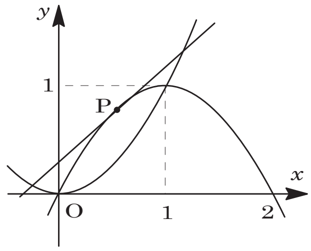
1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［金沢大・文］

(1)　$H_1: y=-x^2+2x$ より，$y'=-2x+2$

点 $\mathrm{P}(a,\ -a^2+2a)$ における接線 l の方程式は，

$$y-(-a^2+2a)=(-2a+2)(x-a)$$

$$y=(-2a+2)x+a^2$$



ここで，l と $H_2: y=x^2$ との共有点は，

$$x^2=(-2a+2)x+a^2$$

$$x^2+2(a-1)x-a^2=0 \cdots\cdots\cdots ①$$

①の判別式 D は，$D/4=(a-1)^2+a^2>0$

よって，a の値と関係なく，l は H_2 と異なる 2 点で交わる。

(2)　①の 2 つの解を $x=\alpha,\ \beta$ とおくと，2 交点は $(\alpha,\ \alpha^2)$，$(\beta,\ \beta^2)$ と表せ，

$$\alpha+\beta=-2(a-1),\ \alpha\beta=-a^2$$

このとき，2 交点の中点を $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とおくと，

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2},\ y=\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$$

すると，$x=-(a-1) \cdots\cdots ②$

$$y=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{2}=\frac{4(a-1)^2+2a^2}{2}=3a^2-4a+2 \cdots\cdots\cdots ③$$

②より $a=-x+1$ となり，③に代入すると，点 Q の軌跡 C の方程式は，

$$y=3(-x+1)^2-4(-x+1)+2,\ y=3x^2-2x+1$$

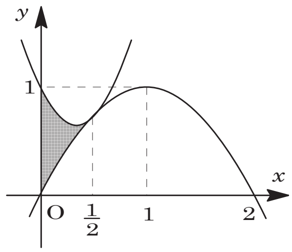
(3)　C と H_1 の共有点は，$3x^2-2x+1=-x^2+2x$

$$4x^2-4x+1=0,\ (2x-1)^2=0,\ x=\frac{1}{2}$$

C と H_1 および y 軸で囲まれた図形の面積 S は，

$$S=\int_0^{\frac{1}{2}}\{(3x^2-2x+1)-(-x^2+2x)\}dx$$

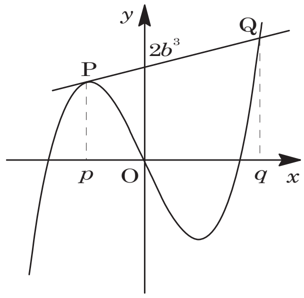
$$=\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)^2dx=\frac{1}{6}\Big[(2x-1)^3\Big]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}$$



［解 説］

H_1，H_2，C という 3 種類の放物線，しかも H_1 の接線 l が関連しているため，混乱しがちです。題意を取り違えないことが重要です。

2　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[一橋大]



(1)　曲線 $y=x^3-ax$ ……①上の点 P，Q の x 座標をそれぞれ p，$q\,(p<0<q)$ とし，点 $(0,\ 2b^3)$ を通る直線を $y=mx+2b^3$ ……②とおく。

また，条件より，点 P，Q の一方は①と②の接点，他方は交点である。

(i)　点 P が交点，点 Q が接点のとき

$x^3-ax-(mx+2b^3)=0$ は解 $x=p$ と重解 $x=q$ をもつことより，

$$x^3-ax-(mx+2b^3)=(x-p)(x-q)^2$$

定数項を比べると，$-2b^3=-pq^2$ となり，$b>0$，$p<0<q$ に反する。

(ii)　点 P が接点，点 Q が交点のとき

$x^3-ax-(mx+2b^3)=0$ は重解 $x=p$ と解 $x=q$ をもつことより，

$$x^3-ax-(mx+2b^3)=(x-p)^2(x-q)$$

係数を比べると，

$$0=2p+q\ \cdots\cdots\cdots③,\quad -a-m=p^2+2pq\ \cdots\cdots\cdots④,\quad -2b^3=-p^2q\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

③から $q=-2p$ を④，⑤に代入すると，

$$m=-a+3p^2\ \cdots\cdots\cdots⑥,\quad p=-b\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

⑥⑦より $m=-a+3b^2$ となり，直線 PQ の方程式は，②より，

$$y=(-a+3b^2)x+2b^3$$

(2)　①⑦より $\mathrm{P}(-b,\ -b^3+ab)$，③から $q=2b$ なので $\mathrm{Q}(2b,\ 8b^3-2ab)$ となる。

(3)　(2)より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(-b,\ -b^3+ab)$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(2b,\ 8b^3-2ab)$ である。

条件から $\angle\mathrm{POQ}=90^\circ$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=0$ となり，

$$-2b^2+(-b^3+ab)(8b^3-2ab)=0$$

$b>0$ を用いてまとめると，$4b^4-5ab^2+a^2+1=0$

ここで，$t=b^2>0$ とおくと，$4t^2-5at+a^2+1=0$ ………⑧

すると，求める条件は，⑧が $t>0$ の解をもつ a の範囲となる。

$a>0$ から，$\dfrac{5a}{4}>0$，$\dfrac{a^2+1}{4}>0$ に注意すると，

$$D=25a^2-16(a^2+1)=(3a+4)(3a-4)\geqq 0$$

よって，$a\geqq\dfrac{4}{3}$ である。

[解　説]

重解条件を利用して解きました。標準的で落とせない問題です。

3　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［名古屋大・文］

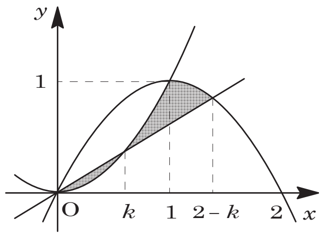
(1)　$D: y \geqq x^2$，$y \leqq kx$，$E: y \leqq x^2$，$y \geqq kx$，$F: y \leqq -x^2+2x$，$y \geqq kx$ より，これらの 3 つの領域の境界線は，$y = x^2$ ……①，$y = kx$ ……②，$y=-x^2+2x$ ……③ である。

①と②の交点は，$x^2 = kx$ より，$x = 0,\ k$

①と③の交点は，$x^2 = -x^2+2x$ より，$x = 0,\ 1$

②と③の交点は，$kx = -x^2+2x$ より，

$x = 0,\ 2-k$



これより，領域 $D \cup (E \cap F)$ を図示すると，右図の網点部となり，その面積 $m(k)$ は，

$$m(k) = \int_0^{2-k}(-x^2+2x-kx)\,dx - \int_0^1(-x^2+2x-x^2)\,dx + 2\int_0^k(kx-x^2)\,dx$$

$$= -\int_0^{2-k}x(x-2+k)\,dx + 2\int_0^1 x(x-1)\,dx - 2\int_0^k x(x-k)\,dx$$

$$= \frac{1}{6}(2-k)^3 - 2\cdot\frac{1}{6}\cdot 1^3 + 2\cdot\frac{1}{6}k^3 = \frac{1}{6}(k^3+6k^2-12k+6)$$

$$= \frac{1}{6}k^3 + k^2 - 2k + 1$$

(2)　(1)より，$m'(k) = \frac{1}{2}k^2 + 2k - 2 = \frac{1}{2}(k^2+4k-4)$

$m'(k) = 0$ とすると，$k = -2 \pm 2\sqrt{2}$

$0 \leqq k \leqq 1$ より，$m(k)$ の値の変化は右表のようになり，$k = -2+2\sqrt{2}$ のとき最小となる。

k	0	$\cdots$	$-2+2\sqrt{2}$	$\cdots$	1
$m'(k)$		$-$	0	$+$	
$m(k)$		↘		↗	

ここで，$k^3+6k^2-12k+6$ を k^2+4k-4 で割ると，

$$k^3+6k^2-12k+6 = (k^2+4k-4)(k+2) - 16k + 14$$

これより，最小値 $m(-2+2\sqrt{2})$ は，

$$m(-2+2\sqrt{2}) = \frac{1}{6}\left\{-16(-2+2\sqrt{2})+14\right\} = \frac{1}{3}(23-16\sqrt{2})$$

［解 説］

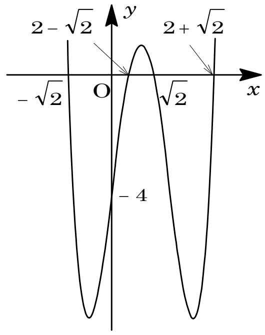
名大では 1999 年に続き，いわゆる $\frac{1}{6}$ 公式の適用パズルが出題されました。ただ，本年の問題は，ひねりが加わっています。

$\boxed{4}$　［九州大・文］

(1)　$f(x)=0$ より，$(x^2-2)(x^2-4x+2)=0$ となり，

$$x=\pm\sqrt{2}\,,\ \ x=2\pm\sqrt{2}$$

小さい順に並べると，$-\sqrt{2}$，$2-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}$，$2+\sqrt{2}$



(2)　$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，$f(n)\leqq 0$ の解は, (1)から,

$$-\sqrt{2}\leqq n\leqq 2-\sqrt{2}\,,\ \ \sqrt{2}\leqq n\leqq 2+\sqrt{2}$$

n は整数なので，$n=-1$，0，2，3

(3)　$f(n)\leqq 0$ を満たす整数 $n=-1$，0，2，3 は，$f(n)\leqq 1$ を満たす。

次に，$f(-2)=28>1$，$f(4)=28>1$ より，$n\leqq -2$ または $n\geqq 4$ において，$f(n)\leqq 1$ を満たす n は存在しない。

さらに，$f(1)=1$ から，$n=1$ は $f(n)\leqq 1$ を満たす。

以上より，$f(n)\leqq 1$ を満たす整数は，$n=-1$，0，1，2，3 である。

［解 説］

数学Ⅱの範囲は超えていますが，4 次関数 $y=f(x)$ のグラフを対応させて考えています。(3)も視覚的に解いています。

$\boxed{5}$ ［名古屋大・理］

(1)　$f(x)=2x^3-3x^2+1$ より，

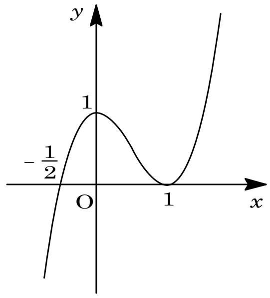
$$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$$

すると，$f(x)$ の値の変化は右表のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	1	↘	0	↗

また，$f(x)=(2x+1)(x-1)^2$ から，$y=f(x)$ のグラフと x 軸との共有点は，$x=-\dfrac{1}{2}$，1である。

よって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



(2)　(1)より，方程式 $f(x)=a$ は，$0<a<1$ のとき 3 つの実数解 $\alpha<\beta<\gamma$ をもち，

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{3}{2}\cdots\cdots\cdots①,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$\alpha+\gamma=\dfrac{3}{2}-\beta$

②に代入して，$\alpha\gamma=-\beta(\alpha+\gamma)=-\beta\left(\dfrac{3}{2}-\beta\right)$

さて，$l=\gamma-\alpha$ より，

$$l^2=(\gamma-\alpha)^2=(\alpha+\gamma)^2-4\alpha\gamma=\left(\frac{3}{2}-\beta\right)^2+4\beta\left(\frac{3}{2}-\beta\right)=-3\beta^2+3\beta+\frac{9}{4}$$

よって，$l=\sqrt{-3\beta^2+3\beta+\dfrac{9}{4}}$

(3)　(2)より，$l=\sqrt{-3\left(\beta-\dfrac{1}{2}\right)^2+3}$ となり，$0<\beta<1$ から，

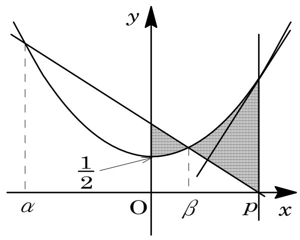
$$\frac{3}{2}<l\leqq\sqrt{3}$$

［解　説］

解 α，γ と β の関係をとらえるために，解と係数の関係に着目することがポイントとなっています。見かけよりスパイスの効いている 1 題です。

6

［広島大・文］



(1)　$C : y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2}$ ……①に対して，$y' = x$

