

1

[新潟大]

次の条件(☆)を満たす複素数 z を考える。ただし、 i は虚数単位とする。

(☆) iz^2 は実数であって、 $0 \leq iz^2 \leq 2$ である。

次の問いに答えよ。

- (1) $iz^2 = 2$ であるときの複素数 z をすべて求めよ。
- (2) $0 < iz^2 \leq 2$ であるときの複素数 z の偏角 θ をすべて求めよ。ただし、 $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。
- (3) 条件(☆)を満たす複素数 z 全体の集合を S とする。集合 S を複素数平面上に図示せよ。
- (4) 複素数 z が(3)の S を動くとき、 $\frac{z}{z+2}$ の実部の最小値を求めよ。

1

[新潟大]

- (1) $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とおくと, $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$, $z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$ から,

$$iz^2 = r^2 \left\{ \cos \left(2\theta + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{2} \right) \right\} \cdots \cdots (*)$$

$iz^2 = 2$ のとき, $r^2 = 2$ かつ $2\theta + \frac{\pi}{2} = 2n\pi$ (n は整数) から, $r = \sqrt{2}$ となる。

また, $0 \leq \theta < 2\pi$ とすると, $n = 1, 2$ となり $\theta = \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$ であるので

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right) = -1 + i, \quad z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi \right) = 1 - i$$

- (2) $0 < iz^2 \leq 2$ のとき, (*) から $2\theta + \frac{\pi}{2} = 2m\pi$ (m は整数) となる。

そこで, $0 \leq \theta < 2\pi$ とすると, $\theta = \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$ である。

- (3) 条件 $0 \leq iz^2 \leq 2$ を満たす複素数 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ 全体の集合を S とすると,

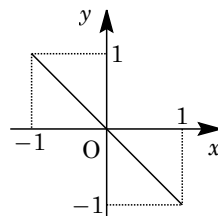
- (i) $0 < iz^2 \leq 2$ のとき

(*) より $0 < r^2 \leq 2$ ($0 < r \leq \sqrt{2}$) で, (2) から $\theta = \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$

- (ii) $iz^2 = 0$ のとき (*) より $r = 0$, すなわち $z = 0$ である。

- (i)(ii) より, 集合 S を複素数平面上に図示すると,

線分: $y = -x$ ($-1 \leq x \leq 1$)



- (4) (3) から, $z = x - xi$ ($-1 \leq x \leq 1$) とおくことができ, このとき複素数 w を,

$$w = \frac{z}{z+2} = 1 - \frac{2}{z+2} = 1 - \frac{2}{x+2-xi} = 1 - \frac{2(x+2+xi)}{(x+2)^2 + x^2}$$

ここで, w の実部を $f(x)$ とおくと, $f(x) = 1 - \frac{2(x+2)}{(x+2)^2 + x^2} = 1 - \frac{x+2}{x^2 + 2x + 2}$

$$f'(x) = -\frac{(x^2 + 2x + 2) - (x+2)(2x+2)}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \frac{x^2 + 4x + 2}{(x^2 + 2x + 2)^2}$$

$-1 \leq x \leq 1$ における $f'(x) = 0$ の解は $x = -2 + \sqrt{2}$ から, $f(x)$ の増減は右表のようになる。すると, $f(x)$ すなわち w の実部の最小値は,

x	-1	⋯	$-2 + \sqrt{2}$	⋯	1
$f'(x)$		—	0	+	0
$f(x)$		↘		↗	

$$f(-2 + \sqrt{2}) = 1 - \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2 + (-2 + \sqrt{2})^2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{4 - 2\sqrt{2}} = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$$

[コメント]

複素数の計算と微分法の融合した標準的な問題です。

2

[北海道大]

 a を正の実数とする。

- (1) a が 1 でないとき、複素数 z についての方程式 $a|z-1| = |(a-2)z+a|$ を考える。

この方程式を満たす z 全体の集合を複素数平面上に図示せよ。

- (2) 方程式 $|z|^2 = 6-a$, $a|z-1| = |(a-2)z+a|$ をともに満たす複素数 z が存在するような a の範囲を求めよ。

2

[北海道大]

- (1)
- $a > 0$
- かつ
- $a \neq 1$
- のとき,
- $a|z-1| = |(a-2)z+a|$
- に対して,

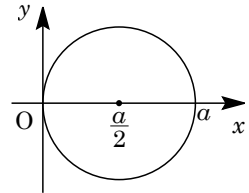
$$a^2|z-1|^2 = |(a-2)z+a|^2$$

共役複素数を用いて, $a^2(z-1)(\bar{z}-1) = \{(a-2)z+a\}\{(a-2)\bar{z}+a\}$ から,

$$a^2(z\bar{z}-z-\bar{z}+1) = (a-2)^2z\bar{z} + a(a-2)z + a(a-2)\bar{z} + a^2$$

まとめると, $4(a-1)z\bar{z} - 2a(a-1)z - 2a(a-1)\bar{z} = 0$ となり, $a \neq 1$ から,

$$z\bar{z} - \frac{1}{2}az - \frac{1}{2}a\bar{z} = 0, \quad \left(z - \frac{a}{2}\right)\left(\bar{z} - \frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4}$$

すると, $\left|z - \frac{a}{2}\right|^2 = \frac{a^2}{4}$ から $\left|z - \frac{a}{2}\right| = \frac{a}{2}$ となり, z 全体の集合は, 中心が点 $\frac{a}{2}$ で半径が $\frac{a}{2}$ の円である。

図示すると, 右図のようになる。

- (2) まず,
- $a > 0$
- のとき,
- $|z|^2 = 6-a$
- ……①を満たす複素数
- z
- は,

$$\bullet \quad 6-a=0 \quad (a=6) \text{ のとき } z=0$$

$$\bullet \quad 6-a>0 \quad (0<a<6) \text{ のとき } z \text{ は中心が原点で半径が } \sqrt{6-a} \text{ の円上の点である。}$$

また, $a > 0$ のとき, $a|z-1| = |(a-2)z+a|$ ……②を満たす複素数 z は,

$$\bullet \quad a \neq 1 \text{ のとき } (1) \text{ から, } z \text{ は中心が点 } \frac{a}{2} \text{ で半径が } \frac{a}{2} \text{ の円上の点である。}$$

$$\bullet \quad a=1 \text{ のとき } |z-1| = |-z+1| \text{ から, } z \text{ は任意の点である。}$$

すると, ①と②をとともに満たす複素数 z が存在するのは,(i) $a=6$ のとき $z=0$ は①と②をとともに満たす。(ii) $a=1$ のとき 中心が原点で半径が $\sqrt{6-a}$ の円上の点は①と②をとともに満たす。(iii) $0 < a < 1, 1 < a < 6$ のとき円①と円②が共有点をもつ条件は, 2つの円の中心間距離が $\frac{a}{2}$ より,

$$\left|\sqrt{6-a} - \frac{a}{2}\right| \leq \frac{a}{2} \leq \sqrt{6-a} + \frac{a}{2} \dots\dots\dots ③$$

③の右側の不等式はつねに成り立ち, 左側の不等式については,

$$\left(\sqrt{6-a} - \frac{a}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2}{4}, \quad 6-a-a\sqrt{6-a} \leq 0, \quad 6-a \leq a\sqrt{6-a}$$

すると, $\sqrt{6-a} \leq a$ となり, $6-a \leq a^2$ から $a^2+a-6 \geq 0, (a+3)(a-2) \geq 0$ $a+3 > 0$ から $a \geq 2$ であり, $1 < a < 6$ と合わせて $2 \leq a < 6$ となる。(i)~(iii)より, 求める a の範囲は, $a=1, 2 \leq a \leq 6$ である。

[コメント]

複素数平面上の円を題材にした問題です。(2)では慎重さが求められます。

3

[千葉大]

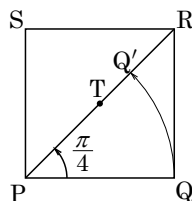
正方形に対して、その 2 本の対角線の交点を、その正方形の中心と呼ぶ。また、すべての内角が 180° 未満の四角形を凸四角形と呼ぶ。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 複素数平面上に正方形 PQRS があり、その中心 T から見て 4 点 P, Q, R, S は反時計回りに並んでいる。頂点 P, Q の座標を表す複素数を p, q とするとき、中心 T の座標を表す複素数 t を p, q を用いて表せ。
- (2) 複素数平面上に凸四角形 ABCD がある。頂点 A, B, C, D の座標を表す複素数はそれぞれ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ とする。四角形 ABCD の外側に線分 AB を 1 辺とする正方形を描きその中心を X とする。同様に、ABCD の外側に線分 BC を 1 辺とする正方形を描きその中心を Y とし、ABCD の外側に線分 CD を 1 辺とする正方形を描きその中心を Z とし、ABCD の外側に線分 DA を 1 辺とする正方形を描きその中心を W とする。このとき、 $XZ = YW$ であり、かつ、直線 XZ と直線 YW が直交することを証明せよ。
- (3) (2)において、線分 XZ と線分 YW がそれらの中点で交わる時、四角形 ABCD はどのような四角形になるか。理由とともに述べよ。

