text{すると, } AB = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}, \quad CD = \sqrt{9+36} = 3\sqrt{5}$$

$$\text{まず, } \triangle PCD = \frac{1}{2} CD \cdot PQ = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot \frac{4}{3} = 2\sqrt{5}$$

次に, 点 A と平面 PCD の距離と点 B と平面 PCD の距離の和は, l と m のなす鋭角を θ としたとき, $AB \sin \theta$ と表せ,

$$\cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|-1|}{\sqrt{1+1} \cdot \sqrt{1+4}} = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \sin \theta = \sqrt{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

これより, $AB \sin \theta = 2\sqrt{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$ となり, 四面体 $ABCD$ の体積 $V(0)$ は,

$$V(0) = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{6}{\sqrt{5}} = 4$$

- (3) (2) と同様に, $AB = \sqrt{(2+\sin t)^2 + (-2-\sin t)^2} = \sqrt{2}(2+\sin t)$

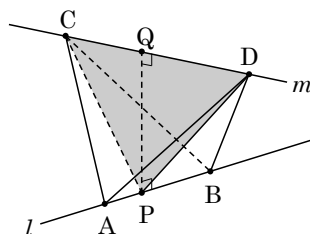
$$CD = \sqrt{(2+\cos t)^2 + (-4-2\cos t)^2} = \sqrt{5}(2+\cos t)$$

まず, $\triangle PCD = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5}(2+\cos t) \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{5}(2+\cos t)$ となり,

$$AB \sin \theta = \sqrt{2}(2+\sin t) \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{5}}(2+\sin t)$$

四面体 $ABCD$ の体積 $V(t)$ は, l 上の 3 点 P, A, B の位置関係にかかわらず,

$$V(t) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{5}(2+\cos t) \cdot \frac{3}{\sqrt{5}}(2+\sin t) = \frac{2}{3}(4+2\sin t+2\cos t+\sin t \cos t)$$



ここで、 $s = \sin t + \cos t$ とおくと、 $s^2 = 1 + 2\sin t \cos t$ から $\sin t \cos t = \frac{s^2 - 1}{2}$

そこで、 $f(s) = \frac{2}{3} \left(4 + 2s + \frac{s^2 - 1}{2} \right)$ とすると、 $V(t) = f(s)$ となり、

$$f(s) = \frac{1}{3}s^2 + \frac{4}{3}s + \frac{7}{3} = \frac{1}{3}(s+2)^2 + 1$$

t が $t \geq 0$ を動くとき、 $s = \sqrt{2} \sin \left(t + \frac{\pi}{4} \right)$ から $-\sqrt{2} \leq s \leq \sqrt{2}$ となる。

したがって、 $V(t)$ は $s = \sqrt{2}$ のとき最大値 $\frac{2}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{7}{3} = \frac{4}{3}\sqrt{2} + 3$ 、 $s = -\sqrt{2}$ のとき最小値 $\frac{2}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{7}{3} = -\frac{4}{3}\sqrt{2} + 3$ をとる。

[コメント]

空間図形の問題です。(2)では四面体の各頂点の座標が複雑でないのですが、(3)との関係から、共通垂線 PQ の長さの利用を考え、 $\triangle PCD$ を底面とみなして体積を計算しています。

11

[九州大]

以下の問いに答えよ。

- (1) n を整数とすると、 n^2 を 8 で割った余りは 0, 1, 4 のいずれかであることを示せ。
- (2) $2^m = n^2 + 3$ をみたす 0 以上の整数の組 (m, n) をすべて求めよ。

11

[九州大]

(1) 整数 n を 4 で割った余りで分類すると, k を整数として,

(i) $n = 4k$ のとき $n^2 = 16k^2 = 8 \cdot 2k^2$

(ii) $n = 4k + 1$ のとき $n^2 = 8(2k^2 + k) + 1$

(iii) $n = 4k + 2$ のとき $n^2 = 8(2k^2 + 2k) + 4$

(iv) $n = 4k + 3$ のとき $n^2 = 8(2k^2 + 3k + 1) + 1$

(i)~(iv)より, n^2 を 8 で割った余りは 0, 1, 4 のいずれかである。

(2) 0 以上の整数 m, n に対して, $2^m = n^2 + 3 \cdots \cdots (*)$

まず, $(*)$ の右辺の $n^2 + 3$ を 8 で割った余りは, (1) から 3, 4, 7 のいずれかである。

また, $(*)$ の左辺の 2^m を 8 で割った余りは, $m = 0$ のとき 1, $m = 1$ のとき 2, $m = 2$ のとき 4, $m \geq 3$ のとき 0 である。

ここで, $(*)$ が成り立つには, 2^m を 8 で割った余りと $n^2 + 3$ を 8 で割った余りが等しいことが必要である。すると, $n^2 + 3$ と 2^m を 8 で割った余りがともに 4 のときになり, $m = 2$ かつ $2^2 = n^2 + 3$ のときである。

したがって, $(*)$ をみたす (m, n) は, $(m, n) = (2, 1)$ である。

[コメント]

余りで分類するタイプの整数問題です。(1)が(2)にストレートにつながります。

12

[京都大・理]

