1　　［東北大・理］

連立不等式 $x^2-6x+y^2+5 \leqq 0$，$x+y \leqq 5$ の表す領域 D を図示せよ。また，曲線 $x^2+y^2-2ax-2y+a^2=0$ が D の点を通るような実数 a の最大値と最小値を求めよ。

2　　［名古屋大・理］

座標平面上に 3 点$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(4,\ 2)$，$\mathrm{B}(6,\ 0)$を考える。平面上の直線 l に関して点 A と対称な点が線分 OB 上にあるとき，直線 l をピッタリ直線と呼ぶことにする。

(1)　点$\mathrm{P}(p,\ q)$を通るピッタリ直線 l があるとし，l に関して A と対称な点を $\mathrm{A}'(t,\ 0)$ $(0 \leqq t \leqq 6)$ とするとき，p，q，t の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2)　ピッタリ直線が 2 本通る点$\mathrm{P}(p,\ q)$の存在範囲を求め，それを図示せよ。図には三角形 OAB も書いておくこと。

(3)　点$\mathrm{P}(p,\ q)$を通る 2 本のピッタリ直線が直交するような点$\mathrm{P}(p,\ q)$の存在範囲を求め，それを図示せよ。

$\boxed{3}$　[北海道大・理]

実数 x, y, z は $x \leqq y \leqq z \leqq 1$ かつ $4x + 3y + 2z = 1$ を満たすとする。

(1)　x の最大値と y の最小値を求めよ。

(2)　$3x - y + z$ の値の範囲を求めよ。

$\boxed{4}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［神戸大・文］

実数 t に対して, xy 平面上の直線 $l_t : y = 2tx - t^2$ を考える。次の問いに答えよ。

(1)　点 P を通る直線 l_t はただ 1 つであるとする。このような点 P の軌跡の方程式を求めよ。

(2)　t が $|t| \geqq 1$ の範囲を動くとき, 直線 l_t が通る点 $(x,\ y)$ の全体を図示せよ。

5　［千葉大・理］

a, t を実数とするとき，座標平面において，$x^2+y^2-4-t(2x+2y-a)=0$ で定義される図形 C を考える。

(1)　すべての t に対して C が円であるような a の範囲を求めよ。ただし，点は円とみなさないものとする。

(2)　$a=4$ とする。t が $t>0$ の範囲を動くとき，C が通過してできる領域を求め，図示せよ。

(3)　$a=6$ とする。t が $t>0$ であって，かつ C が円であるような範囲を動くとき，C が通過してできる領域を求め，図示せよ。

$\boxed{6}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［北海道大・文］

方程式 $x^2+y^2-4y+2=0$ で定義される円 C を考える。

(1)　点 $\mathrm{A}(-\sqrt{2},\ 0)$ と $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通り中心の座標が $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$ および $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 2\right)$ である 2 つの円は，どちらも円 C に接することを示せ。

(2)　点 P が円 C 上を動くとき，$\cos\angle\mathrm{APO}$ の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{7}$ ［名古屋大・理］

原点O$(0,\ 0)$を中心とする半径 1 の円に，円外の点P$(x_0,\ y_0)$から 2 本の接線を引く。

(1) 2 つの接点の中点を Q とするとき，点 Q の座標$(x_1,\ y_1)$を点 P の座標$(x_0,\ y_0)$を用いて表せ。またOP$\cdot$OQ$=1$であることを示せ。

(2) 点 P が直線$x+y=2$上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ。

8　　[東京大・理]

座標平面上の 2 点 P, Q が，曲線 $y = x^2$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ 上を自由に動くとき，線分 PQ を1 : 2に内分する点 R が動く範囲を D とする。ただし，P = Q のときはR = P とする。