すると，$x = p$ のとき $y' = p$ である。

これより，直線 l の傾きは p となり，l に直交する直線 m は，傾きが $-\dfrac{1}{p}$ で，$Q(p,\ 0)$ を通るので，その方程式は，

$$y = -\frac{1}{p}(x-p),\quad y = -\frac{1}{p}x + 1 \cdots\cdots\cdots ②$$

(2)　C と m の交点の x 座標は，①②から，$\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{p}x + 1$，$x^2 + \dfrac{2}{p}x - 1 = 0$

ここで，$f(x) = x^2 + \dfrac{2}{p}x - 1$ とおくと，

$$f(0) = -1 < 0,\quad f(p) = p^2 + 1 > 0$$

よって，$f(x) = 0$ は異なる 2 つの実数解をもち，これを $x = \alpha,\ \beta$ とおくと，$\alpha < 0 < \beta < p$ である。

(3)　$S_1 = \displaystyle\int_0^{\beta}\left(-\frac{1}{p}x + 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right)dx$，$S_2 = \displaystyle\int_{\beta}^{p}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{p}x - 1\right)dx$ より，

$$\begin{aligned}S_2 - S_1 &= \int_{\beta}^{p}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{p}x - 1\right)dx + \int_0^{\beta}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{p}x - 1\right)dx \\ &= \int_0^{p}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{p}x - 1\right)dx = \left[\frac{x^3}{6} + \frac{1}{2p}x^2 - \frac{1}{2}x\right]_0^p \\ &= \frac{p^3}{6} + \frac{1}{2p}p^2 - \frac{1}{2}p = \frac{p^3}{6}\end{aligned}$$

［解 説］

微積分の総合問題です。(3)では，S_1，S_2 を単独で求めずに $S_1 - S_2$ を計算すればよいということは，問題文から推測できます。

7　　　　［大阪大・文］

(1)　$C: y=x^2$ と $l: y=x+k$ の共有点の x 座標は,

$$x^2=x+k,\ x^2-x-k=0 \cdots\cdots\cdots (*)$$

条件より, $(*)$の異なる 2 つの実数解が, ともに $-2<x<2$ に存在するので,

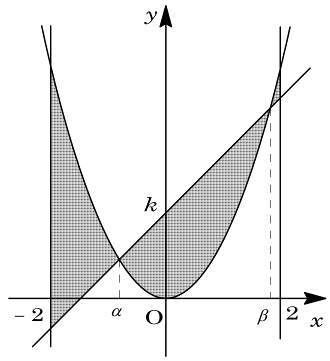
$$D=1+4k>0,\ k>-\frac{1}{4} \cdots\cdots\cdots ①$$

$f(x)=x^2-x-k$ として,

$$f(2)=4-2-k>0,\ k<2 \cdots\cdots\cdots ②$$

$$f(-2)=4+2-k>0,\ k<6 \cdots\cdots\cdots ③$$

①②③より, $-\frac{1}{4}<k<2$



(2)　$(*)$より, $x=\frac{1\pm\sqrt{1+4k}}{2}$ となり, この解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおく。

すると, 求める 3 つの部分の面積の和 S は,

$$S=\int_{-2}^{\alpha}(x^2-x-k)\,dx-\int_{\alpha}^{\beta}(x^2-x-k)\,dx+\int_{\beta}^{2}(x^2-x-k)\,dx$$

$$=\int_{-2}^{2}(x^2-x-k)\,dx-2\int_{\alpha}^{\beta}(x^2-x-k)\,dx$$

$$=2\int_{0}^{2}(x^2-k)\,dx-2\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3$$

$$=2\left[\frac{x^3}{3}-kx\right]_0^2+\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3=\frac{16}{3}-4k+\frac{1}{3}\left(\sqrt{1+4k}\right)^3$$

［解　説］

積分計算がポイントです。計算を迅速にかつ正確に遂行するためには, 上記のような工夫が必要になります。

8　　　　［東北大・文］

(1)　$f(x)=x^3+(2a-4)x^2+(a^2-4a+4)x$ に対し，$f(x)=0$ ……(＊)とすると，

$$x\{x^2+(2a-4)x+(a-2)^2\}=0,\ \ x(x+a-2)^2=0$$

よって，(＊)の解は，$x=0,\ -a+2$ となり，異なる 2 つの実数解をもつ条件は，$-a+2\neq 0$ より，$a\neq 2$ である。

(2)　$f'(x)=3x^2+2(2a-4)x+(a-2)^2=(x+a-2)(3x+a-2)$

これより，$f'(x)=0$ の解は，$x=-a+2,\ \dfrac{-a+2}{3}$

(i)　$a>2$ のとき

右表より，極大値は，

$$f(-a+2)=0$$

また，極小値は，

$$f\left(\frac{-a+2}{3}\right)=\frac{-4(a-2)^3}{27}$$

x	$\cdots$	$-a+2$	$\cdots$	$\dfrac{-a+2}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\dfrac{-4(a-2)^3}{27}$	$\nearrow$

(ii)　$a<2$ のとき

右表より，極大値は，

$$f\left(\frac{-a+2}{3}\right)=\frac{-4(a-2)^3}{27}$$

また，極小値は，

$$f(-a+2)=0$$

x	$\cdots$	$\dfrac{-a+2}{3}$	$\cdots$	$-a+2$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\dfrac{-4(a-2)^3}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

(3)　$y=f(x)$ の極大値を与える x について，$(x,\ y)=(x,\ f(x))$ とおくと，

(i)　$a>2$ のとき

(2)より，$(x,\ y)=(-a+2,\ 0)$ となるので，その軌跡の方程式は，

$$y=0\ (x<0)$$

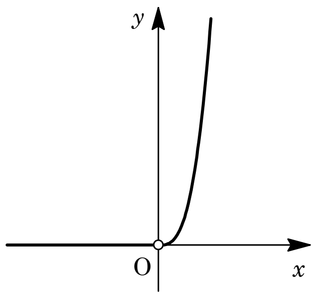
(ii)　$a<2$ のとき

(2)より，$(x,\ y)=\left(\dfrac{-a+2}{3},\ \dfrac{-4(a-2)^3}{27}\right)$ となるので，

その軌跡の方程式は，

$$y=-\frac{4}{27}(-3x)^3=4x^3\ (x>0)$$

(i)(ii)より，点$(x,\ f(x))$は，右図の太線を描く。



［解　説］

方程式 $f(x)=0$ の左辺が 1 次式の積として因数分解できるとは，予想しませんでした。不意を突かれた感じです。

9　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［大阪大・文］

(1)　$P(x)=x^3+3ax^2+3ax+b$ に対して，$P(x)=0$ の解が α，β，γ であるので，

$$\alpha+\beta+\gamma=-3a \cdots\cdots\cdots ①,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3a \cdots\cdots\cdots ②,\quad \alpha\beta\gamma=-b \cdots\cdots\cdots ③$$

条件より，$\alpha+\gamma=2\beta \cdots\cdots\cdots$④

①④より，$\beta=-a \cdots\cdots$⑤となり，また②④より，$2\beta^2+\gamma\alpha=3a \cdots\cdots\cdots$⑥

⑤⑥より，$2a^2+\gamma\alpha=3a$，$\gamma\alpha=-2a^2+3a \cdots\cdots\cdots$⑦

③⑤⑦より，$-a(-2a^2+3a)=-b$，$b=-2a^3+3a^2$

(2)　⑤より β は実数であるので，α，γ がともに実数である条件を求める。

④⑤より，$\alpha+\gamma=-2a$

さらに，⑦を考え合わせると，α，γ は t の 2 次方程式 $t^2+2at-2a^2+3a=0$ の 2 つの解となるので，

$$D/4=a^2-(-2a^2+3a)=3a(a-1)\geqq 0$$

よって，$a\leqq 0,\ 1\leqq a$ である。

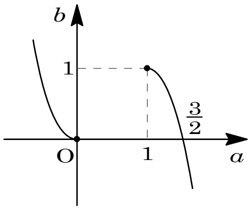
(3)　(1)より，$f(a)=-2a^3+3a^2$ となり，

$$f'(a)=-6a^2+6a=-6a(a-1)$$

すると，$f(a)$ の増減は右上表のようになる。

a	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(a)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(a)$	↘	0	↗	1	↘

よって，(2)から $a\leqq 0,\ 1\leqq a$ において，$b=f(a)$ のグラフは右図のとおりである。



［解 説］

3 次方程式の解と係数の関係を題材にした問題です。連立方程式のまとめ方が問われています。

10 ［京都大・文］

$2\sqrt{2}(\sin^3 x+\cos^3 x)+3\sin x\cos x=0$ ……①に対して，$t=\sin x+\cos x$ とおくと，

$$t^2=1+2\sin x\cos x\,,\quad \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$$

$$\sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)=t\left(1-\frac{t^2-1}{2}\right)=-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t$$

①に代入して，$2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t\right)+\frac{3}{2}(t^2-1)=0$

$$2\sqrt{2}t^3-6\sqrt{2}t-3t^2+3=0\,,\quad 4t^3-3\sqrt{2}t^2-12t+3\sqrt{2}=0 \cdots\cdots\cdots ②$$

ここで，$0\leqq x<2\pi$，$t=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ より，方程式②を満たす 1 つの解に対して，方程式①を満たす解の個数は，$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$ のとき 2 個，$t=\pm\sqrt{2}$ のとき 1 個となり，$t<-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}<t$ のときはない。

さて，$f(t)=4t^3-3\sqrt{2}t^2-12t+3\sqrt{2}$ とおくと，

$$f'(t)=12t^2-6\sqrt{2}t-12$$
$$=6(2t+\sqrt{2})(t-\sqrt{2})$$

t	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0
$f(t)$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$		$\searrow$	$-7\sqrt{2}$

すると，$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ における $f(t)$ の増減は右表のようになり，$f(t)=0$ すなわち方程式②は $-\frac{\sqrt{2}}{2}<t<\sqrt{2}$ に解を 1 つだけもつ。

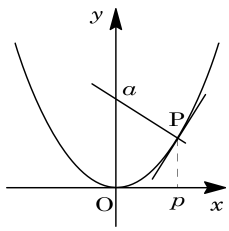
よって，方程式①を満たす x は 2 個存在する。

［解 説］

有名な三角方程式の解の個数についての問題です。t と x の個数の対応に注意が必要です。

11　　［九州大・文］

(1)　$C: y = x^2$ より，$y' = 2x$ となり，$\mathrm{P}(p,\ p^2)$ における接線の方向ベクトル，すなわち法線の法線ベクトルの成分は，$(1,\ 2p)$ と表せる。



これより，P における法線の方程式は，

$$(x-p)+2p(y-p^2)=0$$

$$x+2py-p-2p^3=0 \cdots\cdots\cdots ①$$

(2)　①が点 $(0,\ a)$ を通る条件は，$2pa-p-2p^3=0 \cdots\cdots\cdots ②$

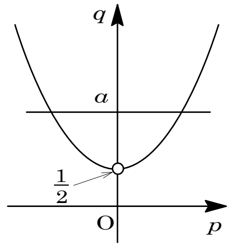
ここで，②の異なる実数解 p の個数が，点 $(0,\ a)$ を通る法線の本数に一致することより，

(i)　$p=0$ のとき

②は任意の実数 a で成立する。

(ii)　$p \neq 0$ のとき

②より，$2a-1-2p^2=0$，$a=p^2+\dfrac{1}{2} \cdots\cdots\cdots ③$



さて，$p \neq 0$ のもとで，③の異なる実数解 p の個数は，直線 $q=a$ と $q=p^2+\dfrac{1}{2}$ のグラフの共有点の個数に一致する。

すると，右図より，$a>\dfrac{1}{2}$ のとき p は 2 個存在し，$a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき p は存在しない。

(i)(ii)より，題意の法線の本数は，$a>\dfrac{1}{2}$ のとき 3 本，$a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき 1 本である。