正の整数 x, y, z を用いて, $N = 9z^2 = x^6 + y^4$ と表される正の整数 N の最小値を求めよ。

12

[京大・理]

正の整数 x, y, z を対して、 $N = 9z^2 = x^6 + y^4 \cdots \cdots \textcircled{1}$

まず、 x と x^6 、 y と y^4 を 3 で割った余りについてまとめると、右表のようになる。これより、 x^6 、 y^4 を 3 で割った余りは 0 または 1 である。

x	0	1	2
x^6	0	1	1

y	0	1	2
y^4	0	1	1

次に、 x^6 、 y^4 を 3 で割った余りと、 $x^6 + y^4$ を 3 で割った余りの関係は右表のようになる。

$\begin{smallmatrix} y^4 \\ x^6 \end{smallmatrix}$	0	1
0	0	1
1	1	2

すると、 $\textcircled{1}$ から $9z^2$ を 3 で割った余りは 0 から、 $x^6 + y^4$ を 3 で割った余りも 0、すなわち x^6 、 y^4 を 3 で割った余りはともに 0 である。

これより、 k, l を正の整数として、 $x = 3k$ 、 $y = 3l$ とおくことができ、 $\textcircled{1}$ に代入し、

$$9z^2 = 3^6 k^6 + 3^4 l^4, \quad z^2 = 3^4 k^6 + 3^2 l^4 = 3^2(3^2 k^6 + l^4) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

すると、 z^2 は 3^2 の倍数、すなわち z は 3 の倍数となり、 m を正の整数として $z = 3m$ とおくと、 $\textcircled{2}$ から、

$$3^2 m^2 = 3^2(3^2 k^6 + l^4), \quad m^2 = 9k^6 + l^4 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3}$ を満たす正の整数 m が最小になるのは、

- ・ $k=1$ 、 $l=1$ のとき $\textcircled{3}$ から、 $m^2 = 9+1=10$ となり、整数 m は存在しない。
- ・ $k=1$ 、 $l=2$ のとき $\textcircled{3}$ から、 $m^2 = 9+16=25$ となり、 $m=5$ である。

なお、 $k \geq 2$ 、 $l=1$ のときは、 $\textcircled{3}$ から $m^2 \geq 576+1=577$ となり、 $k=1$ 、 $l=2$ のとき m は最小値をとる。

したがって、 $\textcircled{1}$ を満たす正の整数 N は $N = 9(3m)^2 = 81m^2$ から、その最小値は、 $81 \cdot 5^2 = 2025$ である。

[コメント]

誘導のない整数問題です。ここでは、与えられた式の z^2 の係数 9 に着目し、3 で割った余りをもとに考えています。

13

[神戸大・理]

実数 a に対して、 a を超えない最大の整数を k とするとき、 $a - k$ を a の小数部分という。 n を自然数とし、 $a_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$ とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) $0 < a_n < 1$ が成り立つことを示せ。
- (2) b_n を $\left(3n - \frac{1}{a_n}\right)$ の小数部分とする。 b_n を n を用いて表せ。
- (3) b_n を (2) で定めたものとする。 m, n を異なる 2 つの自然数とすると、 $a_m + b_n \neq 1$ であることを示せ。

13

[神戸大・理]

- (1)
- n
- が自然数のとき,
- $a_n = \sqrt{n^2+1} - n$
- に対して,

$$a_n = \frac{(n^2+1) - n^2}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n}$$

すると, $\sqrt{n^2+1} + n \geq \sqrt{2} + 1 > 1$ より, $0 < a_n < 1$ が成り立つ。

- (2)
- $3n - \frac{1}{a_n} = 3n - (\sqrt{n^2+1} + n) = 2n - \sqrt{n^2+1}$

さて, $\sqrt{n^2} < \sqrt{n^2+1} < \sqrt{n^2+2n+1} = \sqrt{(n+1)^2}$ から, $n < \sqrt{n^2+1} < n+1$

$$2n - (n+1) < 2n - \sqrt{n^2+1} < 2n - n, \quad n-1 < 3n - \frac{1}{a_n} < n$$

これより, $3n - \frac{1}{a_n}$ を超えない最大の整数は $n-1$ となり, 小数部分 b_n は,

$$b_n = \left(3n - \frac{1}{a_n}\right) - (n-1) = (2n - \sqrt{n^2+1}) - n + 1 = n + 1 - \sqrt{n^2+1}$$

- (3) 2つの自然数
- m, n
- に対して,
- $a_m + b_n = 1$
- とすると, (1)(2)から,

$$(\sqrt{m^2+1} - m) + (n + 1 - \sqrt{n^2+1}) = 1$$

$$\sqrt{m^2+1} - m = \sqrt{n^2+1} - n \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(1)と同様に変形すると, ①から $\frac{1}{\sqrt{m^2+1} + m} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n}$ となり,

$$\sqrt{m^2+1} + m = \sqrt{n^2+1} + n \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①②より, $2m = 2n$ から $m = n$ である。

したがって, 「 $a_m + b_n = 1$ ならば $m = n$ 」が成り立ち, 対偶を考えると「 $m \neq n$ ならば $a_m + b_n \neq 1$ 」である。

[コメント]