(1)　a を$-1 \leqq a \leqq 1$を満たす実数とするとき，点$(a,\ b)$が D に属するための b の条件を a を用いて表せ。

(2)　D を図示せよ。

$\boxed{9}$ ［一橋大］

a を正の実数とする。点$(x,\ y)$が，不等式$x^2 \leqq y \leqq x$の定める領域を動くとき，つねに$\dfrac{1}{2} \leqq (x-a)^2+y \leqq 2$となる。$a$の値の範囲を求めよ。

10　　　　［金沢大・理］

xy 平面において，原点 O を中心とする半径 1 の円を C とする。a を正の実数とし，点 A$(0,\ 1)$ を通り，傾き a の直線を l とする。C と l の交点で，A と異なるものを P とし，l と直線 $y=-2$ の交点を Q とする。また，P における C の接線を m とし，m と直線 $y=-2$ の交点を R とする。次の問いに答えよ。

(1)　直線 m の方程式を a を用いて表せ。

(2)　a が正の値をとって動くとき，線分 QR の長さの最小値と，そのときの a の値を求めよ。

(3)　(2)で求めた a の値に対して，点 A を通り，$\angle$QAR を二等分する直線の方程式を求めよ。

$\boxed{11}$ ［神戸大・理］

xy 平面上に 3 点 $A(1,\ 0)$，$B(-1,\ 0)$，$C(0,\ \sqrt{3})$ をとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1) A，B の 2 点を中心とする同じ半径 r の 2 つの円が接する。このような r の値を求めよ。

(2) (1)で求めた r の値について，C を中心とする半径 r の円が，A，B の 2 点を中心とする半径 r の 2 つの円のどちらとも接することを示せ。

(3) A，B，C の 3 点を中心とする同じ半径 s の 3 つの円が直線 l に接する。このような s の値と直線 l の方程式をすべて求めよ。

12　　　　［東京大・文］

座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ -1)$ に対し，$\angle\mathrm{APC}=\angle\mathrm{BPC}$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。ただし，$\mathrm{P}\neq\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C}$ とする。

13　［金沢大・文］

xy 平面において，点 A$(a,\ 0)$ を中心とする半径 r の円を C とする。ただし，$0<r\leqq a$ とする。円 C の周上に，y 座標が正である点 P と，点 E$(a+r,\ 0)$ をとる。さらに，点 P における円 C の接線と y 軸との交点を Q, 2 点 E, P を通る直線と y 軸との交点を R，∠AEP を θ とする。このとき，3 点 P，Q，R を頂点とする△PQR について，次の問いに答えよ。

(1)　△PQR は辺 PR を底辺とする二等辺三角形であることを示せ。次に，これが正三角形となる場合の，θ の値を求めよ。

(2)　△PQR が正三角形となり，さらに頂点の 1 つが原点と一致する場合の，a と r の関係式を求めよ。

(3)　△PQR が正三角形となり，さらにその外接円の半径が円 C の半径 r と等しくなる場合の, a と r の関係式を求めよ。

14　　［金沢大・理］

$0<r<1$ とし，点 O を原点とする xy 平面において，3 点 O，A$(2,\ 0)$，B$(0,\ 2r)$ を頂点とする三角形 OAB と，互いに相似な 3 つの二等辺三角形 O′AB，A′OB，B′OA を考える。ここで，辺 AB，OB，OA はそれぞれの二等辺三角形の底辺であり，点 O′ は直線 AB に対して点 O と反対側に，点 A′ は第 2 象限に，点 B′ は第 4 象限に，それぞれあるとする。$t=\tan\angle \mathrm{A'OB}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　点 A′，B′ の座標を，r, t の式で表せ。

(2)　直線 AA′，および直線 BB′ の方程式を $ax+by=c$ の形で求めよ。

(3)　2 直線 AA′ と BB′ の交点を $\mathrm{M}(x_0,\ y_0)$ とする。比 $\dfrac{y_0}{x_0}$ を r, t の式で表せ。