3

[千葉大]

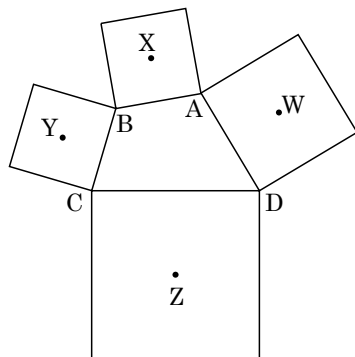
- (1) 複素数平面上で反時計回りに並んでいる 4 点 P, Q, R, S が頂点である正方形 $PQRS$ の中心を T とする。このとき、 $\angle QPT = \frac{\pi}{4}$ 、 $PT = \frac{\sqrt{2}}{2}PQ$ から、中心 $T(t)$ は、点 $Q(q)$ を点 $P(p)$ のまわりに $\frac{\pi}{4}$ だけ回転し、その距離を $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 倍した点より、



$$t - p = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) (q - p) = \frac{1+i}{2} (q - p)$$

すると、 $t = p + \frac{1+i}{2}(q - p) = \frac{1-i}{2}p + \frac{1+i}{2}q$ となる。

- (2) 反時計回りに並んでいる 4 点 $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma), D(\delta)$ が頂点である凸四角形 $ABCD$ について、右図のように、四角形 $ABCD$ の外側に 4 つの正方形を描き、その中心を $X(x), Y(y), Z(z), W(w)$ とおく。



ここで、(1)の結果を利用すると、

$$x = \frac{1-i}{2}\beta + \frac{1+i}{2}\alpha, \quad y = \frac{1-i}{2}\gamma + \frac{1+i}{2}\beta$$

$$z = \frac{1-i}{2}\delta + \frac{1+i}{2}\gamma, \quad w = \frac{1-i}{2}\alpha + \frac{1+i}{2}\delta$$

$$\text{すると、} z - x = \frac{1-i}{2}(\delta - \beta) + \frac{1+i}{2}(\gamma - \alpha), \quad w - y = \frac{1-i}{2}(\alpha - \gamma) + \frac{1+i}{2}(\delta - \beta)$$

$$i(z - x) = \frac{i+1}{2}(\delta - \beta) + \frac{i-1}{2}(\gamma - \alpha) = \frac{1-i}{2}(\alpha - \gamma) + \frac{1+i}{2}(\delta - \beta) = w - y$$

したがって、 $\frac{w-y}{z-x} = i$ から、 $\left| \frac{w-y}{z-x} \right| = 1$ かつ $\arg \frac{w-y}{z-x} = \frac{\pi}{2}$ となり、 $XZ = YW$

かつ直線 XZ と直線 YW は直交する。

なお、4 点 A, B, C, D が時計回りに並んでいるときは、 i を $-i$ に置き換えれば同様に示すことができる。

- (3) 線分 XZ と線分 YW が中点で交わる時、 $\frac{x+z}{2} = \frac{y+w}{2}$ から、

$$\frac{1-i}{2}(\beta + \delta) + \frac{1+i}{2}(\alpha + \gamma) = \frac{1-i}{2}(\gamma + \alpha) + \frac{1+i}{2}(\beta + \delta)$$

すると、 $i(\alpha + \gamma) = i(\beta + \delta)$ となり、 $\alpha + \gamma = \beta + \delta$ から $\alpha - \beta = \delta - \gamma$ なので、

$$BA = CD, \quad BA \parallel CD$$

これより、四角形 $ABCD$ は平行四辺形である。

[コメント]

複素数と図形についての有名問題です。非常に長い問題文に惑わされそうですが。

4

[岡山大]

xy 平面上に点 $O(0, 0)$, $A(4, 0)$ と, 円 $C: x^2 + y^2 = 4$ 上を動く点 $P(a, b)$ があるとする。各点 P に対して, 線分 AP の垂直二等分線を l_P とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 直線 l_P の方程式を求めよ。
- (2) 直線 OP と l_P が平行であるとき, P の座標を求めよ。
- (3) 直線 OP と l_P が交点をもつとき, 交点 Q の軌跡の方程式を求め, さらにその軌跡を図示せよ。

4

[岡山大]

- (1) 点
- $A(4, 0)$
- と円
- $C: x^2 + y^2 = 4$
- 上の点
- $P(a, b)$
- に対し、

線分 AP の垂直二等分線 l_P は、 AP の中点 $(\frac{a+4}{2}, \frac{b}{2})$ を通り、法線ベクトルが $\overrightarrow{AP} = (a-4, b)$ より、その方程式は、 $(a-4)(x - \frac{a+4}{2}) + b(y - \frac{b}{2}) = 0$ から、

$$(a-4)x + by - \frac{a^2 - 16 + b^2}{2} = 0$$

すると、 $a^2 + b^2 = 4$ ……①より、 $l_P: (a-4)x + by + 6 = 0$ ……②

- (2) 直線
- OP
- と
- l_P
- が平行であるとき、
- $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{AP}$
- から
- $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$
- となり、

$$a(a-4) + b^2 = 0, \quad a^2 - 4a + b^2 = 0$$

①より、 $4 - 4a = 0$ から $a = 1$ となり、 $b = \pm\sqrt{4-1} = \pm\sqrt{3}$ これより、 $P(1, \sqrt{3})$ または $P(1, -\sqrt{3})$ となる。

- (3) 直線
- OP
- は法線ベクトルを
- $\vec{n} = (b, -a)$
- とすることができるので、

$$OP: bx - ay = 0 \quad \dots\dots\dots ③$$

さて、直線 OP と l_P の交点 $Q(x, y)$ の軌跡の方程式は、②③より、

$$xa + yb = 4x - 6 \quad \dots\dots\dots ②', \quad -ya + xb = 0 \quad \dots\dots\dots ③'$$

$$②' \times x - ③' \times y \text{ より、} (x^2 + y^2)a = x(4x - 6)$$

$$(x, y) = (0, 0) \text{ は } ②' \text{ を満たさないので、} a = \frac{2x(2x-3)}{x^2 + y^2} \quad \dots\dots\dots ④$$

$$②' \times y + ③' \times x \text{ より、} (y^2 + x^2)b = y(4x - 6) \text{ となり、} b = \frac{2y(2x-3)}{x^2 + y^2} \quad \dots\dots\dots ⑤$$

$$④⑤ \text{ を } ① \text{ に代入し、} \frac{4x^2(2x-3)^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{4y^2(2x-3)^2}{(x^2 + y^2)^2} = 4 \text{ から、}$$

$$\frac{4(x^2 + y^2)(2x-3)^2}{(x^2 + y^2)^2} = 4, \quad (2x-3)^2 = x^2 + y^2 \quad \dots\dots\dots ⑥$$

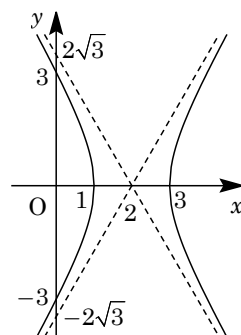
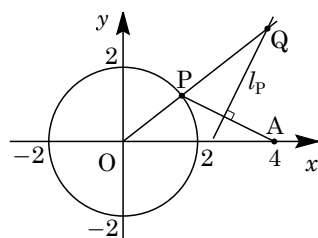
このとき、⑥は $(x, y) \neq (0, 0)$ を満たしている。さらに、⑥を変形すると、 $3x^2 - 12x - y^2 = -9$ から、

$$3(x-2)^2 - y^2 = 3$$

したがって、点 Q の軌跡の方程式は、

$$\text{双曲線: } (x-2)^2 - \frac{y^2}{3} = 1$$

なお、漸近線は $y = \pm\sqrt{3}(x-2)$ であるので、点 Q の軌跡を図示すると、右図の実線のようになる。



[コメント]

軌跡が双曲線になる問題です。(3)では②③をまとめて x, y をそれぞれ a, b で表した後、①式を用いて a, b を消去しても構いません。

5

[大阪大]

座標空間に 3 点 $O(0, 0, 0)$, $A(0, 1, 1)$, $P(x, y, 0)$ がある。 $\angle OAP = 30^\circ$ かつ $y \geq 0$ を満たすように点 P が動くとき, $(x+1)(y+1)$ の最大値と最小値を求めよ。

5

[大阪大]

3点 $O(0, 0, 0)$, $A(0, 1, 1)$, $P(x, y, 0)$ に対して,

$$\overrightarrow{AO} = (0, -1, -1), \quad \overrightarrow{AP} = (x, y-1, -1)$$

すると, $|\overrightarrow{AO}| = \sqrt{2}$, $|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + 1}$, $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AP} = -(y-1) + 1 = -y + 2$