整数部分と小数部分についての問題です。(3)はいろいろな証明が可能ですが, 解答例では, 分子の有理化という手法と対偶を組み合わせた方法で記述しました。

14

[一橋大・文]

正の整数 n に対し, n の正の約数の個数を $d(n)$ とする。たとえば, 6 の正の約数は 1, 2, 3, 6 の 4 個なので, $d(6) = 4$ である。また, $f(n) = \frac{d(n)}{\sqrt{n}}$ とする。

- (1) $f(2025)$ を求めよ。
- (2) 素数 p と正の整数 k の組で $f(p^k) \leq f(p^{k+1})$ を満たすものを求めよ。
- (3) $f(n)$ の最大値と, そのときの n を求めよ。

14

[一橋大・文]

(1) $2025 = 3^4 \cdot 5^2$ から, $d(2025) = (4+1) \cdot (2+1) = 15$ となり,

$$f(2025) = \frac{d(2025)}{\sqrt{2025}} = \frac{15}{3^2 \cdot 5} = \frac{1}{3}$$

(2) p が素数, k が正の整数のとき $d(p^k) = k+1$ から, $f(p^k) \leq f(p^{k+1})$ に対して,

$$\frac{k+1}{\sqrt{p^k}} \leq \frac{k+2}{\sqrt{p^{k+1}}}, \quad k+1 \leq \frac{k+2}{\sqrt{p}}$$

すると, $\sqrt{p} \leq \frac{k+2}{k+1}$ から, $p \leq \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^2 \cdots \cdots (*)$ となり,

・ $k=1$ のとき $(*)$ から $p \leq \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ となり, $p=2$ である。

・ $k \geq 2$ のとき $\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^2 \leq \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$ となり, $(*)$ を満たす p はない。

したがって, $f(p^k) \leq f(p^{k+1})$ を満たすものは, $(p, k) = (2, 1)$ だけである。

(3) $n \geq 2$ のとき, $p_1, p_2, \dots, p_m$ ($p_1 < p_2 < \dots < p_m$) を素数, $k_1, k_2, \dots, k_m$ を正の整数として n を素因数分解したとき, $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$ となったとすると,

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{(k_1+1)(k_2+1)\cdots(k_m+1)}{\sqrt{p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}}} = \frac{k_1+1}{\sqrt{p_1^{k_1}}} \cdot \frac{k_2+1}{\sqrt{p_2^{k_2}}} \cdots \frac{k_m+1}{\sqrt{p_m^{k_m}}} \\ &= f(p_1^{k_1}) \cdot f(p_2^{k_2}) \cdots f(p_m^{k_m}) \end{aligned}$$

さて, (2)の結果から,

・ $p=2$ のとき $f(2^1) \leq f(2^2)$ かつ $f(2^2) > f(2^3) > f(2^4) > \dots$

ここで, $f(2^1) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, $f(2^2) = \frac{3}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$ から,

$$1 < f(2^1) < f(2^2) > f(2^3) > f(2^4) > \dots$$

・ $p \geq 3$ のとき $f(p^1) > f(p^2) > f(p^3) > f(p^4) > \dots$

さらに, $f(3^1) = \frac{2}{\sqrt{3}} > 1$, $p \geq 5$ のとき $f(p^1) = \frac{2}{\sqrt{p}} < 1$ となるので, $n \geq 2$ のとき

$f(n)$ の最大値は $f(2^2) \cdot f(3^1)$, すなわち $f(12) = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ である。

そして, $f(1) = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$ なので, $f(n)$ は $n=12$ のとき最大値 $\sqrt{3}$ をとる。

[コメント]

例年通り, 一橋大の第1問は整数問題です。(2)が(3)の秀逸な誘導になっています。

15

[大阪公立大・文]

a, b, c, d は整数であり、条件 $a < b < c < d$ かつ $(b-a)(c-a)(d+a) = (2a)^3$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

- (1) $a = 2$ のとき、上記の条件を満たす b, c, d の組をすべて求めよ。
- (2) $a = 3$ かつ b, c, d が奇数のとき、上記の条件を満たす b, c, d の組をすべて求めよ。

15

[大阪公立大・文]

整数 a, b, c, d に対し、 $a < b < c < d$ かつ $(b-a)(c-a)(d+a) = (2a)^3 \cdots \cdots \textcircled{1}$

(1) $a = 2$ のとき、 $\textcircled{1}$ から、 $(b-2)(c-2)(d+2) = 2^6$ ($2 < b < c < d$) $\cdots \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{2}$ より、 p, q, r を 0 以上の整数とし、 $b-2 = 2^p$ 、 $c-2 = 2^q$ 、 $d+2 = 2^r$ とおくと、

$$b = 2^p + 2, \quad c = 2^q + 2, \quad d = 2^r - 2$$

すると、 $2^p \cdot 2^q \cdot 2^r = 2^6$ から $2^{p+q+r} = 2^6$ となり、 $p+q+r = 6 \cdots \cdots \textcircled{3}$

$2 < 2^p + 2 < 2^q + 2 < 2^r - 2$ より、 $0 \leq p < q < r \cdots \cdots \textcircled{4}$ が必要となる。

$\textcircled{3}\textcircled{4}$ より、 $(p, q, r) = (0, 1, 5), (0, 2, 4), (1, 2, 3)$ となる。

