1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［金沢大・文］

放物線 $y=-x^2+2x$ を H_1，また放物線 $y=x^2$ を H_2 で表す。H_1 上の点 $\mathrm{P}(a,\ -a^2+2a)$ における H_1 の接線を l とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　接線 l の方程式を求めよ。また，a の値に関係なく，l は H_2 と異なる 2 点で交わることを示せ。

(2)　接線 l と放物線 H_2 の異なる 2 つの交点を結ぶ線分の中点を Q とする。点 P が H_1 上を動くとき，点 Q の軌跡 C の方程式を求めよ。

(3)　(2)の軌跡 C と放物線 H_1 および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

2　　［一橋大］

a, b を正の定数とする。関数 $y=x^3-ax$ のグラフと，点 $(0,\ 2b^3)$ を通る直線はちょうど 2 点 P, Q を共有している。ただし，P の x 座標は負，Q の x 座標は正である。

(1)　直線 PQ の方程式を a と b で表せ。

(2)　P および Q の座標を a と b で表せ。

(3)　$\angle \mathrm{POQ}=90^\circ$ となる b が存在するような a の値の範囲を求めよ。ただし，O は原点である。

3　　[名古屋大・文]

$0 \leqq k \leqq 1$ を満たす実数 k に対して，xy 平面上に次の連立不等式で表される 3 つの領域 D, E, F を考える。

D は連立不等式 $y \geqq x^2$，$y \leqq kx$ で表される領域

E は連立不等式 $y \leqq x^2$，$y \geqq kx$ で表される領域

F は連立不等式 $y \leqq -x^2+2x$，$y \geqq kx$ で表される領域

(1)　領域 $D \cup (E \cap F)$ の面積 $m(k)$ を求めよ。

(2)　(1)で求めた面積 $m(k)$ を最小にする k の値と，その最小値を求めよ。

4 ［九州大・文］

$f(x)=(x^2-2)(x^2-4x+2)$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $f(x)=0$ の実数解 x をすべて求め，小さい順に並べよ。

(2) 不等式 $f(n)\leqq 0$ を満たす整数 n をすべて求めよ。

(3) 不等式 $f(n)\leqq 1$ を満たす整数 n をすべて求めよ。

5　　［名古屋大・理］

(1)　関数 $f(x)=2x^3-3x^2+1$ のグラフをかけ。

(2)　方程式 $f(x)=a$ （a は実数）が相異なる 3 つの実数解 $\alpha<\beta<\gamma$ をもつとする。$l=\gamma-\alpha$ を β のみを用いて表せ。

(3)　a が(2)の条件のもとで変化するとき l の動く範囲を求めよ。

$\boxed{6}$ ［広島大・文］

p を正の定数とし，放物線 $C : y=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ における C の接線を l とする。

(1) 点 $\mathrm{Q}(p,\ 0)$ を通り，l に直交する直線 m の方程式を求めよ。

(2) 放物線 C と直線 m の 2 つの交点の x 座標を $\alpha,\ \beta$ $(\alpha<\beta)$ とすれば，$\alpha<0<\beta<p$ であることを示せ。

(3) 放物線 C と直線 m で囲まれた図形のうち $x\geqq 0$ の範囲にある部分の面積を S_1，放物線 C と直線 m および直線 $x=p$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする。このとき，$S_2-S_1=\dfrac{1}{6}p^3$ であることを示せ。

7　　［大阪大・文］

xy 平面において，放物線 $y=x^2$ を C とする。また，実数 k を与えたとき，$y=x+k$ で定まる直線を l とする。

(1)　$-2<x<2$ の範囲で C と l が 2 点で交わるとき, k の満たす条件を求めよ。

(2)　k が(1)の条件を満たすとき，C と l および 2 直線 $x=-2$，$x=2$ で囲まれた 3 つの部分の面積の和 S を k の式で表せ。

8　　［東北大・文］

a を実数とし，$f(x)=x^3+(2a-4)x^2+(a^2-4a+4)x$ とおく。方程式 $f(x)=0$ が 2 つの異なる実数解をもつとき，以下の問いに答えよ。