さて, $\angle OAP = 30^\circ$ なので, $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AP} = |\overrightarrow{AO}| |\overrightarrow{AP}| \cos 30^\circ$ から,

$$-y + 2 = \sqrt{2} \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + 1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$-y + 2 \geq 0$ ($y \leq 2$) のもとで, $(-y + 2)^2 = \frac{3}{2} \{x^2 + (y-1)^2 + 1\}$ となり,

$$2(y^2 - 4y + 4) = 3(x^2 + y^2 - 2y + 2), \quad 3x^2 + y^2 + 2y = 2$$

これより, $3x^2 + (y+1)^2 = 3$ から, $x^2 + \frac{(y+1)^2}{3} = 1 \cdots \cdots (*)$

したがって, xy 平面上の点 P の軌跡は, $y \geq 0$ と合わせて, 楕円(*)の $0 \leq y \leq 2$ の部分である。

図示すると, 右図の太実線部となる。

ここで, 中心 $(0, -1)$ で半径 $\sqrt{3}$ の円周上の $y \geq 0$ の部分に点 $Q(\sqrt{3} \cos \theta, \sqrt{3} \sin \theta - 1)$ ($\alpha \leq \theta \leq \pi - \alpha$) をとる。

ただし, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ である。

このとき, 点 Q と y 軸との距離を $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 倍した点が楕円

(*)上の点 P となり, $P(\cos \theta, \sqrt{3} \sin \theta - 1)$ と表すことができる。

すると, $x = \cos \theta$, $y = \sqrt{3} \sin \theta - 1$ ($\alpha \leq \theta \leq \pi - \alpha$) から, $f(\theta) = (x+1)(y+1)$ とおくと, $f(\theta) = \sqrt{3}(\cos \theta + 1) \sin \theta$ となり,

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \sqrt{3} \{(-\sin \theta) \sin \theta + (\cos \theta + 1) \cos \theta\} = \sqrt{3}(-\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \cos \theta) \\ &= \sqrt{3}(2\cos^2 \theta + \cos \theta - 1) \\ &= \sqrt{3}(2\cos \theta - 1)(\cos \theta + 1) \end{aligned}$$

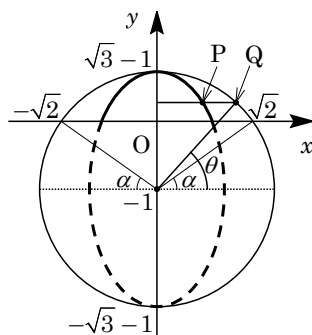
$\alpha \leq \theta \leq \pi - \alpha$ における $f(\theta)$ の増減は,
 $\alpha < \frac{\pi}{3} < \pi - \alpha$ から, 右表のようになる。

θ	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\pi - \alpha$
$f'(\theta)$		+	0	-	
$f(\theta)$		$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	

そして, $f(\alpha) = \sqrt{3}(\cos \alpha + 1) \sin \alpha = \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + 1 \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} + 1$ となり,

$$f(\pi - \alpha) = \sqrt{3}(-\cos \alpha + 1) \sin \alpha = \sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + 1 \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{6}}{3} + 1$$

以上より, $(x+1)(y+1)$ の最大値は $\frac{9}{4}$, 最小値は $-\frac{\sqrt{6}}{3} + 1$ である。



[コメント]

空間ベクトルと2次曲線の融合問題です。後半は楕円のパラメータ表示を利用しましたが、図に示したように、 θ の意味に注意が必要です。

6

[大阪公立大]

xy 平面において 3 点 $O(0, 0)$, $P(1, 0)$, $Q(\cos\alpha, \sin\alpha)$ を考える。ただし α は $0 < \alpha < \pi$ を満たす実数である。また, $f(\theta) = 2\cos\theta - 1$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 点 O と直線 PQ の距離を α の式で表せ。

(2) 次の等式を示せ。 $f(\theta)\cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2} - 2\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta - \alpha}{2}$

(3) 媒介変数 t を用いて, $x = f(t)\cos t$, $y = f(t)\sin t$ ($0 < t < \frac{\pi}{3}$) と表される曲線を C とする。曲線 C と直線 PQ は 1 点のみを共有することを示せ。また, その共有点を R とするとき, $\angle POR$ を α の式で表せ。

6

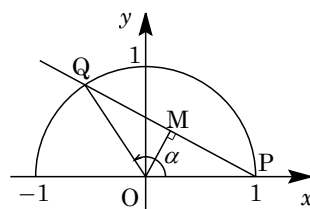
[大阪公立大]

- (1) 3点
- $O(0, 0)$
- ,
- $P(1, 0)$
- ,
- $Q(\cos \alpha, \sin \alpha)$
- (
- $0 < \alpha < \pi$
-)

に対して、線分 PQ の中点を M とすると、線分 OM は $\angle POQ$ の二等分線となる。

これより、 O と直線 PQ の距離 d は、

$$d = OM = OP \cos \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\alpha}{2}$$



- (2)
- $f(\theta) = 2\cos \theta - 1$
- に対して、
- $f(\theta) \cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos \theta \cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)$

$$2\cos \theta \cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(\theta + \theta - \frac{\alpha}{2}\right) + \cos\left(\theta - \theta + \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= \cos\left(2\theta - \frac{\alpha}{2}\right) + \cos \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\alpha}{2} + \cos\left(2\theta - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\cos\left(2\theta - \frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) = -2\sin \frac{2\theta - \frac{\alpha}{2} + \theta - \frac{\alpha}{2}}{2} \sin \frac{2\theta - \frac{\alpha}{2} - \theta + \frac{\alpha}{2}}{2}$$

$$= -2\sin \frac{3\theta - \alpha}{2} \sin \frac{\theta}{2} = -2\sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta - \alpha}{2}$$

したがって、 $f(\theta) \cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos \frac{\alpha}{2} - 2\sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta - \alpha}{2}$ となる。

- (3) 曲線
- $C: x = f(t)\cos t$
- ,
- $y = f(t)\sin t$
- (
- $0 < t < \frac{\pi}{3}$
-) を極方程式で表すと、

$$r = f(\theta) = 2\cos \theta - 1 \quad (0 < \theta < \frac{\pi}{3}) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

直線 PQ を極方程式で表すと、 $r \cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) = d$ から、(1)の結果を用いて、

$$r \cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos \frac{\alpha}{2} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①②を連立すると、 $f(\theta) \cos\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos \frac{\alpha}{2}$ となり、(2)から、

$$\cos \frac{\alpha}{2} - 2\sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta - \alpha}{2} = \cos \frac{\alpha}{2}, \quad \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta - \alpha}{2} = 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

ここで、 $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ から $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{6}$ となるので、 $\sin \frac{\theta}{2} > 0$ である。

また、 $-\frac{\alpha}{2} < \frac{3\theta - \alpha}{2} < \frac{\pi - \alpha}{2}$ ($0 < \alpha < \pi$) から、 $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\alpha}{2} < 0$, $0 < \frac{\pi - \alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ と

なり、③を満たす θ は、 $\frac{3\theta - \alpha}{2} = 0$ より $\theta = \frac{\alpha}{3}$ である。

これより、 θ はただ 1 つ決まり、曲線 C と直線 PQ は 1 点のみを共有する。

そして、その共有点を R とするとき、 $\angle POR = \frac{\alpha}{3}$ である。

[コメント]

極方程式についての標準的な問題です。出題数が少ない分野のためか、(1)と(2)で、(3)への細やかな誘導が付けられています。

7

[金沢大]

実数 $a > 0$ に対し、座標平面上の点 $P(a, 0)$ をとる。曲線 $y = \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} \ (x \geq 0)$ を C とする。点 Q が曲線 C 上を動くとき、 PQ^2 の最小値を与える点 Q の x 座標を $F(a)$ とし、 PQ^2 の最小値を $G(a)$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) $F(a)$ を求めよ。
- (2) $\lim_{a \rightarrow +0} \frac{F(a) - a}{a^2}$ を求めよ。
- (3) $\lim_{a \rightarrow +0} \frac{G(a)}{a^3}$ を求めよ。

7

[金沢大]

- (1) 点 $P(a, 0)$ ($a > 0$) に対し、曲線 $C: y = \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$ ($x \geq 0$) 上

の点 $Q(t, \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}})$ をとると、 $PQ^2 = (t-a)^2 + \frac{1}{9}t^3$ である。

ここで、 $t \geq 0$ において、 $PQ^2 = f(t)$ とおくと、

$$f'(t) = 2(t-a) + \frac{1}{3}t^2 = \frac{1}{3}(t^2 + 6t - 6a)$$

$f'(t) = 0$ とおくと、 $t \geq 0$ から $t = -3 + \sqrt{9+6a}$ となる。

これより、 $f(t)$ の増減は右表のようになり、 $PQ^2 = f(t)$ は $t = -3 + \sqrt{9+6a}$ において最小値をとる。

t	0	...	$-3 + \sqrt{9+6a}$	...
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$		↘		↗

よって、 $F(a) = -3 + \sqrt{9+6a}$ である。

$$(2) \quad \frac{F(a)-a}{a^2} = \frac{-a-3+\sqrt{9+6a}}{a^2} = \frac{(-a-3)^2 - (9+6a)}{a^2(-a-3-\sqrt{9+6a})} = \frac{1}{-a-3-\sqrt{9+6a}}$$

$$\text{これより、} \lim_{a \rightarrow +0} \frac{F(a)-a}{a^2} = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{1}{-a-3-\sqrt{9+6a}} = \frac{1}{-3-\sqrt{9}} = -\frac{1}{6} \dots\dots\dots ①$$