(i) $(p, q, r) = (0, 1, 5)$ のとき $(b, c, d) = (3, 4, 30)$ となり適する。

(ii) $(p, q, r) = (0, 2, 4)$ のとき $(b, c, d) = (3, 6, 14)$ となり適する。

(iii) $(p, q, r) = (1, 2, 3)$ のとき $(b, c, d) = (4, 6, 6)$ となり不適である。

(i)～(iii) より、 $\textcircled{2}$ を満たす b, c, d は、 $(b, c, d) = (3, 4, 30), (3, 6, 14)$ である。

(2) $a = 3$ のとき、 $\textcircled{1}$ から、 $(b-3)(c-3)(d+3) = 2^3 \cdot 3^3$ ($3 < b < c < d$) $\cdots \cdots \textcircled{5}$

そして、 b, c, d は奇数より、 $b-3, c-3, d+3$ はすべて偶数となり、 $\textcircled{5}$ より、 k, l, m を 0 以上の整数とし、 $b-3 = 2 \cdot 3^k$ 、 $c-3 = 2 \cdot 3^l$ 、 $d+3 = 2 \cdot 3^m$ とおくと、

$$b = 2 \cdot 3^k + 3, \quad c = 2 \cdot 3^l + 3, \quad d = 2 \cdot 3^m - 3$$

すると、 $2 \cdot 3^k \cdot 2 \cdot 3^l \cdot 2 \cdot 3^m = 2^3 3^3$ から $3^{k+l+m} = 3^3$ となり、 $k+l+m = 3 \cdots \cdots \textcircled{6}$

$3 < 2 \cdot 3^k + 3 < 2 \cdot 3^l + 3 < 2 \cdot 3^m - 3$ より、 $0 \leq k < l < m \cdots \cdots \textcircled{7}$ が必要となる。

$\textcircled{6}\textcircled{7}$ より、 $(k, l, m) = (0, 1, 2)$ から、 $(b, c, d) = (5, 9, 15)$ となり適する。

したがって、 $\textcircled{5}$ を満たす奇数 b, c, d は、 $(b, c, d) = (5, 9, 15)$ である。

[コメント]

標準的な不定方程式の問題です。(1)(2)とも、まず必要条件を求め、そのあと十分性を確認しています。

16

[名古屋大]

整数 a, b, c に対し次の条件を考える。 (*) $a \geq b \geq 0$ かつ $a^2 - b^2 = c$

以下の問いに答えよ。

- (1) $c = 24, 25, 26$ それぞれの場合に条件(*)をみたす整数の組 (a, b) をすべて求めよ。
- (2) p は 3 以上の素数, n は正の整数, $c = 4p^{2n}$ とする。このとき, 条件(*)をみたす整数の組 (a, b) をすべて求めよ。

16

[名古屋大]

- (1) 整数
- a, b, c
- に対して,
- $a \geq b \geq 0$
- かつ
- $a^2 - b^2 = c \cdots \cdots (*)$

このとき, $(a+b)(a-b) = c$ となり, $a+b$ と $a-b$ は c の約数である。さらに, $a+b \geq a-b \geq 0$ であり, $(a+b) - (a-b) = 2b$ から $2b$ が偶数なので, $a+b$ と $a-b$ の偶奇は一致する。・ $c = 24$ のとき $(a+b)(a-b) = 2^3 \cdot 3$ となり, $(a+b, a-b) = (12, 2), (6, 4)$ $(*)$ をみたす (a, b) は, $(a, b) = (7, 5), (5, 1)$ である。・ $c = 25$ のとき $(a+b)(a-b) = 5^2$ となり, $(a+b, a-b) = (25, 1), (5, 5)$ $(*)$ をみたす (a, b) は, $(a, b) = (13, 12), (5, 0)$ である。・ $c = 26$ のとき $(a+b)(a-b) = 2 \cdot 13$ となり, みたす $(a+b, a-b)$ はない。 $(*)$ をみたす (a, b) は存在しない。

- (2)
- $c = 4p^{2n}$
- (
- p
- は 3 以上の素数,
- n
- は正の整数) のとき,
- $(*)$
- から

$$(a+b)(a-b) = 2^2 \cdot p^{2n} \quad (a+b \geq a-b \geq 0)$$

ここで, p は奇数から p^{2n} は奇数となり, $(*)$ をみたす $(a+b, a-b)$ はともに偶数となることより, $4p^{2n}$ を 2 つの偶数の積に分けると考えて,

$$(a+b, a-b) = (2p^{2n}, 2), (2p^{2n-1}, 2p), \cdots, (2p^n, 2p^n)$$

すると, $i = 0, 1, \cdots, n$ として, $(a+b, a-b) = (2p^{2n-i}, 2p^i)$ から,

$$(a, b) = \left(\frac{2p^{2n-i} + 2p^i}{2}, \frac{2p^{2n-i} - 2p^i}{2} \right) = (p^{2n-i} + p^i, p^{2n-i} - p^i)$$