(1)　a の値の範囲を求めよ。

(2)　関数 $y=f(x)$ の極値を求めよ。

(3)　a が(1)で求めた範囲を動くとき，$y=f(x)$ の極大値を与える x について，点 $(x,\ f(x))$ が xy 平面上に描く図形を図示せよ。

9　　［大阪大・文］

実数 a, b を係数に含む 3 次式 $P(x)=x^3+3ax^2+3ax+b$ を考える。$P(x)$ の複素数の範囲における因数分解を

$$P(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

とする。α，β，γ の間に $\alpha+\gamma=2\beta$ という関係があるとき，以下の問いに答えよ。

(1)　b を a の式で表せ。

(2)　α，β，γ がすべて実数であるとする。このとき a のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　(1)で求めた a の式を $f(a)$ とする。a が(2)の範囲を動くとき，関数 $b=f(a)$ のグラフをかけ。

10　　　　［京都大・文］

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，方程式 $2\sqrt{2}(\sin^3 x + \cos^3 x) + 3\sin x\cos x = 0$ を満たす x の個数を求めよ。

11　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［九州大・文］

放物線 $C: y=x^2$ 上の点 P における法線とは，点 P における C の接線と点 P で垂直に交わる直線である。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 $(p,\ p^2)$ における C の法線の方程式を求めよ。

(2)　y 軸上の点 $(0,\ a)$ を通る C の法線の本数を求めよ。

12　　［金沢大・文］

実数 a に対して，関数 $f(x)$，$g(x)$ を

$$f(x)=-(a+1)x-1,\quad g(x)=2x+\frac{a}{3}$$

とし，$m(a)=\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$m(a)>0$ を満たす a の値の範囲を求めよ。

(2)　(1)で求めた a の値の範囲において，関数 $h(x)=g(x)-m(a)f(x)$ を考える。このとき，$\int_0^1 f(x)h(x)\,dx=0$ となる a の値を求めよ。

13　　［京都大・文］

整式 $f(x)$ と実数 C が

$$\int_0^x f(y)\,dy + \int_0^1 (x+y)^2 f(y)\,dy = x^2 + C$$

を満たすとき，この $f(x)$ と C を求めよ。

14　　［東京大・文］

2 次以下の整式 $f(x)=ax^2+bx+c$ に対し，$S=\int_0^2 |f'(x)|dx$ を考える。

(1)　$f(0)=0$，$f(2)=2$ のとき S を a の関数として表せ。

(2)　$f(0)=0$，$f(2)=2$ を満たしながら f が変化するとき, S の最小値を求めよ。

15　　［千葉大・文］

a と k を正の実数とする。$y=\frac{a}{2}x^2$ のグラフを平行移動して得られる放物線 C_1 と $y=-\frac{2}{a}x^2$ のグラフを平行移動して得られる放物線 C_2 が，ともに原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ で直線 $y=kx$ に接するものとする。原点 O を通り，直線 $y=kx$ に垂直な直線を l とする。放物線 C_1 と直線 l によって囲まれる図形の面積を S_1，放物線 C_2 と直線 l によって囲まれる図形の面積を S_2 とおき，$S=S_1+S_2$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　S を a と k を用いて表せ。

(2)　$k=\sqrt{2}-1$ とする。S を最小にする a の値と，そのときの S の値を求めよ。

16　　[神戸大・理]