- (3) PQ^2 の最小値を $G(a)$ とおくと、 $G(a) = \{F(a)-a\}^2 + \frac{1}{9}\{F(a)\}^3$ となり、

$$\frac{G(a)}{a^3} = \frac{\{F(a)-a\}^2}{a^3} + \frac{\{F(a)\}^3}{9a^3} = a \cdot \left\{ \frac{F(a)-a}{a^2} \right\}^2 + \frac{1}{9} \left\{ \frac{F(a)}{a} \right\}^3 \dots\dots\dots ②$$

$$\text{ここで、} \frac{F(a)}{a} = \frac{-3+\sqrt{9+6a}}{a} = \frac{(-3)^2 - (9+6a)}{a(-3-\sqrt{9+6a})} = \frac{-6}{-3-\sqrt{9+6a}} \text{ となり、}$$

$$\lim_{a \rightarrow +0} \frac{F(a)}{a} = \frac{-6}{-3-\sqrt{9}} = 1 \dots\dots\dots ③$$

$$\text{①③を②に適用すると、} \lim_{a \rightarrow +0} \frac{G(a)}{a^3} = 0 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{9} \cdot 1^3 = \frac{1}{9} \text{ である。}$$

[コメント]

微分法と関数の極限の融合問題です。(2)を誘導として(3)の結果が導けます。なお、(1)は Q における接線と線分 PQ が直交するという条件を利用する手もあります。

8

[東京大]

(1) $x > 0$ のとき, 不等式 $\log x \leq x - 1$ を示せ。

(2) 次の極限を求めよ。 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_1^2 \log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right) dx$

8

[東京大]

(1) $x > 0$ のとき, $f(x) = x - 1 - \log x$ とおくと,

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

 $f(x)$ の増減は右表のようになり, $f(x) \geq 0$ から,

$$\log x \leq x - 1$$

x	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

(2) (1)より, $x > 0$ のとき, $\log\left(\frac{1+x^n}{2}\right) \leq \frac{1+x^n}{2} - 1 = \frac{x^n - 1}{2}$ となる。ここで, $I_n = n \int_1^2 \log\left(\frac{1+x^n}{2}\right) dx$ とおくと,

$$\begin{aligned} I_n &\leq n \int_1^2 \frac{x^n - 1}{2} dx = \frac{n}{2} \left[\frac{n}{n+1} x^{\frac{n+1}{n}} - x \right]_1^2 = \frac{n}{2} \left\{ \frac{n}{n+1} (2^{\frac{n+1}{n}} - 1) - 1 \right\} \\ &= \frac{n}{2(n+1)} \{ n(2^{1+\frac{1}{n}} - 1) - n - 1 \} = \frac{n}{2(n+1)} (2n \cdot 2^{\frac{1}{n}} - 2n - 1) \\ &= \frac{n}{n+1} \left\{ n(2^{\frac{1}{n}} - 1) - \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

さて, $g(x) = 2^x$ とおくと, $g'(x) = 2^x \log 2$ となり,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g\left(\frac{1}{n}\right) - g(0)}{\frac{1}{n}} = g'(0) = \log 2$$

$$\text{これより, } \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_1^2 \frac{x^n - 1}{2} dx = 1 \cdot \left(\log 2 - \frac{1}{2} \right) = \log 2 - \frac{1}{2} \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また, $x > 0$ のとき, 相加平均と相乗平均の関係から, $\frac{1+x^n}{2} \geq \sqrt{1 \cdot x^n} = x^{\frac{1}{2n}}$

$$\log\left(\frac{1+x^n}{2}\right) \geq \log x^{\frac{1}{2n}} = \frac{1}{2n} \log x$$

$$\text{すると, } I_n \geq n \int_1^2 \frac{1}{2n} \log x dx = \frac{1}{2} [x \log x - x]_1^2 = \log 2 - \frac{1}{2} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①②より, $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \log 2 - \frac{1}{2}$ となる。

[コメント]

定積分と極限についての問題です。(2)では, (1)の流れから①は導けませんが, ②は誘導なしのため難しく, 最初は真数の分子の1をカットしてと考えたのですが……。

9

[東京科学大]

(1) 関数 $f(t) = \frac{t^2 - 1}{t^3}$ ($t \neq 0$) の増減を調べ、グラフの概形をかけ。

(2) 実数 x, y, z が、条件

$$x < y < z, \quad xyz \neq 0, \quad x^3y^2 - x^3 = x^2y^3 - y^3, \quad y^3z^2 - y^3 = y^2z^3 - z^3$$

を満たしながら動くとき、 x が取り得る値の範囲を求めよ。

9

[東京科学大]

(1) $f(t) = \frac{t^2-1}{t^3} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}$ ($t \neq 0$) に対して,

$$f'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{3}{t^4} = -\frac{t^2-3}{t^4}$$

ここで, $f(-t) = -f(t)$ から, $t > 0$ で $f(t)$ の

増減を調べると右表のようになり,

$$\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$$

すると, $s = f(t)$ のグラフは, 原点对称であることに

留意して描くと, 右図のようになる。

(2) $xyz \neq 0$ のもとで, $x^3y^2 - x^3 = x^2y^3 - y^3$ から,

$$x^3(y^2-1) = y^3(x^2-1), \quad \frac{y^2-1}{y^3} = \frac{x^2-1}{x^3} \dots\dots\dots ①$$

また, $y^3z^2 - y^3 = y^2z^3 - z^3$ から, $y^3(z^2-1) = z^3(y^2-1)$ となり,

$$\frac{z^2-1}{z^3} = \frac{y^2-1}{y^3} \dots\dots\dots ②$$

①②より, $\frac{x^2-1}{x^3} = \frac{y^2-1}{y^3} = \frac{z^2-1}{z^3}$ となり, この式の値を k とおくと,

$$f(x) = f(y) = f(z) = k \dots\dots\dots ③$$

ここで, $x < y < z$ から, $s = f(t)$ のグラフと直線 $s = k$ が異なる 3 つの共有点をもつ k の範囲を求めると,

$$-\frac{2}{9}\sqrt{3} < k < 0, \quad 0 < k < \frac{2}{9}\sqrt{3} \dots\dots\dots ④$$

このとき, $s = f(t)$ と $s = \frac{2}{9}\sqrt{3}$ の共有点の t 座標は,

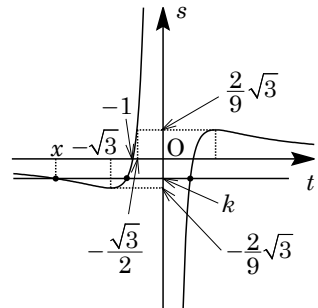
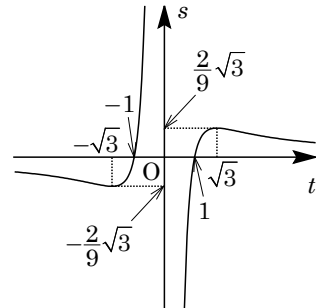
$$\frac{t^2-1}{t^3} = \frac{2}{9}\sqrt{3}, \quad t^3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}(t^2-1) = 0$$

すると, $(t-\sqrt{3})^2(t+\frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$ となり, $t = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}$ である。

以上より, ④のもとで, 共有点のうち t 座標が最小の x が取り得る範囲は,

$$x < -\sqrt{3}, \quad -1 < x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

t	0	...	$\sqrt{3}$	...
$f(t)$	$\times$	+	0	-
$f(t)$	$\times$	$\nearrow$	$\frac{2}{9}\sqrt{3}$	$\searrow$



[コメント]

微分の方程式への応用問題です。見かけに反して, 基本的な内容です。

10

[名古屋大]

以下の問いに答えよ。

- (1) 実数 x を変数とする関数 $f(x)$ が導関数 $f'(x)$ および第 2 次導関数 $f''(x)$ をもち、すべての x に対し $f''(x) > 0$ をみたすとする。さらに以下の極限值 a, b ($a < b$) が存在すると仮定する。

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = b$$

このとき、 $a < c < b$ をみたす任意の実数 c に対し、関数 $g(x) = cx - f(x)$ の値を最大にする $x = x_0$ がただひとつ存在することを示せ。

- (2) 実数 x を変数とする関数 $f(x) = \log\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$ はすべての x に対し $f''(x) > 0$ をみたすことを示せ。また、この f に対し小問(1)の極限值 a, b を求めよ。
- (3) 小問(2)の関数 f および極限值 a, b を考える。 $a < c < b$ をみたす任意の実数 c に対し小問(1)の x_0 および $g(x_0)$ を c を用いて表せ。

10

[名古屋大]

(1) $f(x)$ が $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = b$, $f''(x) > 0$ をみたすとき, $a < c < b$ を

みたす任意の実数 c に対し, $g(x) = cx - f(x)$ とおくと, $g(x)$, $g'(x)$ は連続で,

$$g'(x) = c - f'(x), \quad g''(x) = -f''(x) < 0$$

すると, $g'(x)$ はすべての x に対して単調に減少し,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g'(x) = c - a > 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = c - b < 0$$