(4)　点 O′ の座標を r，t の式で表し，3 直線 AA′，BB′，OO′ が 1 点で交わることを示せ。

$\boxed{15}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［京都大・文］

x, y は $x \neq 1$，$y \neq 1$ を満たす正の数で，不等式

$$\log_x y + \log_y x > 2 + (\log_x 2)(\log_y 2)$$

を満たすとする。このとき x, y の組 $(x,\ y)$ の範囲を座標平面上に図示せよ。

16　　［一橋大］

(1)　任意の角 θ に対して，$-2 \leqq x\cos\theta + y\sin\theta \leqq y+1$ が成立するような点 $(x,\ y)$ の全体からなる領域を xy 平面上に図示し，その面積を求めよ。

(2)　任意の角 α，β に対して，$-1 \leqq x^2\cos\alpha + y\sin\beta \leqq 1$ が成立するような点 $(x,\ y)$ の全体からなる領域を xy 平面上に図示し，その面積を求めよ。

17　　　　［広島大・理］

座標平面上の 3 点 A$(0,\ 0)$，B$(1,\ 0)$，C$(x,\ y)$を考える。ただし $y>0$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　△ABC が二等辺三角形であるとする。そのとき x, y が満たす条件を求め，点 C の存在範囲を図示せよ。

(2)　△ABC が鋭角三角形であるとする。そのとき x, y が満たす条件を求め，点 C の存在範囲を図示せよ。

(3)　3 つの角∠CAB, ∠ABC, ∠BCA をそれぞれ α，β，γ とし，不等式

$$\alpha \leqq \beta \leqq \gamma < \frac{\pi}{2}$$

を満たすとする。そのとき x, y が満たす条件を求め，点 C の存在範囲を図示せよ。

(4)　x, y が(3)の条件を満たすとき，γ がとりうる値の範囲を求めよ。

18　　［東北大・文］

放物線$C: y=x^2$に対して，以下の問いに答えよ。

(1)　C 上の点$\mathrm{P}(a,\ a^2)$を通り，P における C の接線に直交する直線 l の方程式を求めよ。

(2)　l を(1)で求めた直線とする。$a \neq 0$のとき，直線$x=a$を l に関して対称に折り返して得られる直線 m の方程式を求めよ。

(3)　(2)で求めた直線 m は a の値によらず定点 F を通ることを示し，F の座標を求めよ。

19 ［千葉大・理］

a を 1 より大きい実数とし，座標平面上に，点 O(0, 0)，A(1, 0) をとる。曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上の点 $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$ と，曲線 $y=\dfrac{a}{x}$ 上の点 $\mathrm{Q}\left(q,\ \dfrac{a}{q}\right)$ が, 3 条件

(i)　$p>0,\ q>0$

(ii)　$\angle\mathrm{AOP}<\angle\mathrm{AOQ}$

(iii)　$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積は 3 に等しい

を満たしながら動くとき，$\tan\angle\mathrm{POQ}$ の最大値が $\dfrac{3}{4}$ となるような a の値を求めよ。

20　　［名古屋大・文］

xy 平面上の長方形 ABCD が次の条件(a), (b), (c)を満たしているとする。

(a)　対角線 AC と BD の交点は原点 O に一致する。

(b)　直線 AB の傾きは 2 である。

(c)　A の y 座標は, B, C, D の y 座標より大きい。

このとき, $a>0$, $b>0$ として, 辺 AB の長さを $2\sqrt{5}a$, BC の長さを $2\sqrt{5}b$ とおく。

(1)　A, B, C, D の座標を a, b で表せ。

(2)　長方形 ABCD が領域 $x^2+(y-5)^2\leqq 100$ に含まれるための a, b に対する条件を求め, ab 平面上に図示せよ。

21　　［名古屋大・文］

xy 平面上に 3 点 O(0, 0)，A(1, 0)，B(0, 1) がある。

(1)　$a>0$ とする。OP : AP = 1 : a を満たす点 P の軌跡を求めよ。

(2)　$a>1>b>0$ とする。OP : AP : BP = 1 : a : b を満たす点 P が存在するための a, b に対する条件を求め, ab 平面上に図示せよ。