［解　説］

法線の本数についての基本的な問題です。ただし，$a=\dfrac{1}{2}$ の場合は要注意です。

12　　　　　　　　　　　　　　　　　　［金沢大・文］

(1)　$m(a)=\int_0^1 f(x)g(x)dx=\int_0^1 -\{(a+1)x+1\}\left(2x+\frac{a}{3}\right)dx$ より，

$$m(a)=-\int_0^1\left\{2(a+1)x^2+\frac{a^2+a+6}{3}x+\frac{a}{3}\right\}dx$$

$$=-\frac{2(a+1)}{3}-\frac{a^2+a+6}{6}-\frac{a}{3}=\frac{-a^2-7a-10}{6}$$

ここで，$m(a)>0$ より，$a^2+7a+10<0$，$(a+2)(a+5)<0$ となり，

$-5<a<-2$

(2)　$h(x)=g(x)-m(a)f(x)$ より，

$$\int_0^1 f(x)h(x)dx=\int_0^1 [f(x)g(x)-m(a)\{f(x)\}^2]dx$$

$$=m(a)-m(a)\int_0^1\{f(x)\}^2dx$$

さて，$m(a)>0$ より，$\int_0^1 f(x)h(x)dx=0$ は，$\int_0^1\{f(x)\}^2dx=1$ と同値であり，

$$\int_0^1\{f(x)\}^2dx=\int_0^1\{(a+1)^2x^2+2(a+1)x+1\}dx=\frac{(a+1)^2}{3}+(a+1)+1$$

よって，$\frac{(a+1)^2}{3}+(a+1)+1=1$ から，$a+1=-3,\ 0$ となる。

すると, (1)より，$-5<a<-2$ なので，$a=-4$ である。

［解　説］

(2)は(1)と関連し，クリアーに解ける設問になっています。

$\boxed{13}$ ［京都大・文］

まず，$\int_0^x f(y)dy+\int_0^1 (x+y)^2 f(y)dy=x^2+C$ を変形して，

$$\int_0^x f(y)dy+x^2\int_0^1 f(y)dy+2x\int_0^1 yf(y)dy+\int_0^1 y^2 f(y)dy=x^2+C$$

$p=\int_0^1 f(y)dy$ ……①，$q=\int_0^1 yf(y)dy$ ……②，$r=\int_0^1 y^2 f(y)dy$ ……③とおくと，

$$\int_0^x f(y)dy+px^2+2qx+r=x^2+C \text{ ………④}$$

④の両辺を x で微分すると，$f(x)+2px+2q=2x$

$$f(x)=-2(p-1)x-2q \text{ ………⑤}$$

④に $x=0$ を代入すると，$r=C$ ………⑥

①⑤より，$p=\int_0^1\{-2(p-1)y-2q\}dy=-p+1-2q$，$2p+2q=1$ ………⑦

②⑤より，$q=\int_0^1\{-2(p-1)y^2-2qy\}dy=-\frac{2}{3}(p-1)-q$，$p+3q=1$ ………⑧

⑦⑧より，$p=q=\frac{1}{4}$ となり，

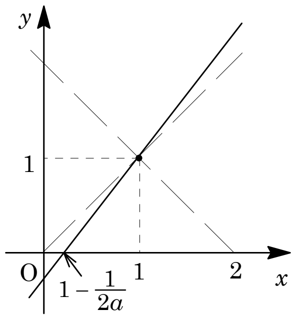
$$f(x)=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$$

③⑥より，$C=\int_0^1\left(\frac{3}{2}y^3-\frac{1}{2}y^2\right)dy=\frac{3}{8}-\frac{1}{6}=\frac{5}{24}$

［解 説］

定型的な積分方程式の問題です。$f(x)$ を 1 次以下の整式として設定し，与えられた式に代入する方法もあります。

$\boxed{14}$ ［東京大・文］



(1)　$f(x)=ax^2+bx+c$ に対し，$f(0)=0$，$f(2)=2$ より，

$$c=0,\ 4a+2b+c=2$$

よって，$b=1-2a$ から，$f(x)=ax^2-(2a-1)x$

$$f'(x)=2ax-(2a-1)=2a(x-1)+1$$

また，$a\neq 0$ のとき，$f'(x)=0$ とおくと，$x=1-\dfrac{1}{2a}$

これより，$y=f'(x)$ のグラフは右図のようになる。

(i)　$2a\geqq 1\ \left(a\geqq\dfrac{1}{2}\right)$ のとき

$$S=\int_0^2|f'(x)|dx=-\int_0^{1-\frac{1}{2a}}f'(x)dx+\int_{1-\frac{1}{2a}}^2 f'(x)dx$$

$$=-\Big[a(x-1)^2+x\Big]_0^{1-\frac{1}{2a}}+\Big[a(x-1)^2+x\Big]_{1-\frac{1}{2a}}^2$$

$$=-a\left(\frac{1}{4a^2}-1\right)-\left(1-\frac{1}{2a}\right)+a\left(1-\frac{1}{4a^2}\right)+\left(1+\frac{1}{2a}\right)=2a+\frac{1}{2a}$$

(ii)　$-1<2a<1\ \left(-\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{1}{2}\right)$ のとき

$$S=\int_0^2|f'(x)|dx=\int_0^2 f'(x)dx=\Big[a(x-1)^2+x\Big]_0^2=2$$

(iii)　$2a\leqq -1\ \left(a\leqq -\dfrac{1}{2}\right)$ のとき

$$S=\int_0^2|f'(x)|dx=\int_0^{1-\frac{1}{2a}}f'(x)dx-\int_{1-\frac{1}{2a}}^2 f'(x)dx=-2a-\frac{1}{2a}$$

(2)　(i)　$a\geqq\dfrac{1}{2}$ のとき　相加平均と相乗平均の関係より，

$$S=2a+\frac{1}{2a}\geqq 2\sqrt{2a\cdot\frac{1}{2a}}=2$$

等号は $2a=\dfrac{1}{2a}\ \left(a=\dfrac{1}{2}\right)$ のときに成立する。

(ii)　$-\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{1}{2}$ のとき　$S=2$

(iii)　$a\leqq -\dfrac{1}{2}$ のとき　$a'=-a\geqq\dfrac{1}{2}$ とおくと，

$$S=-2a-\frac{1}{2a}=2a'+\frac{1}{2a'}\geqq 2\sqrt{2a'\cdot\frac{1}{2a'}}=2$$

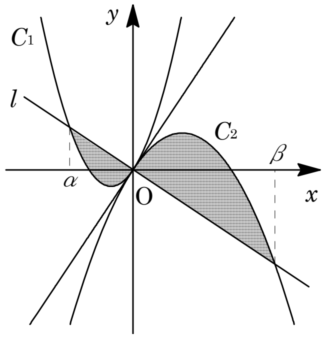
等号は $2a'=\dfrac{1}{2a'}\ \left(a=-\dfrac{1}{2}\right)$ のときに成立する。

(i)～(iii)より，S は $-\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき，最小値 2 をとる。

［解 説］

定積分の計算問題ですが，三角形や台形の面積計算と読み直しても可です。

$\boxed{15}$　　　　［千葉大・文］



(1)　原点を通る放物線C_1の方程式を，$y=\dfrac{a}{2}x^2+px$ とおくと，$y'=ax+p$ となる。

条件より，$x=0$ のとき $y'=k$ から，$p=k$ となり，

$$y=\frac{a}{2}x^2+kx\cdots\cdots\cdots①$$

また，同様にして，原点を通る放物線C_2の方程式を，$y=-\dfrac{2}{a}x^2+qx$ とおくと，$y'=-\dfrac{4}{a}x+q$ となる。

条件より，$x=0$ のとき $y'=k$ から，$q=k$ となり，

$$y=-\frac{2}{a}x^2+kx\cdots\cdots\cdots②$$

さらに，直線 $y=kx$ に垂直な直線 l は，$y=-\dfrac{1}{k}x\cdots\cdots③$である。

①③の交点 $x=\alpha\neq 0$ は，$\dfrac{a}{2}x^2+kx=-\dfrac{1}{k}x$ から，$\alpha=-\dfrac{2}{a}\left(k+\dfrac{1}{k}\right)$となり，

$$S_1=\int_{\alpha}^{0}\left(-\frac{1}{k}x-\frac{a}{2}x^2-kx\right)dx=-\frac{a}{2}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(-\alpha)^3=\frac{2}{3a^2}\left(k+\frac{1}{k}\right)^3$$

②③の交点 $x=\beta\neq 0$ は，$-\dfrac{2}{a}x^2+kx=-\dfrac{1}{k}x$ から，$\beta=\dfrac{a}{2}\left(k+\dfrac{1}{k}\right)$となり，

$$S_2=\int_{0}^{\beta}\left(-\frac{2}{a}x^2+kx+\frac{1}{k}x\right)dx=-\frac{2}{a}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\beta^3=\frac{a^2}{24}\left(k+\frac{1}{k}\right)^3$$

よって，$S=S_1+S_2=\dfrac{2}{3a^2}\left(k+\dfrac{1}{k}\right)^3+\dfrac{a^2}{24}\left(k+\dfrac{1}{k}\right)^3=\dfrac{1}{24}\left(a^2+\dfrac{16}{a^2}\right)\left(k+\dfrac{1}{k}\right)^3$

(2)　$k=\sqrt{2}-1$ のとき，$k+\dfrac{1}{k}=\sqrt{2}-1+\sqrt{2}+1=2\sqrt{2}$ より，

$$S=\frac{1}{24}\left(a^2+\frac{16}{a^2}\right)(2\sqrt{2})^3=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(a^2+\frac{16}{a^2}\right)$$

ここで，$a^2>0$ より，相加平均と相乗平均の関係を用いると，

$$a^2+\frac{16}{a^2}\geqq 2\sqrt{a^2\cdot\frac{16}{a^2}}=8$$

なお，等号は，$a^2=\dfrac{16}{a^2}$ すなわち $a=2$ のときに成立し，このとき S は最小値 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\cdot 8=\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$ をとる。

［解　説］

放物線とその法線で囲まれる部分の面積について，その最小値を求めるという頻出問題です。

$\boxed{16}$　　[神戸大・理]

(1)　$f(x)=x^3-3x+1$ に対して,

$$f'(x)=3x^2-3$$
$$=3(x-1)(x+1)$$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3

すると，$-2\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の増減は右表のようになり，方程式 $f(x)=0$ の実数解は，$-2<x<-1$，$-1<x<1$，$1<x<2$ に 1 つずつある。

すなわち，$f(x)=0$ は，絶対値が 2 より小さい 3 つの相異なる実数解をもつ。

(2)　α は $f(x)=0$ の解なので，$\alpha^3-3\alpha+1=0$ から，$\alpha^3=3\alpha-1$ ………(*)

また，$g(x)=x^2-2$ から，$g(\alpha)=\alpha^2-2$ となり，(*)より，

$$f(g(\alpha))=f(\alpha^2-2)=(\alpha^2-2)^3-3(\alpha^2-2)+1=\alpha^6-6\alpha^4+9\alpha^2-1$$
$$=(3\alpha-1)^2-6\alpha(3\alpha-1)+9\alpha^2-1$$
$$=9\alpha^2-6\alpha+1-18\alpha^2+6\alpha+9\alpha^2-1=0$$

よって，$g(\alpha)$ も $f(x)=0$ の解である。

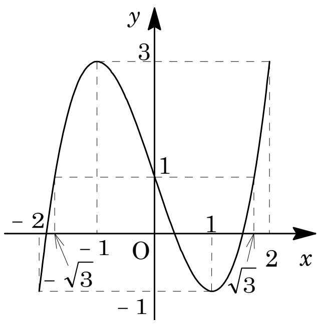
(3)　$f(-\sqrt{3})=f(0)=f(\sqrt{3})=1$ より，$f(x)=0$ の解を α_1，α_2，α_3（$\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3$）としたとき，

$$-2<\alpha_1<-\sqrt{3}，\ 0<\alpha_2<1，\ 1<\alpha_3<\sqrt{3}$$

すると，$g(x)=x^2-2$ より，

$$1<g(\alpha_1)<2，\ -2<g(\alpha_2)<-1，\ -1<g(\alpha_3)<1$$

よって，$g(\alpha_2)<g(\alpha_3)<g(\alpha_1)$ となる。



また，(2)から，$g(\alpha_1)$，$g(\alpha_2)$，$g(\alpha_3)$ も $f(x)=0$ の解であることより，

$$\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\}=\{g(\alpha_1),\ g(\alpha_2),\ g(\alpha_3)\}$$

以上より，$g(\alpha_1)=\alpha_3$，$g(\alpha_2)=\alpha_1$，$g(\alpha_3)=\alpha_2$ である。

[解 説]