[コメント]約数・倍数の関係をもとにした不定方程式の問題です。 $(*)$ をみたす $a+b$ と $a-b$ の偶奇が一致する点に要注目です。

17

[岡山大]

xyz 空間における 4 点 $O(0, 0, 0)$, $A(n, 0, 0)$, $B(0, n, 0)$, $C(0, 0, 2n)$ を頂点とする四面体 $OABC$ を考える。ただし, n は 2 以上の整数とする。以下の問いに答えよ。

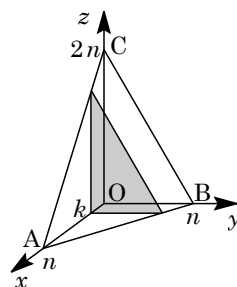
- (1) 四面体 $OABC$ を平面 $x = k$ で切ったとき, 断面として現れる三角形 T_k のすべての頂点の座標を求めよ。ただし, k は整数で $1 \leq k \leq n-1$ とする。
- (2) (1)の三角形 T_k の内部に含まれ, y, z 座標がいずれも整数となる点の個数を n, k を用いて表せ。ただし, 辺および頂点は内部に含まれないとする。
- (3) 四面体 $OABC$ の内部に含まれ, x, y, z 座標がいずれも整数となる点の個数を n を用いて表せ。ただし, 面, 辺, および頂点は内部に含まれないとする。

17

[岡山大]

- (1) 点 $O(0, 0, 0)$, $A(n, 0, 0)$, $B(0, n, 0)$, $C(0, 0, 2n)$ を頂点とする四面体 $OABC$ を、平面 $x = k$ ($1 \leq k \leq n-1$) で切ったとき、断面の三角形 T_k の頂点について、

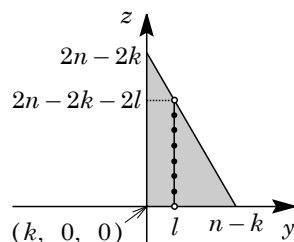
- ・平面 $x = k$ と辺 $OA: y = z = 0$ の交点の座標は、 $(k, 0, 0)$
- ・平面 $x = k$ と辺 $AB: y = n - x$ かつ $z = 0$ の交点の座標は、 $(k, n - k, 0)$
- ・平面 $x = k$ と辺 $AC: z = 2n - 2x$ かつ $y = 0$ の交点の座標は、 $(k, 0, 2n - 2k)$



- (2) 整数 l ($1 \leq l \leq n - k - 1$) に対し、線分 $y = l$ 上で三角形 T_k の内部にある格子点は、 $2n - 2k - 2l - 1$ 個ある。

そこで、三角形 T_k の内部に含まれる格子点の個数を M_k とおくと、

$$\begin{aligned} M_k &= \sum_{l=1}^{n-k-1} (2n - 2k - 2l - 1) \\ &= (2n - 2k - 1)(n - k - 1) - 2 \cdot \frac{1}{2} (n - k - 1)(n - k) \\ &= (n - k - 1)\{(2n - 2k - 1) - (n - k)\} = (n - k - 1)^2 \end{aligned}$$



- (3) 四面体 $OABC$ の内部に含まれる格子点の個数を N とおくと、 $n \geq 3$ において、

$$\begin{aligned} N &= \sum_{k=1}^{n-1} M_k = \sum_{k=1}^{n-1} (n - k - 1)^2 = (n - 2)^2 + (n - 1)^2 + \cdots + 1^2 + 0^2 \\ &= \sum_{i=0}^{n-2} i^2 = \frac{1}{6} (n - 2)(n - 1)(2n - 3) \end{aligned}$$

$n = 2$ をあてはめると $N = 0$ となり、このときも成り立っている。

[コメント]

四面体の内部にある格子点の個数を数える頻出題です。誘導が付いていますが、やや面倒な計算も現れてきます。

18

[金沢大・理]

次の式によって与えられる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{x_n\}$ がある。

$$a_n = \sum_{k=1}^n k, \quad b_n = \sum_{k=1}^n k^2, \quad x_n = \sum_{k=1}^n k a_k$$

次の問いに答えよ。

- (1) $\frac{b_n}{a_n}$ が整数となる n をすべて求めよ。
- (2) $x_n = \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n)$ を示せ。
- (3) $\frac{x_n}{a_n}$ が整数となる n をすべて求めよ。

18

[金沢大・理]

$$(1) \quad a_n = \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1), \quad b_n = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \text{ より, } \frac{b_n}{a_n} = \frac{2n+1}{3}$$

m を整数として、条件より $\frac{b_n}{a_n} = m$ とおくと、 $2n+1=3m \cdots \cdots \textcircled{1}$

①を満たす (n, m) として $(n, m) = (1, 1)$ があり、 $2 \cdot 1 + 1 = 3 \cdot 1$ から、

$$2(n-1) = 3(m-1)$$

2 と 3 は互いに素なので、 i を整数として、 $(n-1, m-1) = (3i, 2i)$ となり、

$$n = 3i + 1, \quad m = 2i + 1 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

なお、 $n \geq 1$ から $3i + 1 \geq 1$ となり、 i は 0 以上の整数である。

$$(2) \quad x_n = \sum_{k=1}^n k a_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k^2 (k+1) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (k^3 + k^2) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k^3 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k^2$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2 + \frac{1}{2} b_n = \frac{1}{2} a_n^2 + \frac{1}{2} b_n = \frac{1}{2} (a_n^2 + b_n)$$

$$(3) \quad l \text{ を整数として、条件より } \frac{x_n}{a_n} = l \text{ とおくと、(2) から } \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{b_n}{a_n} \right) = l \cdots \cdots \textcircled{3}$$