$f(x)=x^3-3x+1$，$g(x)=x^2-2$ とし，方程式 $f(x)=0$ について考える。このとき，以下のことを示せ。

(1)　$f(x)=0$ は絶対値が 2 より小さい 3 つの相異なる実数解をもつ。

(2)　α が $f(x)=0$ の解ならば，$g(\alpha)$ も $f(x)=0$ の解となる。

(3)　$f(x)=0$ の解を小さい順に α_1，α_2，α_3 とすれば，

$$g(\alpha_1)=\alpha_3,\ g(\alpha_2)=\alpha_1,\ g(\alpha_3)=\alpha_2$$

となる。

17　　［筑波大・理］

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2$ とおく。ただし $a>0$ とする。

(1)　$f(-1)\leqq f(3)$ となる a の範囲を求めよ。

(2)　$f(x)$ の極小値が $f(-1)$ 以下になる a の範囲を求めよ。

(3)　$-1\leqq x\leqq 3$ における $f(x)$ の最小値を a を用いて表せ。

18　　［一橋大］

a を実数とする。傾きが m である 2 つの直線が，曲線 $y=x^3-3ax^2$ とそれぞれ点 A，点 B で接している。

(1) 線分 AB の中点を C とすると，C は曲線 $y=x^3-3ax^2$ 上にあることを示せ。

(2) 直線 AB の方程式が $y=-x-1$ であるとき，a，m の値を求めよ。

19　　　　[広島大・文]

k は定数で，$k>0$ とする。曲線 $C : y=kx^2\ (x \geqq 0)$ と 2 つの直線 $l : y=kx+\dfrac{1}{k}$，$m : y=-kx+\dfrac{1}{k}$ との交点の x 座標をそれぞれ α，$\beta\ (0<\beta<\alpha)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\alpha-\beta$ の値を求めよ。

(2)　$\alpha\beta$，$\alpha^2+\beta^2$ および $\alpha^3-\beta^3$ を k を用いて表せ。

(3)　曲線 C と 2 直線 l，m とで囲まれた部分の面積を最小にする k の値を求めよ。また，そのときの面積を求めよ。

20　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［大阪大・文］

曲線 $C : y=-x^2-1$ を考える。

(1)　t が実数全体を動くとき，曲線 C 上の点 $(t,\ -t^2-1)$ を頂点とする放物線

$$y=\frac{3}{4}(x-t)^2-t^2-1$$

が通過する領域を xy 平面上に図示せよ。

(2)　D を(1)で求めた領域の境界とする。D が x 軸の正の部分と交わる点を $(a,\ 0)$ とし，$x=a$ での C の接線を l とする。D と l で囲まれた部分の面積を求めよ。

21　　［名古屋大・文］

関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x \geqq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

により定める。

(1)　a, b は実数とする。$y=ax+b$ のグラフと $y=f(x)$ のグラフがちょうど 2 つの交点をもつための a, b に対する条件を求めよ。

(2)　p, q は実数で $p>0$ とする。$y=x^3+6px^2+9p^2x+q$ のグラフと $y=f(x)$ のグラフがちょうど 4 つの交点をもつための p, q に対する条件を求め，pq 平面上に図示せよ。

22　　［東北大・理］

　a, b を正の実数とする。曲線 $C : y = x^3 - a^2x + a^3$ と点 $\mathrm{P}(b,\ 0)$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　点 P から曲線 C に接線がちょうど 3 本引けるような点 $(a,\ b)$ の存在する領域を図示せよ。

(2)　点 P から曲線 C に接線がちょうど 2 本引けるとする。2 つの接点を A, B としたとき，$\angle\mathrm{APB}$ が 90° より小さくなるための a と b の条件を求めよ。

23　　［東京大・理］

3 辺の長さが a と b と c の直方体を，長さが b の 1 辺を回転軸として 90° 回転させるとき，直方体が通過する点全体がつくる立体を V とする。

(1)　V の体積を a, b, c を用いて表せ。

(2)　$a+b+c=1$ のとき，V の体積のとりうる値の範囲を求めよ。

24　　[名古屋大・文]

(1)　関数 $y=x^3-x^2$ のグラフをかけ。

(2)　曲線 $y=x^3-x^2$ の接線で，点 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$ を通るものをすべて求めよ。