22　　［東京大］

座標平面上の 1 点 $P\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$ をとる。放物線 $y=x^2$ 上の 2 点 $Q(\alpha,\ \alpha^2)$，$R(\beta,\ \beta^2)$ を，3 点 P，Q，R が QR を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき，$\triangle PQR$ の重心 $G(X,\ Y)$ の軌跡を求めよ。

23　　［筑波大］

O を原点とする xy 平面において，直線 $y=1$ の $|x|\geqq 1$ を満たす部分を C とする。

(1)　C 上に点 $\mathrm{A}(t,\ 1)$ をとるとき，線分 OA の垂直二等分線の方程式を求めよ。

(2)　点 A が C 全体を動くとき，線分 OA の垂直二等分線が通過する範囲を求め，それを図示せよ。

$\boxed{24}$　　　　　　　　　　［東北大・理］

実数 a に対し，不等式 $y \leqq 2ax - a^2 + 2a + 2$ の表す座標平面上の領域を $D(a)$ とおく。

(1)　$-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすすべての a に対し $D(a)$ の点となるような点 $(p,\ q)$ の範囲を図示せよ。

(2)　$-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすいずれかの a に対し $D(a)$ の点となるような点 $(p,\ q)$ の範囲を図示せよ。

25　　［北海道大・文］

$a,\ b$ を実数とし，xy 平面上の 3 直線を

$$l : x+y=0\ ,\ \ l_1 : ax+y=2a+2\ ,\ \ l_2 : bx+y=2b+2$$

で定める。

(1)　直線 l_1 は a の値によらない 1 点 P を通る。P の座標を求めよ。

(2)　l，l_1，l_2 によって三角形がつくられるための $a,\ b$ の条件を求めよ。

(3)　$a,\ b$ は(2)で求めた条件を満たすものとする。点 $(1,\ 1)$ が(2)の三角形の内部にあるような $a,\ b$ の範囲を求め，それを ab 平面上に図示せよ。

26　　［神戸大・理］

以下の問いに答えよ。

(1)　t を正の実数とするとき，$|x|+|y|=t$ の表す xy 平面上の図形を図示せよ。

(2)　a を $a\geqq 0$ を満たす実数とする。x, y が連立不等式

$$ax+(2-a)y\geqq 2,\quad y\geqq 0$$

を満たすとき，$|x|+|y|$ のとりうる値の最小値 m を，a を用いた式で表せ。

(3)　a が $a\geqq 0$ の範囲を動くとき，(2)で求めた m の最大値を求めよ。

27　　［神戸大］

座標平面上に 2 点 A$(1,\ 0)$，B$(-1,\ 0)$ と直線 l があり，A と l の距離と B と l の距離の和が 1 であるという。以下の問いに答えよ。

(1) l は y 軸と平行でないことを示せ。

(2) l が線分 AB と交わるとき，l の傾きを求めよ。

(3) l が線分 AB と交わらないとき，l と原点との距離を求めよ。

28　　［東京大・文］

実数 t は $0<t<1$ を満たすとし，座標平面上の 4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(0,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ 0)$，$\mathrm{C}(t,\ 0)$ を考える。また線分 AB 上の点 D を $\angle\mathrm{ACO}=\angle\mathrm{BCD}$ となるように定める。

t を動かしたときの三角形 ACD の面積の最大値を求めよ。

$\boxed{29}$　　［東北大・理］

s, t を実数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$x=s+t+1$，$y=s-t-1$ とおく。s，t が $s \geqq 0$，$t \geqq 0$ の範囲を動くとき，点 (x, y) の動く範囲を座標平面内に図示せよ。

(2)　$x=st+s-t+1$，$y=s+t-1$ とおく。s，t が実数全体を動くとき，点 (x, y) の動く範囲を座標平面内に図示せよ。

30　　［千葉大］

1より小さい正の実数 a に対して，円 $C(a):(x+a-1)^2+(y+a-1)^2=2a^2$ と定める。そのうえで，数列 $\{a_n\}$ を以下の方法によって定める。