これより, $g'(x)$ は $g'(\alpha) = 0$ となる α がただひとつ存在する。

このとき, $g(x)$ は増減が右表のようになり, $x = \alpha$ で
最大値をとる。

x	$\cdots$	α	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

したがって, $x_0 = \alpha$ とおくと, $g(x)$ の値を最大にする
 $x = x_0$ がただひとつ存在することになる。

$$(2) \quad f(x) = \log\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \text{ に対して, } f'(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$f''(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4e^x e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0$$

ここで, $f'(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$ と変形すると,

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$$

$$(3) \quad -1 < c < 1 \text{ において, } g'(x_0) = c - f'(x_0) = 0 \text{ より, } \frac{e^{2x_0} - 1}{e^{2x_0} + 1} = c \text{ となるので,}$$

$$e^{2x_0} - 1 = c(e^{2x_0} + 1), \quad (1 - c)e^{2x_0} = 1 + c, \quad e^{2x_0} = \frac{1 + c}{1 - c}$$

すると, $2x_0 = \log\left(\frac{1 + c}{1 - c}\right)$ から, $x_0 = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1 + c}{1 - c}\right)$ である。

そして, $e^{x_0} = \sqrt{\frac{1 + c}{1 - c}}$ から, $e^{x_0} + e^{-x_0} = \sqrt{\frac{1 + c}{1 - c}} + \sqrt{\frac{1 - c}{1 + c}} = \frac{2}{\sqrt{1 - c}\sqrt{1 + c}}$ となり,

$$f(x_0) = \log\left(\frac{e^{x_0} + e^{-x_0}}{2}\right) = \log\left(\frac{1}{\sqrt{1 - c}\sqrt{1 + c}}\right) = -\frac{1}{2} \log(1 - c)(1 + c) \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} g(x_0) &= cx_0 - f(x_0) = \frac{c}{2} \log\left(\frac{1 + c}{1 - c}\right) + \frac{1}{2} \log(1 - c)(1 + c) \\ &= \frac{c}{2} \log(1 + c) - \frac{c}{2} \log(1 - c) + \frac{1}{2} \log(1 - c) + \frac{1}{2} \log(1 + c) \\ &= \frac{1}{2} (1 + c) \log(1 + c) + \frac{1}{2} (1 - c) \log(1 - c) \end{aligned}$$

[コメント]

微分と増減の問題です。(1)では, グラフを頭の中で描きながら計算を進めます。

11

[信州大]

実数全体を定義域にもつ t の関数 p は微分可能で, すべての t に対し $\frac{dp}{dt} > 0$ を満たすとする。また, p の値域は実数全体であるとする。座標平面上において, 曲線 $C: y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 上を運動する点 P の時刻 t における座標は $(p, \frac{e^p + e^{-p}}{2})$ であり, 点 P の速度 $\vec{u}$ はすべての t に対し $|\vec{u}| = 2$ を満たすとする。座標平面上を運動する点 Q は, 時刻 t において, 曲線 C の点 P における法線の $y > \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ を満たす部分にあり, $PQ = 1$ であるとする。 t が実数全体を動くとき, 以下の問いに答えよ。ただし, e は自然対数の底である。

- (1) 点 Q の座標を p を用いて表せ。
- (2) 点 Q の速度を $\vec{v}$ とするとき, $|\vec{v}|$ のとり得る値の範囲を求めよ。

11

[信州大]

- (1) 曲線 $C: y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 上を運動する点 $P(p, \frac{e^p + e^{-p}}{2})$ に
おける接線の方角ベクトルの成分は、 $y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ より、

$$(1, \frac{e^p - e^{-p}}{2}) = \frac{1}{2}(2, e^p - e^{-p}) \text{ とおくことができる。}$$

これより、法線の方角ベクトルで y 成分が正のものは、
 $(-e^p + e^{-p}, 2)$ とおけるので、 $PQ=1$ から、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OP} + \frac{1}{\sqrt{(-e^p + e^{-p})^2 + 2^2}}(-e^p + e^{-p}, 2) \\ &= (p, \frac{e^p + e^{-p}}{2}) + \frac{1}{e^p + e^{-p}}(-e^p + e^{-p}, 2) \\ &= (p - \frac{e^p - e^{-p}}{e^p + e^{-p}}, \frac{e^p + e^{-p}}{2} + \frac{2}{e^p + e^{-p}}) \\ &= (\frac{(p-1)e^p + (p+1)e^{-p}}{e^p + e^{-p}}, \frac{e^{2p} + e^{-2p} + 6}{2(e^p + e^{-p})}) \end{aligned}$$

したがって、 $Q(\frac{(p-1)e^p + (p+1)e^{-p}}{e^p + e^{-p}}, \frac{e^{2p} + e^{-2p} + 6}{2(e^p + e^{-p})})$ となる。

- (2) $P(x, y)$ とおくと $x = p$, $y = \frac{e^p + e^{-p}}{2}$ であり、点 P の速度 $\vec{u}$ は、

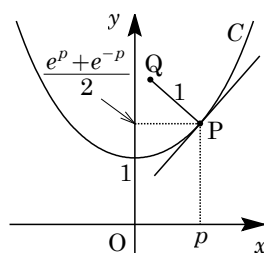
$$\begin{aligned} \vec{u} &= (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}) = (\frac{dx}{dp} \cdot \frac{dp}{dt}, \frac{dy}{dp} \cdot \frac{dp}{dt}) = \frac{dp}{dt} (1, \frac{e^p - e^{-p}}{2}) \\ \frac{dp}{dt} > 0 \text{ から、} |\vec{u}| &= \frac{dp}{dt} \sqrt{1^2 + (\frac{e^p - e^{-p}}{2})^2} = \frac{dp}{dt} \cdot \frac{e^p + e^{-p}}{2} \text{ となり、} |\vec{u}| = 2 \text{ より、} \\ \frac{dp}{dt} \cdot \frac{e^p + e^{-p}}{2} &= 2, \quad \frac{dp}{dt} = \frac{4}{e^p + e^{-p}} \dots\dots\dots (*) \end{aligned}$$

さて、 $Q(X, Y)$ とおくと、(1)から $X = p - \frac{e^p - e^{-p}}{e^p + e^{-p}}$, $Y = \frac{e^p + e^{-p}}{2} + \frac{2}{e^p + e^{-p}}$

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dp} &= 1 - \frac{(e^p + e^{-p})^2 - (e^p - e^{-p})^2}{(e^p + e^{-p})^2} = 1 - \frac{4}{(e^p + e^{-p})^2} = \frac{(e^p - e^{-p})^2}{(e^p + e^{-p})^2} \\ \frac{dY}{dp} &= \frac{e^p - e^{-p}}{2} - \frac{2(e^p - e^{-p})}{(e^p + e^{-p})^2} = \frac{(e^p - e^{-p})\{(e^p + e^{-p})^2 - 4\}}{2(e^p + e^{-p})^2} = \frac{(e^p - e^{-p})^3}{2(e^p + e^{-p})^2} \end{aligned}$$

すると、点 Q の速度 $\vec{v}$ は、(*)より、

$$\begin{aligned} \vec{v} &= (\frac{dX}{dt}, \frac{dY}{dt}) = (\frac{dX}{dp} \cdot \frac{dp}{dt}, \frac{dY}{dp} \cdot \frac{dp}{dt}) = \frac{4}{e^p + e^{-p}} (\frac{dX}{dp}, \frac{dY}{dp}) \\ &= \frac{4}{e^p + e^{-p}} \left(\frac{(e^p - e^{-p})^2}{(e^p + e^{-p})^2}, \frac{(e^p - e^{-p})^3}{2(e^p + e^{-p})^2} \right) = \frac{4(e^p - e^{-p})^2}{(e^p + e^{-p})^3} \left(1, \frac{e^p - e^{-p}}{2} \right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 |\vec{v}| &= \left| \frac{4(e^p - e^{-p})^2}{(e^p + e^{-p})^3} \right| \sqrt{1^2 + \left(\frac{e^p - e^{-p}}{2} \right)^2} = \frac{4(e^p - e^{-p})^2}{(e^p + e^{-p})^3} \cdot \frac{e^p + e^{-p}}{2} \\
 &= \frac{2(e^p - e^{-p})^2}{(e^p + e^{-p})^2} = 2 \left(\frac{e^p - e^{-p}}{e^p + e^{-p}} \right)^2
 \end{aligned}$$

そこで、 $f(p) = \frac{e^p - e^{-p}}{e^p + e^{-p}}$ とおくと、 $|\vec{v}| = 2\{f(p)\}^2$ となり、

$$f'(p) = \frac{(e^p + e^{-p})^2 - (e^p - e^{-p})^2}{(e^p + e^{-p})^4} = \frac{4}{(e^p + e^{-p})^2} > 0$$

これより、 p が実数全体を動くとき、 $f(p)$ は単調に増加し、

$$\lim_{p \rightarrow -\infty} f(p) = \lim_{p \rightarrow -\infty} \frac{e^{2p} - 1}{e^{2p} + 1} = -1, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} f(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-2p}}{1 + e^{-2p}} = 1$$