(3)　p を定数とする。x の 3 次方程式 $x^3-x^2=p\left(x-\frac{3}{2}\right)$ の異なる実数解の個数を求めよ。

25　　［京都大・理］

xyz 空間で，原点 O を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の球面 S と 3 点 $(4,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 4,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 4)$ を通る平面 α が共有点をもつことを示し，点 $(x,\ y,\ z)$ がその共有点全体の集合を動くとき，積 xyz が取り得る値の範囲を求めよ。

26　　［一橋大］

xy 平面上に放物線 $C : y=-3x^2+3$ と 2 点 A$(1,\ 0)$，P$(0,\ 3p)$ がある。線分 AP と C は, A とは異なる点 Q を共有している。

(1)　定数 p の存在する範囲を求めよ。

(2)　S_1 を，C と線分 AQ で囲まれた領域とし，S_2 を，C，線分 QP，および y 軸とで囲まれた領域とする。S_1 と S_2 の面積の和が最小となる p の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{27}}$ ［京都大］

実数 x, y が条件 $x^2+xy+y^2=6$ を満たしながら動くとき

$$x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$$

がとりうる値の範囲を求めよ。

28　　[九州大・文]

関数 $f(x)=x^3+3x^2+x-1$ を考える。曲線 $C:y=f(x)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $t \geqq 0$ のとき，曲線 C は傾きが t である接線を 2 本もつことを示せ。

(2) (1)において，傾きが t である 2 本の接線と曲線 C との接点を，それぞれ $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ とする (ただし $p<q$)。このとき，点 P と点 Q は点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ に関して対称の位置にあることを示せ。

(3) $t \geqq 0$ のとき，2 点 P, Q の距離の最小値を求めよ。また，最小値を与えるときの P, Q の x 座標 p, q もそれぞれ求めよ。

29　　［一橋大］

a を 0 以上の定数とする。関数 $y=x^3-3a^2x$ のグラフと方程式 $|x|+|y|=2$ で表される図形の共有点の個数を求めよ。

30　　［大阪大・文］

xy 平面上で考える。不等式 $y<-x^2+16$ の表す領域を D とし，不等式 $|x-1|+|y|\leqq 1$ の表す領域を E とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　領域 D と領域 E をそれぞれ図示せよ。

(2)　$\mathrm{A}(a,\ b)$ を領域 D に属する点とする。点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ を通り傾きが $-2a$ の直線と放物線 $y=-x^2+16$ で囲まれた部分の面積を $S(a,\ b)$ とする。$S(a,\ b)$ を $a,\ b$ を用いて表せ。

(3)　点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ が領域 E を動くとき，$S(a,\ b)$ の最大値を求めよ。

31　　［名古屋大・理］

a を正の定数とし，xy 平面上の曲線 C の方程式を $y=x^3-a^2x$ とする。

(1)　C 上の点 $\mathrm{A}(t,\ t^3-a^2t)$ における C の接線を l とする。l と C で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ。ただし，t は 0 でないとする。

(2)　b を実数とする。C の接線のうち xy 平面上の点 $\mathrm{B}(2a,\ b)$ を通るものの本数を求めよ。

(3)　C の接線のうち点 $\mathrm{B}(2a,\ b)$ を通るものが 2 本のみの場合を考え，それらの接線を l_1，l_2 とする。ただし，l_1 と l_2 はどちらも原点 $(0,\ 0)$ を通らないとする。l_1 と C で囲まれた図形の面積を S_1 とし，l_2 と C で囲まれた図形の面積を S_2 とする。$S_1 \geqq S_2$ として，$\dfrac{S_1}{S_2}$ の値を求めよ。

32　　［千葉大］

$a,\ b$ を実数とし，$a>0$ とする。放物線 $y=\dfrac{x^2}{4}$ 上に 2 点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{a^2}{4}\right)$，$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{b^2}{4}\right)$ をとる。点 A における放物線の接線と法線をそれぞれ l_{A} と n_{A}，点 B における放物線の接線と法線をそれぞれ l_{B} と n_{B} とおいたとき，l_{A} と l_{B} が直交しているものとする。2 つの接線 l_{A}，l_{B} の交点を P とし，2 つの法線 n_{A}，n_{B} の交点を Q とする。