グラフの概形から考えると，(3)での $x=\pm\sqrt{3}$ を用いた解のとりうる範囲の評価は，難しくはないでしょう。なお，記憶をたどって調べたところ，1997 年に早大・理工で本問と同じ問題が出ています。

17　　　　［筑波大・理］

(1)　$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2$ より，$f(-1)=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a$，$f(3)=9-\frac{9}{2}a$

$f(-1)\leqq f(3)$ から，$-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a\leqq 9-\frac{9}{2}a$ となり，$a\leqq\frac{7}{3}$

$a>0$ と合わせて，$0<a\leqq\frac{7}{3}$

(2)　$f'(x)=x^2-ax=x(x-a)$

$f(x)$ の増減は右表のようになり，条件より，極小値 $f(a)=-\frac{1}{6}a^3$ が $f(-1)$ 以下であることから，

x	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{6}a^3$	$\nearrow$

$$-\frac{1}{6}a^3\leqq-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a,\ a^3-3a-2\geqq 0,\ (a+1)^2(a-2)\geqq 0$$

$a>0$ より, $a\geqq 2$

(3)　(i)　$0<a<3$ のとき

$-1\leqq x\leqq 3$ における $f(x)$ の増減は右表のようになり，(2)の結果から，最小値は,

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{6}a^3$	$\nearrow$	

(i-i)　$0<a<2$ のとき　$f(-1)=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a$

(i-ii)　$2\leqq a<3$ のとき　$f(a)=-\frac{1}{6}a^3$

(ii)　$a\geqq 3$ のとき

$-1\leqq x\leqq 3$ における $f(x)$ の増減は右表のようになり, (1)の結果から，最小値は,

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

$$f(3)=9-\frac{9}{2}a$$

［解 説］

(1)と(2)の誘導によって, (3)は計算が不要となっています。

18　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［一橋大］

(1)　曲線 $y=x^3-3ax^2$ ……①上の点 $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^3-3a\alpha^2)$，$\mathrm{B}(\beta,\ \beta^3-3a\beta^2)$ とおく。

すると，$y'=3x^2-6ax$ から，

$$m=3\alpha^2-6a\alpha \cdots\cdots\cdots②,\quad m=3\beta^2-6a\beta \cdots\cdots\cdots③$$

②③より，$3(\alpha^2-\beta^2)-6a(\alpha-\beta)=0$ となり，$\alpha\neq\beta$ から，$\alpha+\beta=2a$ ………④

さて，線分 AB の中点 C は，$\mathrm{C}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \dfrac{\alpha^3+\beta^3-3a(\alpha^2+\beta^2)}{2}\right)$から，④より，

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3-3a(\alpha^2+\beta^2)&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)-3a\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}\\&=8a^3-6a\alpha\beta-12a^3+6a\alpha\beta=-4a^3\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{C}(a,\ -2a^3)$ となり，点 C は曲線 $y=x^3-3ax^2$ 上にある。

(2)　条件より，点 C が直線 $y=-x-1$ ……⑤上にあるので，$-2a^3=-a-1$ となり，

$$2a^3-a-1=0,\ (a-1)(2a^2+2a+1)=0$$

a は実数より，$a=1$

このとき，①は $y=x^3-3x^2$ となり，⑤との交点は，

$$x^3-3x^2=-x-1,\ x^3-3x^2+x+1=0,\ (x-1)(x^2-2x-1)=0$$

よって，$x=1,\ 1\pm\sqrt{2}$ となる。

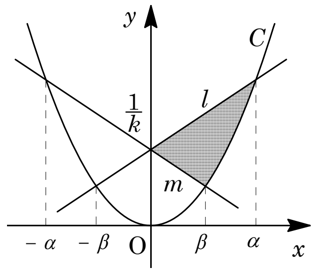
これより, A, B の x 座標は $1\pm\sqrt{2}$ となるので，②③より，複号同順で,

$$m=3(1\pm\sqrt{2})^2-6(1\pm\sqrt{2})=3$$

［解　説］

3 次曲線が点対称であることを題材とした問題です。

$\boxed{19}$ ［広島大・文］



(1)　曲線 $y=kx^2$ は y 軸対称であり，また直線 $l: y=kx+\dfrac{1}{k}$ と $m: y=-kx+\dfrac{1}{k}$ は y 軸対称である。

そこで，$C: y=kx^2\ (x\geqq 0)$ と l，m の交点の x 座標をそれぞれ α，β とすると，曲線 $y=kx^2$ と l との交点の x 座標は，α，$-\beta$ となる。

さて，$y=kx^2$ と $y=kx+\dfrac{1}{k}$ を連立して，

$$kx^2=kx+\frac{1}{k},\ \ k^2x^2-k^2x-1=0\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$の解が $x=\alpha$，$-\beta$ となるので，$\alpha-\beta=\dfrac{k^2}{k^2}=1$

(2)　(1)と同様にして，$(*)$から，$\alpha(-\beta)=-\dfrac{1}{k^2}$ より，$\alpha\beta=\dfrac{1}{k^2}$

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta=1+\frac{2}{k^2}$$

$$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)=1+\frac{3}{k^2}$$

(3)　曲線 C と 2 直線 l, m とで囲まれた部分の面積を S とすると，(1), (2)より，

$$S=\frac{1}{2}\left(k\alpha^2+\frac{1}{k}\right)\alpha-\frac{1}{2}\left(k\beta^2+\frac{1}{k}\right)\beta-\int_\beta^\alpha kx^2dx$$

$$=\frac{1}{2}k(\alpha^3-\beta^3)+\frac{1}{2k}(\alpha-\beta)-\frac{k}{3}(\alpha^3-\beta^3)=\frac{1}{6}k(\alpha^3-\beta^3)+\frac{1}{2k}(\alpha-\beta)$$

$$=\frac{1}{6}k\left(1+\frac{3}{k^2}\right)+\frac{1}{2k}=\frac{1}{6}k+\frac{1}{k}$$

ここで，相加平均と相乗平均の関係より，$\dfrac{1}{6}k+\dfrac{1}{k}\geqq 2\sqrt{\dfrac{1}{6}k\cdot\dfrac{1}{k}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

なお，等号は $\dfrac{1}{6}k=\dfrac{1}{k}$ すなわち $k=\sqrt{6}$ のとき成立する。

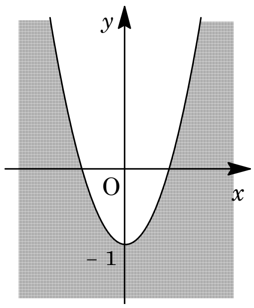
よって，$k=\sqrt{6}$ のとき，S は最小値 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ をとる。

［解　説］

微積分の総合問題で，対称性への着目がポイントとなっています。なお，(3)は(2)の利用を考えて，台形の面積を使っています。

$\boxed{20}$　　［大阪大・文］

(1)　$C: y=-x^2-1$ ……①上に頂点のある放物線 $y=\frac{3}{4}(x-t)^2-t^2-1$ ……②が通過する点 $(x,\ y)$ の条件は，②を t の方程式としてみたとき，t が実数解をもつ条件に一致する。



②より，$4y=3(x^2-2tx+t^2)-4t^2-4$

$$t^2+6xt-3x^2+4y+4=0$$

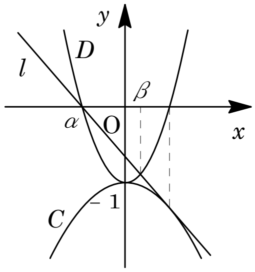
実数解条件より，$D/4=9x^2-(-3x^2+4y+4)\geqq 0$

$$y\leqq 3x^2-1$$

これを図示すると，右図の網点部となる。なお，境界は領域に含む。

(2)　条件より，$D: y=3x^2-1$ ………③

D と x 軸の正の部分との交点は $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ 0\right)$ となり，C 上の点 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{4}{3}\right)$ における接線 l の方程式を求めると，①より，$y'=-2x$ から，



$$y+\frac{4}{3}=-\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\quad y=-\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{2}{3}\ \text{………④}$$

③④の交点は，$3x^2-1=-\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{2}{3}$，$3x^2+\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{3}=0$

$$9x^2+2\sqrt{3}x-1=0,\quad (3\sqrt{3}x-1)(\sqrt{3}x+1)=0$$

よって，$x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\frac{1}{3\sqrt{3}}$ となり，$\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\beta=\frac{1}{3\sqrt{3}}$ とおくと，D と l で囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\int_\alpha^\beta\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{2}{3}-3x^2+1\right)dx=-3\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=-3\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3=\frac{32}{243}\sqrt{3}$$

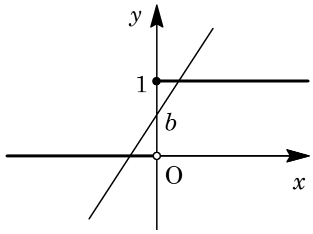
［解　説］

曲線の通過領域と微積分の融合問題です。この両者の必須技法が問われています。

21　　[名古屋大・文]

(1)　$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，$y=ax+b$ のグラフとちょうど 2 つの交点をもつのは，$x<0$，$x\geqq 0$ で 1 回ずつ交わる場合より，

$$a>0,\ 0<b\leqq 1$$



(2)　$y=x^3+6px^2+9p^2x+q$ ……$(*)$に対して，

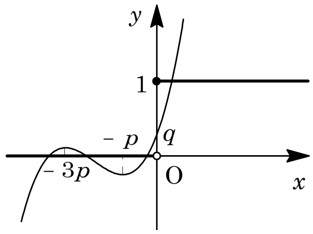
$$y'=3x^2+12px+9p^2$$
$$=3(x+3p)(x+p)$$

x	$\cdots$	$-3p$	$\cdots$	$-p$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	q	↘	$-4p^3+q$	↗

$p>0$ から，関数値の増減は右表のようになり，$x\geqq 0$ では単調に増加する。

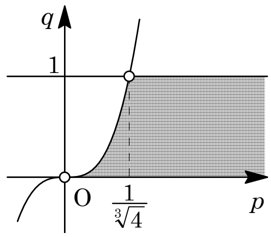
すると，$(*)$のグラフと $y=f(x)$ のグラフがちょうど 4 つの交点をもつためには，$x<0$ で 3 回，$x\geqq 0$ で 1 回交わる場合となる。その条件は，$p>0$ のもとで，

$$q>0,\ -4p^3+q<0,\ 0<q\leqq 1$$



まとめると，$p>0$，$q<4p^3$，$0<q\leqq 1$ である。

これを，pq 平面上に図示すると，右図の網点部となる。ただし，半直線 $q=1\left(p>\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$以外の境界線は領域に含まない。



[解 説]

グラフの位置関係の問題ですが，かなり感覚的なものに頼っています。(1)(2)ともに，もう少し詳しく書いた方がよかったかもしれません。

$\boxed{22}$　　［東北大・理］

(1)　$C: y=x^3-a^2x+a^3$ に対して，$y'=3x^2-a^2$ となり，接点を $(t,\ t^3-a^2t+a^3)$ とおくと，接線の方程式は，

$$y-(t^3-a^2t+a^3)=(3t^2-a^2)(x-t),\ \ y=(3t^2-a^2)x-2t^3+a^3$$

点 $\mathrm{P}(b,\ 0)$ を通ることより，

$$(3t^2-a^2)b-2t^3+a^3=0,\ \ 2t^3-3bt^2+a^2b-a^3=0\ \cdots\cdots\cdots①$$

3 次曲線に異なる 2 点で接する接線は存在しないので，接線が 3 本存在する条件は，①が異なる実数解を 3 個もつことに等しい。

そこで，①の左辺を $f(t)=2t^3-3bt^2+a^2b-a^3$ とおくと，

$$f'(t)=6t^2-6bt=6t(t-b)$$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	b	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$b>0$ より，$f(t)$ の増減は右表のようになり，求める条件は，

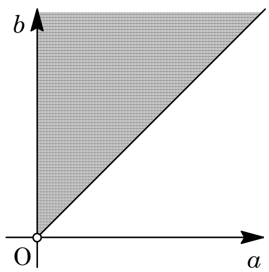
$$f(0)=a^2b-a^3=a^2(b-a)>0\ \cdots\cdots\cdots②$$

$$f(b)=-b^3+a^2b-a^3<0\ \cdots\cdots\cdots③$$

$a>0$ なので，②から，$b>a>0\cdots\cdots\cdots④$

③は，$-b(b^2-a^2)-a^3<0$ となり，④のもとで成立する。

よって，点 P から曲線 C に接線が 3 本引ける $a,\ b$ の条件は④であり，点 $(a,\ b)$ の存在する領域を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まない。