したがって、 $-1 < f(p) < 1$ から $0 \leq \{f(p)\}^2 < 1$ となり、 $0 \leq |\vec{v}| < 2$ である。

[コメント]

平面上の点の運動についての微分の応用問題です。計算量はかなりありますが、題材が有名な曲線で、途中に同じプロセスが現れてくるようなこともあり、煩雑という感じはしないでしょう。

12

[東京科学大]

関数 $f(x)$ を $x \geq 0$ に対して $f(x) = x \log(1+x)$ と定める。

- (1) 不定積分 $\int x \log(1+x) dx$ を求めよ。
- (2) $y = f(x)$ ($x \geq 0$) の逆関数を $y = g(x)$ ($x \geq 0$) とする。また a, b を $g(a) = 1$, $g(b) = 2$ となる実数とする。このとき定積分 $I = \int_a^b g(x) dx$ の値を求めよ。
- (3) 関数 $P(x)$ を $x \geq 0$ に対して $P(x) = \int_0^x \sqrt{1+f(t)} dt$ と定める。このとき $y = P(x)$ について、定義域を $x \geq 0$ とする逆関数 $y = Q(x)$ が微分可能であることは証明なしに認めてよい。関数 $R(x)$ を $x \geq 0$ に対して、 $R(x) = \int_0^{P(x)} \frac{1}{Q'(v)} dv$ と定めるとき、 $R(x)$ を求めよ。

12

[東京科学大]

(1) $f(x) = x \log(1+x)$ ($x \geq 0$) のとき,

$$\begin{aligned}
 \int f(x) dx &= \int x \log(1+x) dx = \frac{x^2}{2} \log(1+x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x} dx \\
 &= \frac{x^2}{2} \log(1+x) - \frac{1}{2} \int \left(x - 1 + \frac{1}{1+x} \right) dx \\
 &= \frac{x^2}{2} \log(1+x) - \frac{1}{2} \left\{ \frac{x^2}{2} - x + \log(1+x) \right\} + C \\
 &= \frac{x^2-1}{2} \log(1+x) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + C \quad (C \text{ は積分定数})
 \end{aligned}$$

(2) $x = f(t)$ とおくと $t = g(x)$ である。このとき $dx = f'(t)dt$ で、 $g(a) = 1$ から $f(1) = a$, $g(b) = 2$ から $f(2) = b$ となり、 $x = a \rightarrow b$ のとき $t = 1 \rightarrow 2$ なので,

$$\begin{aligned}
 I &= \int_a^b g(x) dx = \int_1^2 g(f(t)) \cdot f'(t) dt = \int_1^2 t f'(t) dt \\
 &= [t f(t)]_1^2 - \int_1^2 f(t) dt = 2f(2) - f(1) - \left[\frac{t^2-1}{2} \log(1+t) - \frac{t^2}{4} + \frac{t}{2} \right]_1^2 \\
 &= 2 \cdot 2 \log 3 - \log 2 - \frac{3}{2} \log 3 + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \log 3 - \log 2 + \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

(3) $P(x) = \int_0^x \sqrt{1+f(t)} dt$ ($x \geq 0$) のとき、 $P'(x) = \sqrt{1+f(x)}$ かつ $P(0) = 0$ $v = P(u)$ とおくと $u = Q(v)$ であり、 $v = P(Q(v))$ から両辺を v で微分すると,

$$1 = P'(Q(v))Q'(v), \quad \frac{1}{Q'(v)} = P'(Q(v)) = P'(u)$$

そして、 $dv = P'(u)du$, $v = 0 \rightarrow P(x)$ のとき $u = 0 \rightarrow x$ より,

$$\begin{aligned}
 R(x) &= \int_0^{P(x)} \frac{1}{Q'(v)} dv = \int_0^x P'(u) \cdot P'(u) du = \int_0^x \{P'(u)\}^2 du \\
 &= \int_0^x \{1+f(u)\} du = [u]_0^x + \left[\frac{u^2-1}{2} \log(1+u) - \frac{u^2}{4} + \frac{u}{2} \right]_0^x \\
 &= x + \frac{x^2-1}{2} \log(1+x) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} = \frac{x^2-1}{2} \log(1+x) - \frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x
 \end{aligned}$$

[コメント]

逆関数を題材にした定積分の問題です。(2)はときどき見かける問題ですが、(3)は初見でした。

13

[神戸大]

連続関数 $f(x)$ は $x \geq 0$ で $f(x) \geq 0$ を満たし、 $x > 0$ で微分可能であり、その導関数 $f'(x)$ は連続であるとする。 $t \geq 1$ を満たす t に対して、原点 O と点 $P(t, f(t))$ の距離を $g(t)$ とする。また、 $t > 1$ を満たす t に対して、 $y = f(x)$ ($1 \leq x \leq t$) で表される曲線の長さを $h(t)$ とし、 $t = 1$ のときは $h(1) = 0$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $t > 1$ とする。开区間 $(1, t)$ で常に $f(x) - xf'(x) = 0$ が成り立つならば、閉区間 $[1, t]$ で $\frac{f(x)}{x}$ は定数であることを示せ。
- (2) $t \geq 1$ を満たす任意の t に対して、 $g(t) = h(t) + 2$ が成り立つとする。このとき、 $f(1)$ の値を求めよ。また、 $t \geq 1$ のとき $f(t)$ を t を用いて表せ。

13

[神戸大]

- (1) $t > 1$ のとき、开区間 $(1, t)$ で $f(x) - xf'(x) = 0$ が成り立つならば、

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 0$$

$f(x)$ は $x \geq 0$ で連続なので、閉区間 $[1, t]$ で $\frac{f(x)}{x}$ は定数である。

- (2) 原点 O と点 $P(t, f(t))$ の距離を $g(t)$ とすると、 $g(t) = \sqrt{t^2 + \{f(t)\}^2}$ ……①

$t > 1$ のとき $y = f(x)$ ($1 \leq x \leq t$) で表される曲線の長さを $h(t)$ とし、また $t = 1$

のとき $h(1) = 0$ とすると、 $t \geq 1$ において、 $h(t) = \int_1^t \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$ ……②

ここで、 $t \geq 1$ において $g(t) = h(t) + 2$ より、①②から、

$$\sqrt{t^2 + \{f(t)\}^2} = \int_1^t \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx + 2 \dots\dots\dots ③$$

③に $t = 1$ を代入すると、 $\sqrt{1 + \{f(1)\}^2} = 2$ から $1 + \{f(1)\}^2 = 4$ となり、 $f(x) \geq 0$ より $f(1) = \sqrt{3}$ である。

また、③の両辺を t で微分すると、 $\frac{2t + 2f(t)f'(t)}{2\sqrt{t^2 + \{f(t)\}^2}} = \sqrt{1 + \{f'(t)\}^2}$ から、

$$t + f(t)f'(t) = \sqrt{1 + \{f'(t)\}^2} \sqrt{t^2 + \{f(t)\}^2}$$

両辺 2 乗して、 $\{t + f(t)f'(t)\}^2 = [1 + \{f'(t)\}^2][t^2 + \{f(t)\}^2]$ から、

$$2tf(t)f'(t) = \{f(t)\}^2 + t^2\{f'(t)\}^2, \quad \{tf'(t) - f(t)\}^2 = 0$$

すると、 $tf'(t) - f(t) = 0$ から、(1)の結果を用いると、 k を定数として、

$$\frac{f(t)}{t} = k, \quad f(t) = kt$$

そして、 $f(1) = \sqrt{3}$ から $k = \sqrt{3}$ となり、 $f(t) = \sqrt{3}t$ である。

[コメント]

誘導の丁寧な関数方程式を解く問題です。(2)の最後で、(1)との関連が見えてきます。

14

[大阪大]

次の問いに答えよ。

- (1) $t > 0$ のとき, $-\frac{1}{t} < \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2} dx < \frac{1}{t}$ が成り立つことを示せ。
- (2) $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{2t} \frac{\cos x}{x} dx = 0$ を示せ。
- (3) $f(x) = \sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ とおく。 $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{f(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{\cos x}{x} dx$ を示せ。

14

[大阪大]

- (1) $-\frac{1}{x^2} \leq \frac{\sin x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ から, $t > 0$ のとき, 各辺を t から $2t$ まで積分すると,

$$-\int_t^{2t} \frac{1}{x^2} dx \leq \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2} dx \leq \int_t^{2t} \frac{1}{x^2} dx$$

ここで, $\int_t^{2t} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_t^{2t} = -\frac{1}{2t} + \frac{1}{t} = \frac{1}{2t} < \frac{1}{t}$ より, $-\frac{1}{t} < \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2} dx < \frac{1}{t}$

- (2) (1)より, $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2} dx = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$ となり,

$$\int_t^{2t} \frac{\cos x}{x} dx = \left[\frac{\sin x}{x}\right]_t^{2t} + \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2} dx = \frac{\sin 2t}{2t} - \frac{\sin t}{t} + \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2} dx$$

ここで, $t > 0$ のとき, $-\frac{1}{2t} \leq \frac{\sin 2t}{2t} \leq \frac{1}{2t}$, $-\frac{1}{t} \leq \frac{\sin t}{t} \leq \frac{1}{t}$ より,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin 2t}{2t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin t}{t} = 0$$