(1)　b を a を用いて表せ。

(2)　P, Q の座標を a を用いて表せ。

(3)　長方形 AQBP の面積が最小となるような a の値と，そのときの面積を求めよ。

$\boxed{33}$　　［東京大・文］

関数 $y = x(x-1)(x-3)$ のグラフを C, 原点 O を通る傾き t の直線を l とし, C と l が O 以外に共有点をもつとする。C と l の共有点を O, P, Q とし, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ と $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ の積を $g(t)$ とおく。ただし, それら共有点の 1 つが接点である場合は, O, P, Q のうちの 2 つが一致して, その接点であるとする。関数 $g(t)$ の増減を調べ, その極値を求めよ。

34　　［神戸大・理］

c を $0<c<1$ を満たす実数とする。$f(x)$ を 2 次以下の多項式とし，曲線 $y=f(x)$ が 3 点 $(0,\ 0)$，$(c,\ c^3-2c)$，$(1,\ -1)$ を通るとする。次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ を求めよ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=x^3-2x$ で囲まれた部分の面積 S を c を用いて表せ。

(3)　(2)で求めた S を最小にするような c の値を求めよ。

$\boxed{35}$　　［一橋大］

原点を O とする xy 平面上に，放物線 $C: y=1-x^2$ がある。C 上に 2 点 $\mathrm{P}(p,\ 1-p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ 1-q^2)$ を $p<q$ となるようにとる。

(1) 2 つの線分 OP, OQ と放物線 C で囲まれた部分の面積 S を，p と q の式で表せ。

(2) $q=p+1$ であるとき S の最小値を求めよ。

(3) $pq=-1$ であるとき S の最小値を求めよ。

36　　［北海道大・文］

2 つの放物線 $C_1 : y = -x^2 + \frac{3}{2}$，$C_2 : y = (x-a)^2 + a \quad (a > 0)$ がある。点 $\mathrm{P}_1\left(p,\ -p^2 + \frac{3}{2}\right)$ における C_1 の接線を l_1 とする。

(1)　C_1 と C_2 が共有点をもたないための a に関する条件を求めよ。

(2)　l_1 と平行な C_2 の接線 l_2 の方程式と，l_2 と C_2 の接点 P_2 の座標を a, p を用いて表せ。

(3)　C_1 と C_2 が共有点をもたないとする。(2)で求めた P_2 と P_1 を結ぶ線分が l_1 と垂直になるとき，p を求めよ。

37　　［北海道大・理］

$f(x)=x^4-4x^3-8x^2$ とする。

(1)　関数 $f(x)$ の極大値と極小値，およびそのときの x を求めよ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ に 2 点 $(a,\ f(a))$ と $(b,\ f(b))$　$(a<b)$ で接する直線の方程式を求めよ。

38　　［岡山大・文］

関数 $f(x)$ を　$f(x)=[x]+2(x-[x])-(x-[x])^2$ と定める。ここで，$[x]$ は $n\leqq x$ を満たす最大の整数 n を表す。

(1)　$f(x)\geqq x$ であることを示せ。

(2)　$f(x+1)=f(x)+1$ であることを示せ。

(3)　$0\leqq x\leqq 2$ において $y=f(x)$ のグラフを描け。

(4)　$0\leqq a<1$ とするとき，$\displaystyle\int_a^{a+1} f(x)\,dx$ を求めよ。

39　［京都大・文］

t を実数とする。$y=x^3-x$ のグラフ C へ点 $\mathrm{P}(1,\ t)$ から接線を引く。

(1)　接線がちょうど 1 本だけ引けるような t の範囲を求めよ。

(2)　t が(1)で求めた範囲を動くとき，$\mathrm{P}(1,\ t)$ から C へ引いた接線と C で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする。$S(t)$ のとりうる値の範囲を求めよ。