(2)　接線がちょうど 2 本引ける条件は，(1)より，$f(0)=0$ または $f(b)=0$ である。

(i)　$f(0)=0$ のとき　$b=a$

このとき，$f(t)=2t^3-3at^2=0$ の解は，$t=0,\ \dfrac{3}{2}a$ である。

そこで，接点を $\mathrm{A}(0,\ a^3)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{3}{2}a,\ \dfrac{23}{8}a^3\right)$ とおくと，$\mathrm{P}(a,\ 0)$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(-a,\ a^3),\ \ \overrightarrow{\mathrm{PB}}=\left(\frac{1}{2}a,\ \frac{23}{8}a^3\right)$$

$\angle\mathrm{APB}<90^\circ$ より，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}>0$ となり，$-\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{23}{8}a^6>0$ から，$a>\sqrt[4]{\dfrac{4}{23}}$

(ii)　$f(b)=0$ のとき　$b^3-a^2b+a^3=0$

$b>a>0$ のとき，$b(b^2-a^2)+a^3>0$ となり，成立しない。

$a\geqq b>0$ のとき，$b^3+a^2(a-b)>0$ となり，成立しない。

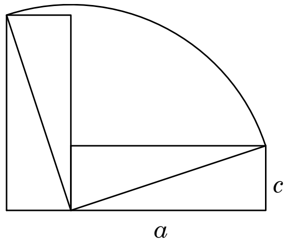
(i)(ii)より，求める条件は，$a=b>\sqrt[4]{\dfrac{4}{23}}$ である。

［解　説］

3 次曲線の接線の本数についての頻出問題です。

$\boxed{23}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大・理］

(1)　立体 V の回転軸に垂直な断面は，右図のように，半径 $\sqrt{a^2+c^2}$ の四分円に，直角をはさむ 2 辺の長さが a と c の直角三角形を 2 個合わせたものである。

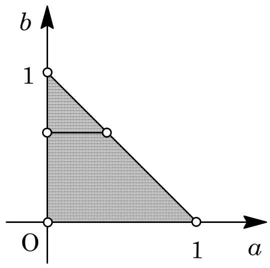


これより，V の体積 W は，

$$W=\left\{\frac{1}{4}\pi\left(\sqrt{a^2+c^2}\right)^2+2\cdot\frac{1}{2}ac\right\}b$$

$$=\frac{1}{4}\pi b(a^2+c^2)+abc\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　$c=1-a-b>0$ から，$a+b<1$ となり，①より，



$$W=\frac{1}{4}\pi b\{(a+c)^2-2ac\}+abc$$

$$=\frac{1}{4}\pi b(a+c)^2-\left(\frac{1}{2}\pi-1\right)abc$$

$$=\frac{1}{4}\pi b(1-b)^2-\left(\frac{1}{2}\pi-1\right)ab(1-a-b)$$

$$=\frac{1}{4}\pi b(1-b)^2-\left(\frac{1}{2}\pi-1\right)b\{-a^2+(1-b)a\}$$

$$=\frac{1}{4}\pi b(1-b)^2+\left(\frac{1}{2}\pi-1\right)b\left\{\left(a-\frac{1-b}{2}\right)^2-\frac{(1-b)^2}{4}\right\}\cdots\cdots\cdots②$$

②において，いったん b の値を固定して $W=f(a)$ とおくと，$0<a<1-b$ より，

$$f\left(\frac{1-b}{2}\right)\leqq f(a)<f(0)\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$f\left(\frac{1-b}{2}\right)=\frac{1}{4}\pi b(1-b)^2-\left(\frac{1}{2}\pi-1\right)b\cdot\frac{(1-b)^2}{4}=\left(\frac{1}{8}\pi+\frac{1}{4}\right)b(1-b)^2$

$$f(0)=\frac{1}{4}\pi b(1-b)^2$$

さらに，$g(b)=b(1-b)^2$ とおくと，

$$g'(b)=(1-b)^2-2b(1-b)$$

$$=(1-b)(1-3b)$$

b	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$g'(b)$		$+$	0	$-$	
$g(b)$	0	↗	$\frac{4}{27}$	↘	0

よって，$0<b<1$ のとき $0<g(b)\leqq\frac{4}{27}\cdots\cdots\cdots④$

すると，$f\left(\frac{1-b}{2}\right)=\left(\frac{1}{8}\pi+\frac{1}{4}\right)g(b)>0$，$f(0)=\frac{1}{4}\pi g(b)\leqq\frac{1}{4}\pi\cdot\frac{4}{27}=\frac{1}{27}\pi$

以上より，③④から，$0<W<\frac{1}{27}\pi$ である。

［解 説］

いったん 1 文字を固定することにより，とりうる値の範囲を求めていくという東大頻出の問題です。(2)において，W のとりうる範囲を，b を消去して $a+c$ と ac をもとに考えることもできますが，計算がやや煩雑になります。

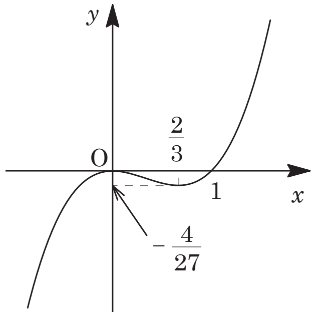
$\boxed{24}$ 　　　　［名古屋大・文］

(1)　$y=x^3-x^2$ ……①に対して，

$$y'=3x^2-2x=x(3x-2)$$

よって，①のグラフは右下図のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{4}{27}$	$\nearrow$



(2)　接点を $(t,\ t^3-t^2)$ とおくと，接線の方程式は，

$$y-(t^3-t^2)=(3t^2-2t)(x-t)$$

$$y=(3t^2-2t)x-2t^3+t^2 \text{ ………②}$$

②が点 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$ を通るので，$\frac{3}{2}(3t^2-2t)-2t^3+t^2=0$

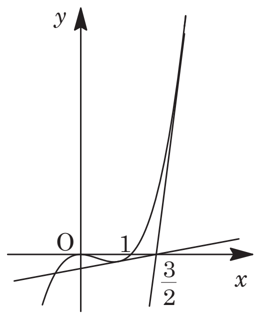
$$4t^3-11t^2+6t=0,\ t(4t-3)(t-2)=0$$

よって，$t=0,\ \frac{3}{4},\ 2$ となり，接線の方程式は②から，

それぞれ

$$y=0,\ y=\frac{3}{16}x-\frac{9}{32},\ y=8x-12$$

(3)　x の 3 次方程式 $x^3-x^2=p\left(x-\frac{3}{2}\right)$ の異なる実数解の個数は，曲線①と点 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$ を通る直線 $y=p\left(x-\frac{3}{2}\right)$ ……③の共有点の個数に一致する。



そして，(2)より，$p=0,\ \frac{3}{16},\ 8$ のとき，①と③は接する。

よって，求める実数解の個数は，図より $p<0$ のとき 1 個，$p=0$ のとき 2 個，$0<p<\frac{3}{16}$ のとき 3 個，$p=\frac{3}{16}$ のとき 2 個，$\frac{3}{16}<p<8$ のとき 1 個，$p=8$ のとき 2 個，$p>8$ のとき 3 個である。

［解 説］

方程式の異なる実数解の個数を，対応するグラフの共有点の個数に翻訳して考える頻出の問題です。

25　　［京都大・理］

原点Oを中心とする半径$\sqrt{6}$の球面Sの方程式は,

$$x^2+y^2+z^2=6 \cdots\cdots\cdots ①$$

3点$(4,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 4,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 4)$を通る平面αの方程式は,

$$x+y+z=4 \cdots\cdots\cdots ②$$

さて, 球面Sの中心Oと平面αの距離dは, $d=\dfrac{|-4|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

よって, $4<\sqrt{18}$から, $d=\dfrac{4}{\sqrt{3}}<\sqrt{6}$となり, 球面$S$と平面$\alpha$は共有点をもつ。

ここで, ①②をともに満たすx, y, zに対して, $xyz=k \cdots\cdots$③とおく。

①②より, $xy+yz+zx=\dfrac{1}{2}\{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\}=5 \cdots\cdots\cdots$④

すると, ②③④より, x, y, zはuに関する3次方程式$u^3-4u^2+5u-k=0$, すなわち$u^3-4u^2+5u=k \cdots\cdots$⑤の3つの実数解としてみることができる。

さらに, ⑤をuv平面上でとらえなおし,

$$v=u^3-4u^2+5u \cdots\cdots\cdots ⑥,\quad v=k \cdots\cdots\cdots ⑦$$

これより, kの値の範囲は, 曲線⑥と直線⑦が3個の共有点(接点は2個とみなす)をもつ条件として求めることができる。

⑥より, $v'=3u^2-8u+5=(3u-5)(u-1)$

曲線⑥の増減は右表のようになり, 曲線⑥とu軸に平行な直線⑦の共有点が3個(接点は2個とみなす)となるkの条件は, $\dfrac{50}{27}\leqq k\leqq 2$であるので,

u	$\cdots$	1	$\cdots$	$\dfrac{5}{3}$	$\cdots$
v'	$+$	0	$-$	0	$+$
v	↗	2	↘	$\dfrac{50}{27}$	↗

$$\frac{50}{27}\leqq xyz\leqq 2$$

［解　説］

導入は空間図形ですが, 内容は, 条件付きの最大・最小問題です。頻出題なので, 演習は必須です。

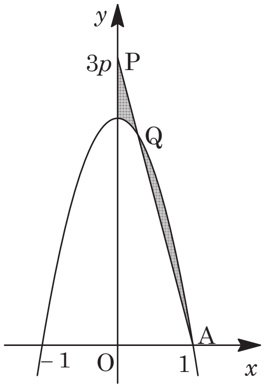
26　　　　［一橋大］

(1)　$C: y=-3x^2+3$ ……①と AP : $y=-3p(x-1)$ ……②を連立すると，

$$-3x^2+3=-3p(x-1),\ -3(x-1)(x+1-p)=0$$

よって，$x=1,\ p-1$ となり，線分 AP と C が A とは異なる点 Q を共有していることから，

$$0 \leqq p-1 < 1,\ 1 \leqq p < 2$$



(2)　C と線分 AQ で囲まれた領域 S_1 の面積 T_1 は，

$$T_1=\int_{p-1}^{1}\left\{-3x^2+3+3p(x-1)\right\}dx$$

$$=-3\int_{p-1}^{1}(x-1)(x+1-p)dx$$

$$=-3\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(1-p+1)^3=\frac{1}{2}(2-p)^3$$

また，C，線分 QP，および y 軸とで囲まれた領域 S_2 の面積 T_2 は，

$$T_2=\frac{1}{2}\cdot1\cdot3p+T_1-\int_0^1(-3x^2+3)dx=\frac{3}{2}p+T_1-\Big[-x^3+3x\Big]_0^1$$

$$=T_1+\frac{3}{2}p-2$$

ここで，S_1 と S_2 の面積の和を T とおくと，

$$T=T_1+T_2=2\cdot\frac{1}{2}(2-p)^3+\frac{3}{2}p-2=-p^3+6p^2-\frac{21}{2}p+6$$

$$T'=-3p^2+12p-\frac{21}{2}=-\frac{3}{2}(2p^2-8p+7)$$

$1 \leqq p < 2$ における $T'=0$ の解は，$p=\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}$ であり，T の増減は右表のようになる。

p	1	…	$\frac{4-\sqrt{2}}{2}$	…	2
T'		−	0	＋	
T		↘		↗	

よって，$p=\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}$ のとき T は最小となる。

［解 説］

T_2 は，普通に 0 から $p-1$ までの積分計算でも求められます。ただ，所要時間が 2 倍ほどになります。

27　　[京都大]

条件より，$x^2+xy+y^2=6$ から，$(x+y)^2-xy=6$ ………①

ここで，$u=x+y$，$v=xy$ とおくと，x, y は t の 2 次方程式 $t^2-ut+v=0$ の 2 つの実数解なので，

$$D=u^2-4v \geqq 0 \text{………②}$$

さて，①より，$u^2-v=6$，$v=u^2-6$ ………③

②③から，$u^2-4(u^2-6) \geqq 0$，$u^2-8 \leqq 0$，$-2\sqrt{2} \leqq u \leqq 2\sqrt{2}$ ………④