さて、 a_n は整数なので、 $\frac{b_n}{a_n}$ は整数であることが必要で、②から $n = 3i + 1$ より、

$$a_n = \frac{1}{2}(3i+1)(3i+2), \quad \frac{b_n}{a_n} = m = 2i+1$$

すると、 $\frac{x_n}{a_n}$ が整数である条件は、③より $\frac{1}{2}(3i+1)(3i+2) + (2i+1) = 2l$ となり、

$$9i^2 + 13i + 4 = 4l, \quad (i+1)(9i+4) = 4l \cdots \cdots \textcircled{4}$$

ここで、以下 mod 4 で記すと、 $4l \equiv 0$ であり、

- $i \equiv 0$ のとき $(i+1)(9i+4) \equiv 1 \cdot 4 \equiv 0$
- $i \equiv 1$ のとき $(i+1)(9i+4) \equiv 2 \cdot 13 \equiv 2 \cdot 1 \equiv 2$
- $i \equiv 2$ のとき $(i+1)(9i+4) \equiv 3 \cdot 22 \equiv 3 \cdot 2 \equiv 6 \equiv 2$
- $i \equiv 3$ のとき $(i+1)(9i+4) \equiv 4 \cdot 31 \equiv 0 \cdot 3 \equiv 0$

すると、④は $i = 4j$ または $i = 4j + 3$ のとき成り立ち、このとき、

$$n = 3 \cdot 4j + 1 = 12j + 1, \quad n = 3(4j + 3) + 1 = 12j + 10$$

なお、 $i \geq 0$ から、ともに $j \geq 0$ となり、 j は 0 以上の整数である。

[コメント]

数列の和と整数の融合問題です。(3)はいろいろな方法が考えられますが、解答例は(1)と(2)の結果を利用する方法で記しています。

19

[金沢大・文]

3個のさいころを同時に投げ、それらの出た目の積を X とし、 X を素因数分解したときの3の指数を Y とする。ただし、 X が3で割り切れない場合は $Y=0$ とする。たとえば、 $X=45=3^2 \cdot 5$ のときは $Y=2$ であり、 $X=50=2 \cdot 5^2$ のときは $Y=0$ である。次の問いに答えよ。

- (1) $X=216$ となる確率を求めよ。
- (2) $X=36$ となる確率を求めよ。
- (3) $Y \geq 1$ となる確率を求めよ。
- (4) Y の期待値を求めよ。

19

[金沢大・文]

3 個のさいころの出た目の積を X , X を素因数分解したときの 3 の指数を Y とする。

(1) $X = 216 = 6^3$ となるのは, 3 個のさいころの出た目が $\{6, 6, 6\}$ の場合であり, この確率は $\frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$ となる。

(2) $X = 36 = 6^2 = 2^2 \cdot 3^2$ となるのは, 3 個のさいころの出た目について,

・ $\{1, 6, 6\}$ のとき $\frac{3!}{2!} = 3$ 通りがある。

・ $\{2, 3, 6\}$ のとき $3! = 6$ 通りがある。

・ $\{3, 3, 4\}$ のとき $\frac{3!}{2!} = 3$ 通りがある。

したがって, $X = 36$ となる確率は, $\frac{3+6+3}{6^3} = \frac{1}{18}$ となる。

(3) $Y = 0$ となるのは, 3 個のさいころの出た目が 1, 2, 4, 5 のいずれかで, 4^3 通りの場合があることより, この確率は $\frac{4^3}{6^3} = \frac{8}{27}$ となる。

これより, $Y \geq 1$ となる確率は, $1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$ である。

(4) Y の値は, $Y = 0, 1, 2, 3$ の場合があり,

(i) $Y = 3$ のとき 3 個のさいころの出た目が 3, 6 のいずれかである。

このとき 2^3 通りの場合があり, 確率は $\frac{2^3}{6^3} = \frac{1}{27}$ となる。

(ii) $Y = 1$ のとき 3 個のさいころの出た目について,

・ 3 が 1 回で, 残り 2 回は 1, 2, 4, 5 のいずれかのとき $3 \times 4^2 = 48$ 通り

・ 6 が 1 回で, 残り 2 回は 1, 2, 4, 5 のいずれかのとき $3 \times 4^2 = 48$ 通り

このときの確率は, $\frac{48+48}{6^3} = \frac{96}{6^3} = \frac{4}{9}$ となる。

(iii) $Y = 2$ のとき (3)の結果と(i)(ii)から, この確率は $\frac{19}{27} - \frac{1}{27} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$ となる。

以上より, Y の期待値 E は, $E = 0 \times \frac{8}{27} + 1 \times \frac{4}{9} + 2 \times \frac{2}{9} + 3 \times \frac{1}{27} = 1$ である。

[コメント]

数え上げるタイプの確率問題です。そのため(3)では余事象を考え, (4)では数えにくそうな $Y = 2$ の確率を最後に計算しています。

20

[千葉大・理]