したがって, $\textcircled{1}$ と合わせ, $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{2t} \frac{\cos x}{x} dx = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$

- (3) $f(x) = \sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{2}(\cos 2x - \cos x) = \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x$ から,

$$\int_1^t \frac{f(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \int_1^t \frac{\cos x}{x} dx - \frac{1}{2} \int_1^t \frac{\cos 2x}{x} dx \cdots \cdots \textcircled{3}$$

ここで, $u = 2x$ とおくと, $du = 2dx$ で, $x = 1 \rightarrow t$ のとき $u = 2 \rightarrow 2t$ から,

$$\int_1^t \frac{\cos 2x}{x} dx = \int_2^{2t} \frac{\cos u}{u} \cdot \frac{1}{2} du = \int_2^{2t} \frac{\cos u}{u} du = \int_2^{2t} \frac{\cos x}{x} dx$$

$\textcircled{3}$ に代入して,

$$\begin{aligned} \int_1^t \frac{f(x)}{x} dx &= \frac{1}{2} \int_1^t \frac{\cos x}{x} dx - \frac{1}{2} \int_2^{2t} \frac{\cos x}{x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{\cos x}{x} dx + \frac{1}{2} \int_2^t \frac{\cos x}{x} dx - \frac{1}{2} \int_2^{2t} \frac{\cos x}{x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{\cos x}{x} dx - \frac{1}{2} \int_t^2 \frac{\cos x}{x} dx - \frac{1}{2} \int_2^{2t} \frac{\cos x}{x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{\cos x}{x} dx - \frac{1}{2} \int_t^{2t} \frac{\cos x}{x} dx \end{aligned}$$

すると, $\textcircled{2}$ から, $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{f(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{\cos x}{x} dx$ となる。

[コメント]

定積分と極限の融合問題で, 阪大で頻出のタイプです。(1)→(2), (2)→(3)という誘導が丁寧につけられています。

15

[名古屋大]

以下の問いに答えよ。

- (1) 実数 r, α は $0 < r \leq 1, 0 \leq \alpha < \pi$ をみたすとする。 xy 平面内で、点 $(1, 0)$ を中心にもつ半径 r の円周およびその内部を C とする。 C を原点 $(0, 0)$ を中心に反時計まわりに角度 α だけ回転させるとき、 C が通過する領域の面積を求めよ。
- (2) 実数 R, α は $0 < R \leq 1, 0 \leq \alpha < \pi$ をみたすとする。 xyz 空間内で、点 $(1, 0, 0)$ を中心にもつ半径 R の球面およびその内部を B とする。 B を z 軸のまわりに角度 α だけ回転させるとき、 B が通過する領域の体積を求めよ。ただし、回転の向きは回転後の B の中心が $(\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$ になるように選ぶものとする。

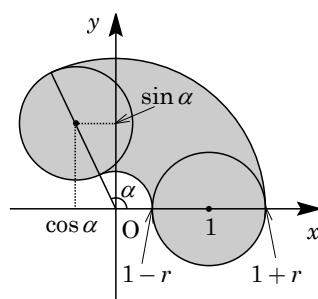
15

[名古屋大]

- (1) $0 < r \leq 1$, $0 \leq \alpha < \pi$ のとき, $C: (x-1)^2 + y^2 \leq r^2$

を原点中心に反時計まわりに角度 α だけ回転させるとき,
 C が通過する領域は右図の網点部となり, その面積を S
 とおくと,

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot \frac{1}{2} \pi r^2 + \frac{1}{2} (1+r)^2 \alpha - \frac{1}{2} (1-r)^2 \alpha \\ &= \pi r^2 + \frac{1}{2} \cdot 4r\alpha = \pi r^2 + 2r\alpha \cdots \cdots (*) \end{aligned}$$



- (2) $0 < R \leq 1$, $0 \leq \alpha < \pi$ のとき, $B: (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ を, $-R \leq k \leq R$ として平面 $z=k$ で切断したとき, この平面上での切り口は,

$$(x-1)^2 + y^2 \leq R^2 - k^2, \quad z = k$$

すなわち, 点 $(1, 0, k)$ を中心にもつ半径 $\sqrt{R^2 - k^2}$ の円周およびその内部である。

そして, B を z 軸のまわりに角度 α だけ回転させるとき, 平面 $z=k$ 上で B が通過する領域の面積 $S(k)$ は, $(*)$ の r を $\sqrt{R^2 - k^2}$ に置き換えて,

$$S(k) = \pi (\sqrt{R^2 - k^2})^2 + 2\sqrt{R^2 - k^2} \alpha = \pi (R^2 - k^2) + 2\sqrt{R^2 - k^2} \alpha$$

これより, B が通過する領域の体積 V は, $z=0$ に関する対称性に注意すると,

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^R S(k) dk = 2 \int_0^R \{ \pi (R^2 - k^2) + 2\sqrt{R^2 - k^2} \alpha \} dk \\ &= 2\pi \int_0^R (R^2 - k^2) dk + 4\alpha \int_0^R \sqrt{R^2 - k^2} dk \\ &= 2\pi \left[R^2 k - \frac{k^3}{3} \right]_0^R + 4\alpha \cdot \frac{1}{4} \pi R^2 = \frac{4}{3} \pi R^3 + \pi R^2 \alpha \end{aligned}$$

[コメント]

立体の体積を求める問題です。(1)の結果を利用すると, (2)の結論はスムーズに求められます。

16

[東京大]

座標平面上の点 $A(0, 0)$, $B(0, 1)$, $C(1, 1)$, $D(1, 0)$ を考える。実数 $0 < t < 1$ に対して、線分 AB , BC , CD を $t:(1-t)$ に内分する点をそれぞれ P_t , Q_t , R_t とし、線分 P_tQ_t , Q_tR_t を $t:(1-t)$ に内分する点をそれぞれ S_t , T_t とする。さらに、線分 S_tT_t を $t:(1-t)$ に内分する点を U_t とする。また、点 A を U_0 , 点 D を U_1 とする。

- (1) 点 U_t の座標を求めよ。
- (2) t が $0 \leq t \leq 1$ の範囲を動くときに点 U_t が描く曲線と、線分 AD で囲まれた部分の面積を求めよ。
- (3) a を $0 < a < 1$ を満たす実数とする。 t が $0 \leq t \leq a$ の範囲を動くときに点 U_t が描く曲線の長さを、 a の多項式の形で求めよ。

16

[東京大]

- (1) $A(0, 0)$, $B(0, 1)$, $C(1, 1)$, $D(1, 0)$ に対し, 線分 AB , BC , CD を $t:(1-t)$ に内分する点を P_t , Q_t , R_t とすると,

$$\overrightarrow{OP_t} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} = (0, t)$$

$$\overrightarrow{OQ_t} = (1-t)\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC} = (t, 1)$$

$$\overrightarrow{OR_t} = (1-t)\overrightarrow{OC} + t\overrightarrow{OD} = (1, 1-t)$$

- さらに, 線分 P_tQ_t , Q_tR_t を $t:(1-t)$ に内分する点を S_t , T_t , 線分 S_tT_t を $t:(1-t)$ に内分する点を U_t とすると,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OU_t} &= (1-t)\overrightarrow{OS_t} + t\overrightarrow{OT_t} = (1-t)\{(1-t)\overrightarrow{OP_t} + t\overrightarrow{OQ_t}\} + t\{(1-t)\overrightarrow{OQ_t} + t\overrightarrow{OR_t}\} \\ &= (1-t)^2\overrightarrow{OP_t} + 2t(1-t)\overrightarrow{OQ_t} + t^2\overrightarrow{OR_t} \\ &= (1-t)^2(0, t) + 2t(1-t)(t, 1) + t^2(1, 1-t) \\ &= (2t^2 - 2t^3 + t^2, t - 2t^2 + t^3 + 2t - 2t^2 + t^2 - t^3) \\ &= (-2t^3 + 3t^2, -3t^2 + 3t)\end{aligned}$$

これより, $U_t(-2t^3 + 3t^2, -3t^2 + 3t)$ となる。

- (2) $U_t(x, y)$ とおくと, $x = -2t^3 + 3t^2$, $y = -3t^2 + 3t$ となり, この式は $t = 0, 1$ でも成り立ち, $0 \leq t \leq 1$ において,

$$\frac{dx}{dt} = -6t^2 + 6t = -6t(t-1)$$

$$\frac{dy}{dt} = -6t + 3 = -3(2t-1)$$

これより, 点 U_t の軌跡と線分 AD で囲まれた部分の面積 S は, $S = \int_0^1 y dx$ と表せ,

$$S = \int_0^1 (-3t^2 + 3t)(-6t^2 + 6t) dt$$

$$= 18 \int_0^1 (t^4 - 2t^3 + t^2) dt$$

$$= 18 \left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{2} + \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = 18 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{3}{5}$$

- (3) $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 36t^2(t-1)^2 + 9(2t-1)^2 = 9(4t^4 - 8t^3 + 8t^2 - 4t + 1)$
 $= 9(2t^2 - 2t + 1)^2$