ここで，$z=x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$ とおくと，③から，

$$z=xy(x+y)-(x+y)^2+(x+y)=uv-u^2+u=u(u^2-6)-u^2+u$$
$$=u^3-u^2-5u$$
$$z'=3u^2-2u-5$$
$$=(3u-5)(u+1)$$

u	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$	$2\sqrt{2}$
z'		$+$	0	$-$	0	$+$	
z		$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\frac{175}{27}$	$\nearrow$	

さらに，$u=\pm\sqrt{2}$ のとき，$z=-8\pm 6\sqrt{2}$（複号同順）となるので，上表から，④における z のとりうる値の範囲は，

$$-8-6\sqrt{2} \leqq x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y \leqq 3$$

[解　説]

対称式であることに気付けば，$u=x+y$，$v=xy$ という置き換えにつながります。なお，実数条件を忘れないことがポイントです。

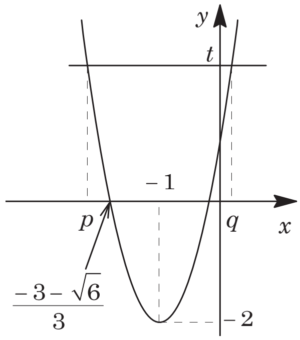
$\boxed{28}$　　［九州大・文］

(1)　$f(x)=x^3+3x^2+x-1$ に対して,

$$f'(x)=3x^2+6x+1$$

ここで, $t \geqq 0$ のとき, $f'(x)=t$ とすると,

$$3x^2+6x+1=t,\ 3(x+1)^2-2=t \cdots\cdots\cdots①$$



右図より, ①は異なる 2 つの実数解をもつことより, 接点が 2 個, すなわち接線が 2 本存在する。

(2)　①の解が $x=p,\ q\ (p<q)$ なので,

$$p+q=-\frac{6}{3}=-2 \cdots\cdots\cdots②$$

$$f(p)+f(p)=p^3+3p^2+p-1+q^3+3q^2+q-1$$
$$=(p+q)^3-3pq(p+q)+3(p+q)^2-6pq+(p+q)-2$$

②より, $f(p)+f(p)=-8+6pq+12-6pq-2-2=0$

よって, $\dfrac{p+q}{2}=-1$, $\dfrac{f(p)+f(p)}{2}=0$ となり, $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ と $\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ は $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ に関して対称の位置にある。

(3)　$p \leqq \dfrac{-3-\sqrt{6}}{3}$ として, $\mathrm{PA}^2=(p+1)^2+(p^3+3p^2+p-1)^2$

ここで, $u=(p+1)^2$ とおくと, $p+1 \leqq -\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ から, $u \geqq \dfrac{2}{3}$ となり,

$$\mathrm{PA}^2=(p+1)^2+\left\{(p+1)^3-2(p+1)\right\}^2=u+u(u-2)^2=u^3-4u^2+5u$$

$g(u)=u^3-4u^2+5u$ とおくと,

$$g'(u)=3u^2-8u+5$$
$$=(3u-5)(u-1)$$

u	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$
$g'(u)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$g(u)$	$\frac{50}{27}$	↗	2	↘	$\frac{50}{27}$	↗

すると, $g(u)$ の増減は右表のようになり, $u=\dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{3}$ で最小値 $\dfrac{50}{27}$ をとる。

さて, (2)より, $\mathrm{PQ}=2\mathrm{PA}=2\sqrt{g(u)}$ となるので, PQ の最小値は,

$$2\sqrt{\frac{50}{27}}=\frac{10\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}=\frac{10\sqrt{6}}{9}$$

$u=\dfrac{2}{3}$ では, $p=-1-\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{-3-\sqrt{6}}{3}$, ②より, $q=\dfrac{-3+\sqrt{6}}{3}$

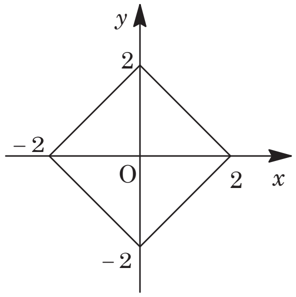
$u=\dfrac{5}{3}$ では, $p=-1-\sqrt{\dfrac{5}{3}}=\dfrac{-3-\sqrt{15}}{3}$, ②より, $q=\dfrac{-3+\sqrt{15}}{3}$

［解 説］

(3)の変数の置き換えは, 2 段階だったものを, まとめて記しています。

29　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［一橋大］

まず，方程式$|x|+|y|=2$……①で表される図形は，対称性を考えると，右図の正方形となる。



また，$y=x^3-3a^2x$……②に対して，

(i)　$a=0$ のとき

②が，$y=x^3$ となることより，①の図形と②のグラフの共有点は明らかに 2 個である。

(ii)　$a>0$ のとき

$$y'=3x^2-3a^2=3(x-a)(x+a)$$

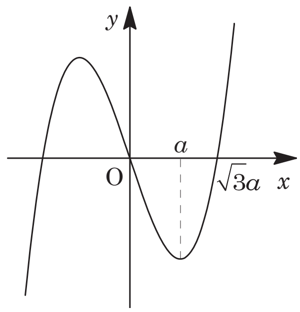
グラフが原点対称であることを考え，$x \geqq 0$ における増減について調べると，右表のようになる。

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y	0	↘		↗

$x>0$ における②のグラフと x 軸との交点は，

$$x^3-3a^2x=0\,,\ x=\sqrt{3}a$$

これより，②のグラフの概形は右図のようになる。



さて，①の図形と②のグラフの共有点の個数について，まず，第 1 象限には，$\sqrt{3}a<2\left(0<a<\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)$のとき 1 個存在し，それ以外のときは存在しない。

次に，x 軸の正の部分には，$\sqrt{3}a=2\left(a=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)$のとき 1 個存在し，それ以外のときは存在しない。

さらに，第 4 象限での共有点の個数を調べるために，②と $y=x-2\ (0<x<2)$ とを連立して，

$$x^3-3a^2x=x-2\,,\ x^3-(3a^2+1)x+2=0\ \cdots\cdots③$$

ここで，$f(x)=x^3-(3a^2+1)x+2$ とおくと，③は$f(x)=0$となり，

$$f'(x)=3x^2-(3a^2+1)$$

すると，$x>0$ における$f(x)$の増減は右表のようになり，

x	0	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{3a^2+1}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	2	↘		↗

$$f\left(\sqrt{\frac{3a^2+1}{3}}\right)=-\frac{2(3a^2+1)}{3}\sqrt{\frac{3a^2+1}{3}}+2$$

そこで，$f\left(\sqrt{\dfrac{3a^2+1}{3}}\right)<0$ とすると，$\dfrac{3a^2+1}{3}\sqrt{\dfrac{3a^2+1}{3}}=\left(\dfrac{3a^2+1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}>1$となり，

$$\frac{3a^2+1}{3}>1\,,\ a>\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

すなわち，第 4 象限での共有点の個数は，$\dfrac{\sqrt{6}}{3}<\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ に注意すると，$a=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ のとき 1 個，$\dfrac{\sqrt{6}}{3}<a<\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 2 個，また $a\geqq\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 1 個となる。それ以外のときは存在しない。

よって，$a>0$ では，$0<a<\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ のとき 1 個，$a=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ のとき 2 個，$\dfrac{\sqrt{6}}{3}<a<\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 3 個，$a=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 2 個，$a>\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 1 個となる。

(i)(ii)より，①の図形と②のグラフが，ともに原点対称であることを考え合わせると，求める共有点の個数は以下のようになる。

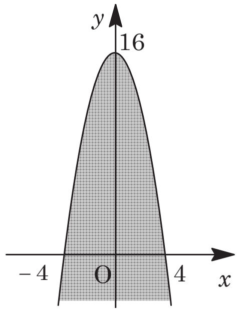
$0\leqq a<\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$a>\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 2 個，$a=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 4 個，$\dfrac{\sqrt{6}}{3}<a<\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 6 個である。

［解 説］

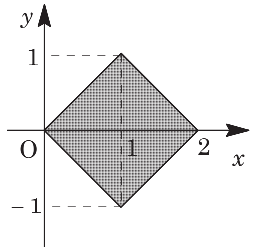
a の変化に伴う②のグラフの動きを視覚的にとらえて解く問題です。この下書きの段階で計算の手順が決まります。

$\boxed{30}$　　　　［大阪大・文］

(1)　領域 D は，放物線 $y=-x^2+16$ ……①の下部であり，右図の網点部となる。ただし，境界線は含まない。



　領域 E は，中心が点 $(1,\ 0)$ である正方形 $|x-1|+|y|=1$ の内部であり，右下図の網点部となる。ただし，境界線は含む。



(2)　領域 D に点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ が属するので，$b<-a^2+16$ ………②

　さて，点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ を通り傾きが $-2a$ の直線の直線は，

$$y-b=-2a(x-a),\ \ y=-2ax+2a^2+b \ \cdots\cdots\cdots ③$$

　①③を連立して，$-x^2+16=-2ax+2a^2+b$

$$x^2-2ax+2a^2+b-16=0$$

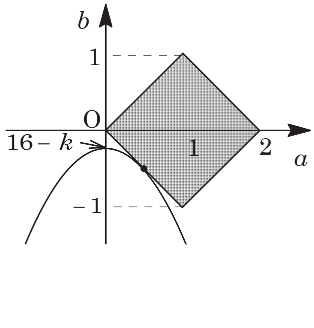
　②より，異なる実数解をもち，$x=a\pm\sqrt{-a^2-b+16}$

　この解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，①③で囲まれた部分の面積 $S(a,\ b)$ は，

$$\begin{aligned}S(a,\ b)&=\int_\alpha^\beta -(x^2-2ax+2a^2+b-16)\,dx\\&=\int_\alpha^\beta -(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\\&=\frac{1}{6}\left(2\sqrt{-a^2-b+16}\right)^3=\frac{4}{3}\left(\sqrt{-a^2-b+16}\right)^3\end{aligned}$$

(3)　点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ が領域 E を動くとき，$|a-1|+|b|\leqq 1$ ………④

　また，(2)より，$-a^2-b+16=k$ ……⑤とおくと，$S(a,\ b)=\dfrac{4}{3}(\sqrt{k})^3$ となり，k が最大となるとき，$S(a,\ b)$ は最大値をとる。そこで，ab 平面上において，④と⑤が共有点をもつ k の最大値を求める。



　さて，⑤から $b=-a^2+16-k$ ……⑥となり，④の境界線 $b=-a$ と接するのは，⑥から $b'=-2a$ となるので，

$$-2a=-1,\ \ a=\frac{1}{2}$$

　このとき，$b=-\dfrac{1}{2}$ となり，$16-k\geqq\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{4}$

$$k\leqq 16+\frac{1}{4}=\frac{65}{4}$$

　以上より，$k=\dfrac{65}{4}$ のとき，$S(a,\ b)$ は最大値 $\dfrac{4}{3}\left(\sqrt{\dfrac{65}{4}}\right)^3=\dfrac{65}{6}\sqrt{65}$ をとる。

［解　説］

領域が絡んだ微積分の標準レベルの総合問題です。

31　　［名古屋大・理］

(1)　$C: y = x^3 - a^2 x$ ……①に対して，$y' = 3x^2 - a^2$ となり，点 $\mathrm{A}(t,\ t^3 - a^2 t)$ における C の接線 l の方程式は,

$$y - (t^3 - a^2 t) = (3t^2 - a^2)(x - t),\quad y = (3t^2 - a^2)x - 2t^3 \cdots\cdots\cdots ③$$