さいころを投げて座標平面上の点 P を動かす試行を繰り返す。最初の点 P の位置は原点であるとする。1 回の試行では 1 個のさいころを投げて、出た目に応じて以下の規則により点 P を動かす。

- ・ 1 または 2 が出れば、点 P を x 軸方向に $+1$ だけ動かす。
- ・ 3 または 4 が出れば、点 P を y 軸方向に $+1$ だけ動かす。
- ・ 5 または 6 が出れば、点 P を y 軸方向に -1 だけ動かす。

n 回目の試行直後の点 P の座標を (x_n, y_n) とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $x_6 = y_6 = 0$ となる確率を求めよ。
- (2) $y_6 = 0$ となる確率を求めよ。
- (3) $y_1, \dots, y_5$ がすべて 0 以上で、かつ $y_6 = 0$ となる確率を求めよ。

20

[千葉大・理]

最初、原点にある点 P を動かす試行について、 x 軸方向に +1 は「→」、 y 軸方向に +1 は「↑」、 y 軸方向に -1 は「↓」と記し、 n 回目の試行直後には $P(x_n, y_n)$ にあるとする。
 なお、この 3 つの事象の確率は、いずれも $\frac{1}{3}$ である。

- (1) $x_6 = y_6 = 0$ となるのは、「→」が 0 回、「↑」が 3 回、「↓」が 3 回より、その確率は、

$$\frac{6!}{3!3!} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{6!}{3!3!} \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{20}{729}$$

- (2) $y_6 = 0$ となるのは、「↑」と「↓」が同じ回数であることに注意すると、

- (i) 「→」が 0 回、「↑」が 3 回、「↓」が 3 回のとき 確率は、(1) より $\frac{20}{729}$

- (ii) 「→」が 2 回、「↑」が 2 回、「↓」が 2 回のとき 確率は、 $\frac{6!}{2!2!2!} \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{90}{729}$

- (iii) 「→」が 4 回、「↑」が 1 回、「↓」が 1 回のとき 確率は、 $\frac{6!}{4!} \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{30}{729}$

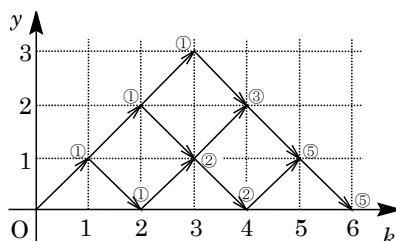
- (iv) 「→」が 6 回、「↑」が 0 回、「↓」が 0 回のとき 確率は、 $\left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{729}$

- (i)～(iv) より、 $y_6 = 0$ となる確率は、 $\frac{20}{729} + \frac{90}{729} + \frac{30}{729} + \frac{1}{729} = \frac{47}{243}$ である。

- (3) $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0, y_5 \geq 0$ かつ

$y_6 = 0$ となると、試行の回数 k と点 P の y 座標の関係をもとめると、右図のようになる。

なお、丸数字は条件に適する「↑」と「↓」の経路数を表す。



- (i) 「→」が 0 回、「↑」が 3 回、「↓」が 3 回のとき

「↑」と「↓」について 5 通りの場合があり、確率は $5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{5}{729}$ となる。

- (ii) 「→」が 2 回、「↑」が 2 回、「↓」が 2 回のとき

「↑」と「↓」について 2 通りの場合があり、確率は ${}_6C_2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{30}{729}$ となる。

- (iii) 「→」が 4 回、「↑」が 1 回、「↓」が 1 回のとき

「↑」と「↓」について 1 通りの場合があり、確率は ${}_6C_4 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{15}{729}$ となる。

- (iv) 「→」が 6 回、「↑」が 0 回、「↓」が 0 回のとき 確率は $\left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{729}$ となる。

- (i)～(iv) より、求める確率は、 $\frac{5}{729} + \frac{30}{729} + \frac{15}{729} + \frac{1}{729} = \frac{17}{243}$ である。

[コメント]

ランダムウォークを題材にした確率問題です。(3)は与えられた条件がきついの、グラフを用いて場合の数を数えています。

21

[京都大・文]

n は正の整数とする。1 枚の硬貨を投げ、表が出たら 1, 裏が出たら 2 と記録する。この試行を n 回繰り返し、記録された順に数字を左から並べて n 桁の数 X を作る。ただし、数の表し方は十進法とする。このとき、 X が 6 で割り切れる確率を求めよ。

21

[京都大・文]

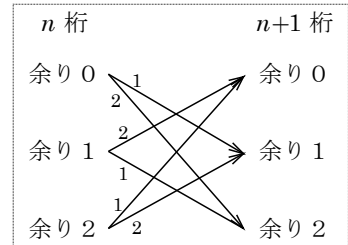
与えられた条件で n 桁の数 X を作るとき、 X が 6 で割り切れるのは、 X が偶数かつ 3 の倍数のときである。言い換えると、 n 回目に硬貨を投げて 2 と記録し、さらに $n-1$ 回目までに記録した数字の和を 3 で割ったときの余りが 1 の場合である。

まず、 X を 3 で割った余りが 0, 1, 2 の確率を、それぞれ a_n, b_n, c_n とおくと、 $a_1 = 0, b_1 = c_1 = \frac{1}{2}$ のもとで、