すると, $0 < a < 1$ のとき, $0 \leq t \leq a$ における点 U_t の軌跡の長さ L は,

$$L = \int_0^a \sqrt{9(2t^2 - 2t + 1)^2} dt = 3 \int_0^a |2t^2 - 2t + 1| dt$$

ここで, $2t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2 + t^2 > 0$ から,

t	0	...	$\frac{1}{2}$	...	1
$\frac{dx}{dt}$	0	+		+	0
x	0	↗	$\frac{1}{2}$	↗	1
$\frac{dy}{dt}$		+	0	-	
y	0	↗	$\frac{3}{4}$	↘	0

$$L = 3 \int_0^a (2t^2 - 2t + 1) dt = 3 \left[\frac{2}{3}t^3 - t^2 + t \right]_0^a = 2a^3 - 3a^2 + 3a$$

[コメント]

パラメータ曲線と面積についての基本題です。(3)の被積分関数は平方根が外れるはずと思って計算をしています。

17

[信州大]

$0 \leq x \leq 2\pi$ において、2 曲線 $y = |\sin x|$, $y = -\cos 2x$ によって囲まれた図形の面積を求めよ。また、この図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

17

[信州大]

$f(x) = |\sin x|$, $g(x) = -\cos 2x$ とおくと,

$$f(x + \pi) = |\sin(x + \pi)| = |-\sin x| = f(x)$$

$$f(2\pi - x) = |\sin(2\pi - x)| = |\sin(-x)| = |-\sin x| = f(x)$$

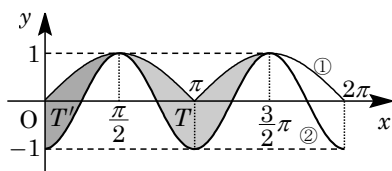
$$g(x + \pi) = -\cos 2(x + \pi) = -\cos 2x = g(x)$$

$$g(2\pi - x) = -\cos 2(2\pi - x) = -\cos(-2x) = -\cos 2x = g(x)$$

これより, 2 曲線 $y = f(x) = |\sin x| \cdots \cdots \textcircled{1}$, $y = g(x) = -\cos 2x \cdots \cdots \textcircled{2}$ は, ともに周期が π で, そのグラフは直線 $x = \pi$ について対称である。

さて, $0 \leq x \leq 2\pi$ において, 2 曲線 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ によって囲まれた図形 T は, 右図の薄い網点部である。

図形 T は直線 $x = \pi$ について対称で, しかも $\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$ の部分は $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ と同じ形である。



これより, 図形 T の面積 S は, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において 2 曲線 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ にはさまれた図形 T' の面積の 2 倍になり,

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(x) - g(x)\} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos 2x) dx = \left[-\cos x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -(-1) = 1 \end{aligned}$$

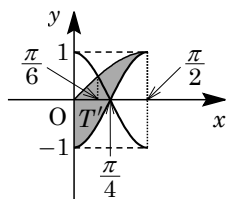
したがって, $S = 2$ である。

また, 図形 T を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 V は, 図形 T' を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積の 2 倍になる。

そこで, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において, 曲線 $\textcircled{2}$ を x 軸について折り返した $y = \cos 2x$ と $y = \sin x \cdots \cdots \textcircled{1}$ を連立すると, $\cos 2x = \sin x$ から $1 - 2\sin^2 x = \sin x$ となり,

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0, \quad (2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$$

すると, $\sin x = \frac{1}{2}$ から $x = \frac{\pi}{6}$ となるので,



$$\begin{aligned} \frac{V}{2} &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} \{-g(x)\}^2 dx + \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \{f(x)\}^2 dx - \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \{g(x)\}^2 dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 2x dx + \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx - \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2x dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 + \cos 4x}{2} dx + \pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx - \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 4x}{2} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \left[x + \frac{1}{4} \sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2} \left[x + \frac{1}{4} \sin 4x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

値を代入してまとめると、

$$\frac{V}{2} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{8} \sqrt{3} \right)$$

したがって、 $V = \pi \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{8} \sqrt{3} \right)$ である。

[コメント]

面積と回転体の体積計算の問題です。三角関数のもつ周期性や対称性に着目することがポイントです。

18

〔熊本大〕

xyz 空間において、5 点 $A(3, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, -3, 0)$, $D(3, 0, 3)$, $P(0, 0, 1)$ をとる。点 P を通り x 軸に平行な直線を l とする。四面体 $ABCD$ を l のまわりに 1 回転させるとき、この四面体が通過する部分の体積 V を求めよ。ただし、四面体は内部も含むものとする。

18

[熊本大]

xyz 空間で、 $A(3, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, -3, 0)$, $D(3, 0, 3)$ を頂点とする四面体 $ABCD$ に対して、平面 $x=t$ ($0 \leq t \leq 3$) における断面を調べる。

まず、線分 BA は、 $0 \leq u \leq 1$ として、

$$(x, y, z) = (0, 3, 0) + u(3, -3, 0)$$

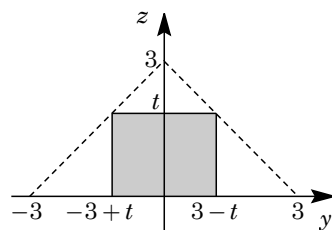
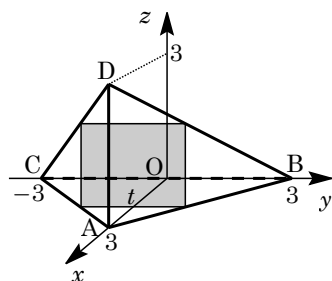
$x=t$ との交点は、 $3u=t$ から $(t, 3-t, 0)$ となる。

また、線分 BD は、 $0 \leq v \leq 1$ として、

$$(x, y, z) = (0, 3, 0) + v(3, -3, 3)$$

$x=t$ との交点は、 $3v=t$ から $(t, 3-t, t)$ となる。

ここで、 xz 平面についての対称性を利用すると、四面体 $ABCD$ を平面 $x=t$ ($0 \leq t \leq 3$) で切断したときの断面は、右図の網点部の長方形となる。



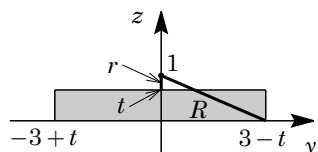
さて、点 $P(0, 0, 1)$ を通り x 軸に平行な直線 l と平面 $x=t$ の交点は $Q(t, 0, 1)$ となる。そこで、四面体 $ABCD$ を l のまわりに 1 回転させると、平面 $x=t$ 上では点 Q のまわりに長方形の断面を 1 回転させることが対応し、その図形の面積 $S(t)$ は、

(i) $0 \leq t \leq 1$ のとき

断面を 1 回転させてできる図形はドーナツ形で、外径

$$R = \sqrt{(3-t)^2 + 1^2} = \sqrt{t^2 - 6t + 10}, \text{ 内径 } r = 1-t \text{ より,}$$

$$S(t) = \pi(t^2 - 6t + 10) - \pi(1-t)^2 = \pi(-4t + 9)$$

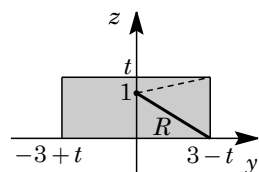


(ii) $1 \leq t \leq 2$ のとき

断面を 1 回転させてできる図形は円板で、外径

$$R = \sqrt{(3-t)^2 + 1^2} = \sqrt{t^2 - 6t + 10} \text{ より,}$$

$$S(t) = \pi(t^2 - 6t + 10)$$

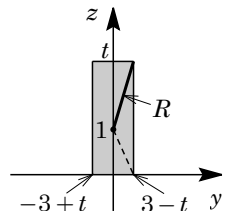


(iii) $2 \leq t \leq 3$ のとき

断面を 1 回転させてできる図形は円板で、外径

$$R = \sqrt{(3-t)^2 + (t-1)^2} = \sqrt{2t^2 - 8t + 10} \text{ より,}$$

$$S(t) = \pi(2t^2 - 8t + 10)$$



(i)~(iii)より、求める四面体 $ABCD$ が通過する部分の体積 V は、

$$\begin{aligned} V &= \int_0^3 S(t) dt = \int_0^1 S(t) dt + \int_1^2 S(t) dt + \int_2^3 S(t) dt \\ &= \pi \int_0^1 (-4t + 9) dt + \pi \int_1^2 (t^2 - 6t + 10) dt + \pi \int_2^3 (2t^2 - 8t + 10) dt \\ &= \pi \left[-2t^2 + 9t \right]_0^1 + \pi \left[\frac{t^3}{3} - 3t^2 + 10t \right]_1^2 + \pi \left[\frac{2t^3}{3} - 4t^2 + 10t \right]_2^3 \end{aligned}$$

値を代入してまとめると,

$$V = \pi(-2+9) + \pi\left(\frac{7}{3}-9+10\right) + \pi\left(\frac{38}{3}-20+10\right) = 13\pi$$

[コメント]

四面体を回転させてできる立体の体積を求める問題です。誘導のないので、まず四面体と回転軸との位置関係を把握するところから始める必要があります。