①②を連立して，$x^3 - a^2 x = (3t^2 - a^2)x - 2t^3$

$$x^3 - 3t^2 x + 2t^3 = 0,\quad (x-t)^2(x+2t) = 0$$

よって，$x = t,\ -2t$ となり，$t \neq 0$ から, l と C で囲まれた図形の面積 $S(t)$ は,

$$S(t) = \left|\int_{-2t}^{t}(x-t)^2(x+2t)\,dt\right| = \left|\int_{-2t}^{t}(x-t)^2(x-t+3t)\,dt\right|$$

$$= \left|\int_{-2t}^{t}\left\{(x-t)^3 + 3t(x-t)^2\right\}dt\right| = \left|\left[\frac{1}{4}(x-t)^4 + t(x-t)^3\right]_{-2t}^{t}\right|$$

$$= \left|-\frac{81}{4}t^4 + 27t^4\right| = \frac{27}{4}t^4$$

(2)　接線 l が点 $\mathrm{B}(2a,\ b)$ を通る条件は,

$$b = (3t^2 - a^2)\cdot 2a - 2t^3,\quad -2t^3 + 6at^2 - 2a^3 = b \cdots\cdots\cdots ④$$

ここで，$f(t) = -2t^3 + 6at^2 - 2a^3$ とおくと,

$$f'(t) = -6t^2 + 12at = -6t(t-2a)$$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	$\searrow$	$-2a^3$	$\nearrow$	$6a^3$	$\searrow$

さて, 曲線 C には異なる 2 点で接する接線が存在しないので, ④の実数解の個数は接線の本数と等しい。

よって, 接線の本数は, $-2a^3 < b < 6a^3$ のとき 3 本, $b = -2a^3$, $6a^3$ のとき 2 本, $b < -2a^3$, $6a^3 < b$ のとき 1 本である。

(3)　(i)　$b = -2a^3$ のとき

④より，$-2t^3 + 6at^2 = 0$ となり，$t = 0,\ 3a$

すると，$t = 0$ のとき接線 l は原点を通るので不適である。

(ii)　$b = 6a^3$ のとき

④より，$-2t^3 + 6at^2 - 8a^3 = 0$ となり，$(t-2a)^2(t+a) = 0$

(1)より, l と C で囲まれた図形の面積は，$t = 2a$ のとき $\dfrac{27}{4}\cdot(2a)^4 = 16\cdot\dfrac{27}{4}a^4$ であり，$t = -a$ のとき $\dfrac{27}{4}\cdot(-a)^4 = \dfrac{27}{4}a^4$ となる。

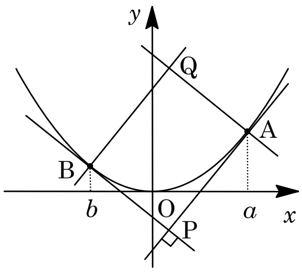
すると，$S_1 \geqq S_2$ から，$S_1 = 16\cdot\dfrac{27}{4}a^4$，$S_2 = \dfrac{27}{4}a^4$ となり，$\dfrac{S_1}{S_2} = 16$ である。

［解 説］

次の課程では, 文理共通範囲で頻出と思われる典型題の集まりです。

$\boxed{32}$

［千葉大］



(1)　$y=\dfrac{x^2}{4}$ より $y'=\dfrac{x}{2}$ となり，点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{a^2}{4}\right)$ における接線 l_{A}，$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{b^2}{4}\right)$ における接線 l_{B} の傾きは，それぞれ $\dfrac{a}{2}$，$\dfrac{b}{2}$ である。

ここで，l_{A} と l_{B} が直交していることより，

$$\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}=-1,\ b=-\frac{4}{a}\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　まず，$l_{\mathrm{A}}: y-\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{a}{2}(x-a)$ より，$y=\dfrac{a}{2}x-\dfrac{a^2}{4}\cdots\cdots\cdots②$

$$l_{\mathrm{B}}: y=\frac{b}{2}x-\frac{b^2}{4}\cdots\cdots\cdots③$$

②③を連立すると，$\dfrac{a}{2}x-\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{b}{2}x-\dfrac{b^2}{4}$ より，$(a-b)x=\dfrac{a^2-b^2}{2}$ となり，

$$x=\frac{a+b}{2},\ y=\frac{a}{2}\cdot\frac{a+b}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{ab}{4}$$

①を代入すると，$x=\dfrac{a}{2}-\dfrac{2}{a}$，$y=-1$ より，$\mathrm{P}\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{2}{a},\ -1\right)$ となる。

また，四角形 AQBP は長方形なので，対角線 AB の中点 $\left(\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{a^2+b^2}{8}\right)$ と対角線 PQ の中点が一致することより，$\mathrm{Q}(x,\ y)$ とおくと，①から，

$$x=\frac{a+b}{2}=\frac{a}{2}-\frac{2}{a},\ y=2\cdot\frac{a^2+b^2}{8}-(-1)=\frac{1}{4}\left(a^2+\frac{16}{a^2}\right)+1=\frac{a^2}{4}+\frac{4}{a^2}+1$$

よって，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{2}{a},\ \dfrac{a^2}{4}+\dfrac{4}{a^2}+1\right)$ となる。

(3)　長方形 AQBP の面積を S とおくと，

$$S=\frac{1}{2}\left\{\frac{a^2}{4}+\frac{4}{a^2}+1-(-1)\right\}(a-b)=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{4}+\frac{4}{a^2}+2\right)\left(a+\frac{4}{a}\right)$$
$$=\frac{1}{8}\left(a^2+\frac{16}{a^2}+8\right)\left(a+\frac{4}{a}\right)=\frac{1}{8}\left(a+\frac{4}{a}\right)^3$$

ここで，相加平均と相乗平均の関係より，$a+\dfrac{4}{a}\geqq 2\sqrt{4}=4$

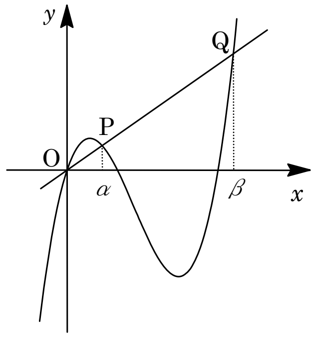
なお，等号は，$a=\dfrac{4}{a}$ すなわち $a=2$ のとき成立する。

以上より，S は $a=2$ のとき最小値 $\dfrac{1}{8}\cdot 4^3=8$ をとる。

［解　説］

放物線の接線と法線を題材とした問題ですが，長方形の性質を利用して，計算量を減らしています。

33　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大・文］



$C: y=x(x-1)(x-3)$ ……①，$l: y=tx$ ……②に対して，共有点の x 座標は,

$$x(x-1)(x-3)=tx,\ x(x^2-4x+3-t)=0$$

$x\neq 0$ とすると，$x^2-4x+3-t=0$ ………③

さて, C と l が O 以外の共有点をもつ条件は，③が $x\neq 0$ の解をもつことである。さらに，③が重解として $x=0$ をもつ場合はないことに注意すると，条件は,

$$D/4=4-(3-t)=1+t\geqq 0,\ t\geqq -1 \text{ ………④}$$

ここで，④のとき，③の解を $x=\alpha,\ \beta$ とおくと,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(\alpha,\ t\alpha),\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(\beta,\ t\beta)$$

これより，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ と $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ の積 $g(t)$ は,

$$g(t)=\sqrt{1+t^2}\,|\alpha|\cdot\sqrt{1+t^2}\,|\beta|=(1+t^2)|\alpha\beta|=(1+t^2)|3-t|$$

(i)　$t\geqq 3$ のとき

$$g(t)=-(1+t^2)(3-t)=t^3-3t^2+t-3,\ g'(t)=3t^2-6t+1$$

$g'(t)=0$ の解は，$t=\dfrac{3\pm\sqrt{6}}{3}$ となり，ともに $t<3$ である。

(ii)　$-1\leqq t<3$ のとき

$$g(t)=(1+t^2)(3-t)=-(t^3-3t^2+t-3),\ g'(t)=-(3t^2-6t+1)$$

(i)(ii)より，$g(t)$ の増減は右表のようになる。

t	-1	$\cdots$	$\frac{3-\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$	$\frac{3+\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$+$
$g(t)$		↘		↗		↘	0	↗

さて，$-1\leqq t<3$ のとき，$g(t)$ を $g'(t)$ で割ると,

$$g(t)=g'(t)\Big(\frac{1}{3}t-\frac{1}{3}\Big)+\Big(\frac{4}{3}t+\frac{8}{3}\Big)$$

すると，$g\Big(\dfrac{3\pm\sqrt{6}}{3}\Big)=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{3\pm\sqrt{6}}{3}+\dfrac{8}{3}=\dfrac{36\pm4\sqrt{6}}{9}$　(複号同順)

よって，$g(t)$ の極大値は $\dfrac{36+4\sqrt{6}}{9}$ $\Big(t=\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}\Big)$，極小値は $\dfrac{36-4\sqrt{6}}{9}$ $\Big(t=\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}\Big)$，および $0\,(t=3)$ である。

［解　説］

微分と増減についての標準的な問題です。

$\boxed{34}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［神戸大・理］

(1)　2 次以下の多項式 $f(x)$ に対し，曲線 $y=f(x)$ が点 $(0,\ 0)$ を通ることより，

$$f(x)=ax^2+bx\quad(a,\,b\text{ は定数})$$

さらに，点 $(c,\ c^3-2c)$，$(1,\ -1)$ も通るので，$f(c)=c^3-2c$，$f(1)=-1$ となり，

$$ac^2+bc=c^3-2c\cdots\cdots\cdots①,\quad a+b=-1\cdots\cdots\cdots②$$

$0<c<1$ から，①より $ac+b=c^2-2$ となり，②と合わせて，

$$ac-a=c^2-1,\quad a(c-1)=(c+1)(c-1)$$

よって，$a=c+1$，$b=-1-(c+1)=-c-2$ となるので，

$$f(x)=(c+1)x^2-(c+2)x$$

(2)　$y=(c+1)x^2-(c+2)x$ と $y=x^3-2x$ を連立すると，

$$x^3-2x=(c+1)x^2-(c+2)x,\quad x^3-(c+1)x^2+cx=0$$

すると，$x(x-c)(x-1)=0$ より $x=0,\ c,\ 1$ となり，2 曲線で囲まれた部分の面積 S は，$0<x<c$ で $x(x-c)(x-1)>0$，$c<x<1$ で $x(x-c)(x-1)<0$ から，

$$S=\int_0^c x(x-c)(x-1)\,dx+\int_c^1 -x(x-c)(x-1)\,dx$$

$$=\Big[\frac{x^4}{4}-\frac{c+1}{3}x^3+\frac{c}{2}x^2\Big]_0^c-\Big[\frac{x^4}{4}-\frac{c+1}{3}x^3+\frac{c}{2}x^2\Big]_c^1$$

$$=\frac{c^4}{4}-\frac{c^4+c^3}{3}+\frac{c^3}{2}-\frac{1}{4}(1-c^4)+\frac{c+1}{3}(1-c^3)-\frac{c}{2}(1-c^2)$$

$$=-\frac{c^4}{6}+\frac{c^3}{3}-\frac{c}{6}+\frac{1}{12}$$

(3)　(2)より，$S'=-\dfrac{2}{3}c^3+c^2-\dfrac{1}{6}=-\dfrac{1}{6}(2c-1)(2c^2-2c-1)$

ここで，$S'=0$ の解は $c=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$ なので，$0<c<1$ における S の値の増減は，右表のようになる。

c	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
S'		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$		$\nearrow$	

これより，$c=\dfrac{1}{2}$ のとき S は最小になる。

［解　説］

微積分に関する標準的な問題です。(2)では，図が描きにくいので，式を基準として考えた方が明快でしょう。

35　　　　　　［一橋大］

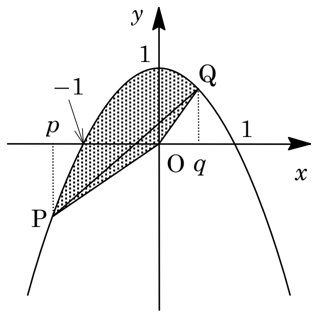
(1)　放物線 $C: y=1-x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ 1-p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ 1-q^2)$ $(p<q)$ に対して，直線PQの方程式は，

$$y-(1-p^2)=\frac{(1-q^2)-(1-p^2)}{q-p}(x-p),\quad y=-(p+q)x+1+pq$$

さて，C と直線PQに囲まれた部分の面積を S_1 とすると，

$$S_1=\int_p^q\{1-x^2+(p+q)x-1-pq\}dx=\int_p^q\{-x^2+(p+q)x-pq\}dx$$

$$=-\int_p^q(x-p)(x-q)dx=\frac{1}{6}(q-p)^3$$



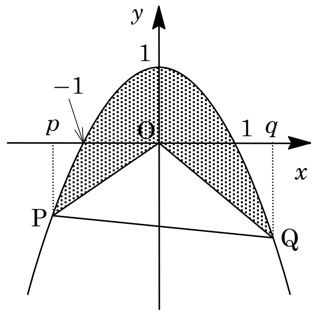
また，△OPQ の面積を S_2 とすると，

$$S_2=\frac{1}{2}\left|q(1-p^2)-p(1-q^2)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|(q-p)+pq(q-p)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|(q-p)(1+pq)\right|=\frac{1}{2}(q-p)\left|1+pq\right|$$