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + c_n) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

次に、 X が 6 で割り切れる確率を p_n とおくと、

$$p_n = \frac{1}{2}b_{n-1} \quad (n \geq 2) \cdots \cdots \textcircled{2}$$



①から、 $a_n + b_n + c_n = 1$ なので、 $b_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - b_n) = -\frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}$ となり、

$$b_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(b_n - \frac{1}{3}\right)$$

これより、 $b_n - \frac{1}{3} = \left(b_1 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ なので、

$$b_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

すると、②に代入して、 $p_n = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad (n \geq 2) \cdots \cdots \textcircled{3}$

③に $n=1$ をあてはめると $p_1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0$ となり、このときも成立している。

[コメント]

漸化式と確率の問題です。6 の倍数ということを、1 の位が 2 かつ各位の数字の和が 3 の倍数として、漸化式と関連づけることが要点です。

22

[京都大・理]

n は 2 以上の整数とする。1 枚の硬貨を続けて n 回投げる。このとき、 k 回目 ($1 \leq k \leq n$) に表が出たら $X_k = 1$ 、裏が出たら $X_k = 0$ として、 $X_1, X_2, \dots, X_n$ を定める。 $Y_n = \sum_{k=2}^n X_{k-1} X_k$ とするとき、 Y_n が奇数である確率 p_n を求めよ。

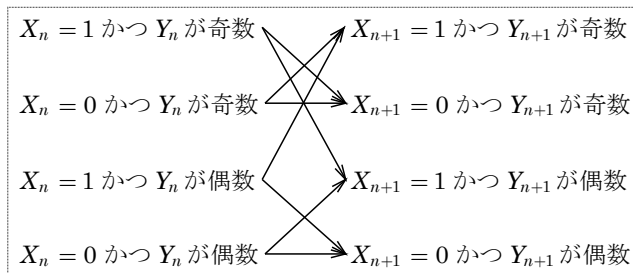
22

[京都大・理]

1枚の硬貨を続けて n 回 ($n \geq 2$) 投げ、 k 回目 ($1 \leq k \leq n$) に表が出たら $X_k = 1$ 、裏が出たら $X_k = 0$ とし、 $Y_n = \sum_{k=2}^n X_{k-1}X_k$ とする。

さて、「 $X_n = 1$ かつ Y_n が奇数」、「 $X_n = 0$ かつ Y_n が奇数」、「 $X_n = 1$ かつ Y_n が偶数」、「 $X_n = 0$ かつ Y_n が偶数」という確率を、順に a_n , b_n , c_n , d_n とおく。

このとき、状態の推移図は右のようになり、



$$a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}d_n \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$d_{n+1} = \frac{1}{2}c_n + \frac{1}{2}d_n \cdots \cdots \textcircled{4}$$

なお、 $Y_2 = X_1X_2$ から、 $a_2 = \frac{1}{4}$, $b_2 = 0$, $c_2 = \frac{1}{4}$, $d_2 = \frac{1}{2}$ である。

ここで、 Y_n が奇数である確率を p_n とすると、 $p_n = a_n + b_n$ であり、①②より、

$$a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + b_n + \frac{1}{2}c_n = b_n + \frac{1}{2}(a_n + c_n) \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{3} \text{より、} a_{n+1} + c_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n + \frac{1}{2}d_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n + c_n + d_n)$$

すると、 $a_n + b_n + c_n + d_n = 1$ から $a_{n+1} + c_{n+1} = \frac{1}{2}$ となり、 $a_n + c_n = \frac{1}{2}$ ($n \geq 3$)

なお、 $a_2 + c_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ なので、 $n \geq 2$ で $a_n + c_n = \frac{1}{2}$ となり、⑤に代入して、

$$a_{n+1} + b_{n+1} = b_n + \frac{1}{4}, \quad p_{n+1} = b_n + \frac{1}{4} \cdots \cdots \textcircled{6}$$

また、②から $b_{n+1} = \frac{1}{2}p_n$ となり、⑥に代入すると $p_{n+2} = b_{n+1} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4}$ から、

$$p_{n+2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(p_n - \frac{1}{2}\right) \cdots \cdots \textcircled{7}$$

(i) $n = 2k$ ($k \geq 1$) のとき ⑦から、 $p_{2k+2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(p_{2k} - \frac{1}{2}\right)$ となり、

$$p_{2k} - \frac{1}{2} = \left(p_2 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \left(\frac{1}{4} + 0 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

すると、 $p_{2k} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$ から、 $p_n = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}+1}$ となる。

(ii) $n = 2k+1$ ($k \geq 1$) のとき ⑦から、 $p_{2k+3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(p_{2k+1} - \frac{1}{2}\right)$ となり、

$$p_{2k+1} - \frac{1}{2} = \left(p_3 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \left(0 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

すると、 $p_{2k+1} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$ から、 $p_n = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}$ となる。

(i)(ii)より、 n が偶数のとき $p_n = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}+1}$ 、 n が奇数のとき $p_n = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}$ である。

【コメント】

確率と漸化式の問題です。 Y_n の偶奇だけでなく、 X_n の値にも注意して状態を分類することが必要です。