すると，2つの線分OP，OQと放物線 C で囲まれた部分の面積 S は，直線PQの y 切片に注目し，



(i)　$1+pq\geqq 0$ のとき

$$S=S_1+S_2=\frac{1}{6}(q-p)^3+\frac{1}{2}(q-p)(1+pq)$$

(ii)　$1+pq<0$ のとき

$$S=S_1-S_2=\frac{1}{6}(q-p)^3+\frac{1}{2}(q-p)(1+pq)$$

(i)(ii)より，$S=\frac{1}{6}(q-p)^3+\frac{1}{2}(q-p)(1+pq)=\frac{1}{6}(q-p)(p^2+pq+q^2+3)$

(2)　$q=p+1$ のとき，(1)より，$S=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\{1+p(p+1)\}$ となり，

$$S=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\left\{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}=\frac{1}{2}\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{13}{24}$$

よって，$p=-\frac{1}{2}$ のとき，S は最小値 $\frac{13}{24}$ をとる。

(3)　$pq=-1$ のとき，$p<q$ から，$p<0<q$ であり，(1)より，

$$S=\frac{1}{6}\left(q+\frac{1}{q}\right)^3\geqq\frac{1}{6}\left(2\sqrt{q\cdot\frac{1}{q}}\right)^3=\frac{4}{3}$$

等号は $q=\frac{1}{q}$　$(q=1)$ のとき成立するので，このとき S は最小値 $\frac{4}{3}$ をとる。

［解 説］

面積の標準的な問題ですが，場合分けをなるべく後回しにしていく工夫が必要です。

36　　　　［北海道大・文］

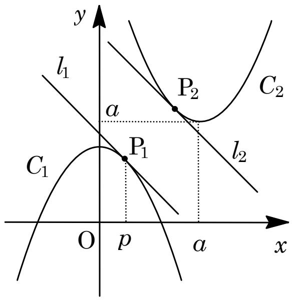
(1)　$C_1: y=-x^2+\dfrac{3}{2}$ ……①，$C_2: y=(x-a)^2+a$ ……②を連立すると，

$$-x^2+\frac{3}{2}=(x-a)^2+a,\ \ 4x^2-4ax+2a^2+2a-3=0$$

C_1 と C_2 が共有点をもたないことより，$D/4=4a^2-4(2a^2+2a-3)<0$

$$a^2+2a-3>0,\ \ (a+3)(a-1)>0$$

$a>0$ より，$a>1$ である。



(2)　①より $y'=-2x$ となり，点 $P_1\left(p,\ -p^2+\dfrac{3}{2}\right)$ における C_1 の接線 l_1 の傾きは $-2p$ である。そこで，l_1 と平行な C_2 の接線 l_2 の方程式を $y=-2px+k$ ……③とおく。

②③を連立すると，$(x-a)^2+a=-2px+k$ となり，

$$x^2-2(a-p)x+a^2+a-k=0 \text{ ………④}$$

④が重解をもつことより，$D/4=(a-p)^2-(a^2+a-k)=0$

$$-2ap+p^2-a+k=0,\ \ k=-p^2+2ap+a$$

よって，$l_2: y=-2px-p^2+2ap+a$ である。

また，l_2 と C_2 の接点 P_2 の x 座標は，④の重解なので，

$$x=a-p,\ \ y=(a-p-a)^2+a=p^2+a$$

これより，$P_2(a-p,\ a+p^2)$ となる。

(3)　(2)より，$\overrightarrow{P_1P_2}=\left(a-p-p,\ a+p^2+p^2-\dfrac{3}{2}\right)=\left(a-2p,\ a+2p^2-\dfrac{3}{2}\right)$

また，l_1 の方向ベクトルを $\vec{u}=(1,\ -2p)$ とすると，条件より $\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\vec{u}=0$ となり，

$$a-2p-2p\left(a+2p^2-\frac{3}{2}\right)=0,\ \ a+p-4p^3-2ap=0$$

すると，$(1-2p)a+p(1-2p)(1+2p)=0$，$(1-2p)(2p^2+p+a)=0$ ………⑤

ここで，(1)から $a>1$ のとき，$2p^2+p+a=0$ の判別式 $D=1-8a<0$ となるので，$2p^2+p+a=0$ は実数解をもたない。

よって，⑤より，$p=\dfrac{1}{2}$ である。

［解 説］

放物線と接線を題材にした基本問題です。(2)では重解条件を利用しましたが，まず接点 P_2 を設定する方法でも構いません。

37　　　　［北海道大・理］

(1)　$f(x)=x^4-4x^3-8x^2$ に対し，$f'(x)=4x^3-12x^2-16x=4x(x+1)(x-4)$

$f(x)$ の増減は右表のようになり，極大値は $x=0$ のとき 0，極小値は $x=-1$ のとき -3 および $x=4$ のとき -128 である。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\searrow$	-128	$\nearrow$

(2)　曲線 $y=f(x)$ に 2 点 $(a,\ f(a))$ と $(b,\ f(b))$ $(a<b)$ で接する直線の方程式を，$y=mx+n$ とおくと，$f(x)-(mx+n)=0$ は重解 $x=a,\ b$ をもつので，

$$f(x)-(mx+n)=(x-a)^2(x-b)^2g(x)\quad(g(x)\text{は整式})$$

ここで，$f(x)-(mx+n)$ は x^4 の係数が 1 の 4 次式なので，$g(x)=1$ となり，

$$x^4-4x^3-8x^2-mx-n=(x-a)^2(x-b)^2\ \cdots\cdots\cdots①$$

すると，①の x^3，x^2，x の係数および定数項を比較すると，

$$-4=-2a-2b\ \cdots\cdots\cdots②,\quad -8=a^2+4ab+b^2\ \cdots\cdots\cdots③$$

$$-m=-2a^2b-2ab^2\ \cdots\cdots\cdots④,\quad -n=a^2b^2\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

②より $a+b=2\cdots\cdots⑥$ となり，③を $(a+b)^2+2ab=-8$ として代入すると，

$$4+2ab=-8,\quad ab=-6\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

⑥⑦より，$a,\ b$ は 2 次方程式 $t^2-2t-6=0$ の 2 つの解 $t=1\pm\sqrt{7}$ となり，

$$a=1-\sqrt{7},\quad b=1+\sqrt{7}$$

このとき，④より $m=2ab(a+b)=-24$，⑤より $n=-a^2b^2=-36$

よって，求める接線の方程式は，$y=-24x-36$ である。

［解　説］

4 次曲線の複接線を求める定番ともいえるものです。なお，$f(x)-(mx+n)=0$ が重解をもつことは証明なしで利用したため，単に恒等式の処理だけになっています。

$\boxed{38}$　　　　［岡山大・文］

(1)　$f(x)-x=[x]+2(x-[x])-(x-[x])^2-x=(x-[x])-(x-[x])^2$

ここで，$t=x-[x]$ とおくと，$0\leqq t<1$ となり，

$$f(x)-x=t-t^2=t(1-t)\geqq 0$$

よって，$f(x)\geqq x$（等号は x が整数のとき成立）

(2)　$n\leqq x<n+1$ のとき，$[x]=n$，$[x+1]=n+1$ となり，

$$\begin{aligned}f(x+1)&=[x+1]+2(x+1-[x+1])-(x+1-[x+1])^2\\&=n+1+2(x+1-n-1)-(x+1-n-1)^2\\&=n+2(x-n)-(x-n)^2+1=[x]+2(x-[x])-(x-[x])^2+1\\&=f(x)+1\end{aligned}$$

(3)　(i)　$0\leqq x<1$ のとき　$[x]=0$ より，

$$f(x)=2x-x^2=-(x-1)^2+1$$

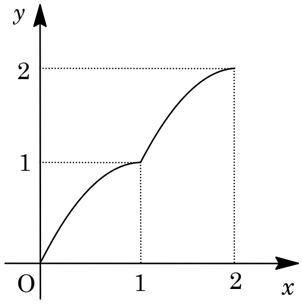
(ii)　$1\leqq x<2$ のとき　(2)より，$f(x)=f(x-1)+1$

すると，$0\leqq x-1<1$ より，

$$f(x)=-(x-1-1)^2+1+1=-(x-2)^2+2$$

(iii)　$x=2$ のとき　(1)より，$f(x)=2$

(i)～(iii)より，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



(4)　$0\leqq a<1$ のとき，$\displaystyle\int_1^{a+1}f(x)dx=\int_0^a\{f(x)+1\}dx=\int_0^a f(x)dx+a$ なので，

$$\begin{aligned}\int_a^{a+1}f(x)dx&=\int_a^1 f(x)dx+\int_1^{a+1}f(x)dx\\&=\int_a^1 f(x)dx+\int_0^a f(x)dx+a=\int_0^1 f(x)dx+a\\&=\Big[-\frac{x^3}{3}+x^2\Big]_0^1+a=a+\frac{2}{3}\end{aligned}$$

［解　説］

ガウス記号のついた関数が題材で，誘導つきであるものの慣れないとやや難しめと思われます。(4)については，(3)のグラフから面積を対応させて計算しています。

$\boxed{39}$　［京都大・文］

(1)　$C: y=x^3-x$ ……①に対して $y'=3x^2-1$ となり，点 $(s,\ s^3-s)$ における接線は，

$$y-(s^3-s)=(3s^2-1)(x-s),\quad y=(3s^2-1)x-2s^3 \text{ ………②}$$

接線②が $\mathrm{P}(1,\ t)$ を通ることより，$t=3s^2-1-2s^3$ ………③

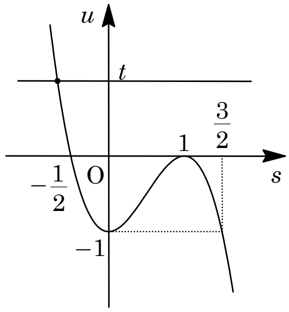
ここで，$f(s)=3s^2-1-2s^3$ とおくと，

$$f'(s)=6s-6s^2=-6s(s-1)$$

これより $f(s)$ の増減は右表のようになる。

s	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(s)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(s)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$

さて，接線がちょうど 1 本だけ引ける条件は，③を満たす実数解 s が 1 つだけ存在する条件に対応する。言い換えると，$u=f(s)$ と $u=t$ のグラフが共有点を 1 つだけもつことより，右図から，



$$t<-1,\quad 0<t \text{ ………④}$$

(2)　①②を連立すると，$x^3-x=(3s^2-1)x-2s^3$ から，

$$x^3-3s^2x+2s^3=0,\quad (x-s)^2(x+2s)=0$$

これより，$x=s,\ -2s$ となる。この共有点間で，曲線①と接線②について上下の位置関係は変わらないので，囲まれた部分の面積 $S(t)$ は，

$$S(t)=\left|\int_s^{-2s}-(x-s)^2(x+2s)\,dx\right|=\left|\int_s^{-2s}(x-s)^2(x-s+3s)\,dx\right|$$

$$=\left|\int_s^{-2s}\{(x-s)^3+3s(x-s)^2\}\,dx\right|=\left|\Big[\frac{1}{4}(x-s)^4+s(x-s)^3\Big]_s^{-2s}\right|$$

$$=\left|\frac{81}{4}s^4-27s^4\right|=\frac{27}{4}s^4$$

ここで，④のとき，右上のグラフより，$s<-\dfrac{1}{2}$ または $s>\dfrac{3}{2}$ となるので，

$$S(t)>\frac{27}{4}\cdot\left|-\frac{1}{2}\right|^4=\frac{27}{64}$$

［解　説］

微積分の拡張領域からの出題です。2015 年度からは，数学Ⅱの頻出タイプとなるでしょう。