(i)　$n=1$ のときは，円 $C(a)$ が x 軸と接するような定数 a の値を a_1 とする。さらに，円 $C(a_1)$ と x 軸との接点を P_1 とし，円 $C(a_1)$ の中心を Q_1 とおく。

(ii)　$n\geqq 2$ のときは，円 $C(a)$ が直線 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{Q}_{n-1}$ と接するような定数 a の値を a_n とする。さらに，円 $C(a_n)$ と直線 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{Q}_{n-1}$ との接点を P_n とし，円 $C(a_n)$ の中心を Q_n とおく。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　a_1 を求めよ。

(2)　a_2 を求めよ。

(3)　$\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

31　［神戸大・文］

$a,\ b,\ c$ は実数とし，$a<b$ とする。平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$，$\mathrm{C}(c,\ c^2)$ が，辺 AB を斜辺とする直角三角形を作っているとする。次の問いに答えよ。

(1)　a を $b,\ c$ を用いて表せ。

(2)　$b-a \geqq 2$ が成り立つことを示せ。

(3)　斜辺 AB の長さの最小値と，そのときの A, B, C の座標をそれぞれ求めよ。

32　　［岡山大・理］

xy 平面上の 2 点 $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$ に対して，$d(\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2)$ を

$$d(\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$$

で定義する。いま点 $\mathrm{A}(3,\ 0)$ と点 $\mathrm{B}(-3,\ 0)$ に対して，$d(\mathrm{Q},\ \mathrm{A})=2d(\mathrm{Q},\ \mathrm{B})$ を満たす点 Q からなる図形を T とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　点 $(a,\ b)$ が T 上にあれば，点 $(a,\ -b)$ も T 上にあることを示せ。

(2)　T で囲まれる領域の面積を求めよ。

(3)　点 C の座標を $(13,\ 8)$ とする。点 D が T 上を動くとき，$d(\mathrm{D},\ \mathrm{C})$ の最小値を求めよ。

33　　［広島大・理］

座標平面上の 2 点 A$(0,\ 1)$　B$(t,\ 0)$ を考える。ただし，$t \geqq 0$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　線分 AB を 1 辺とする正三角形は 2 つある。それぞれの正三角形について，2 点 A, B 以外の頂点の座標を t を用いて表せ。

(2)　(1)で求めた 2 点のうち x 座標が小さい方を C とする。t を動かすとき，点 C の軌跡を図示せよ。

(3)　k を定数とする。点 B と直線 $y=kx$ 上の点 P をそれぞれうまく選ぶことで 3 点 A, B, P を頂点とする正三角形ができるとき，k の値の範囲を求めよ。

34　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［北海道大・理］

実数 $x,\ y,\ s,\ t$ に対し，$z=x+yi$，$w=s+ti$ とおいたとき，$z=\dfrac{w-1}{w+1}$ を満たすとする。ただし，i は虚数単位である。

(1)　w を z で表し，$s,\ t$ を $x,\ y$ で表せ。

(2)　$0\leqq s\leqq 1$ かつ $0\leqq t\leqq 1$ となるような $(x,\ y)$ の範囲 D を座標平面上に図示せよ。

(3)　点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が D を動いたとき，$-5x+y$ の最小値を求めよ。

$\boxed{35}$ ［東京大・文］

a, b を実数の定数とする。実数 x, y が $x^2+y^2 \leqq 25$，$2x+y \leqq 5$ をともに満たすとき，$z=x^2+y^2-2ax-2by$ の最小値を求めよ。

$\boxed{36}$　　［岡山大・理］

(1)　すべての実数 x, y に対して $x^2+y^2+2axy+2bx+1 \geqq 0$ が成り立つとする。このとき，実数 a, b が満たすべき条件を求め，その条件を満たす点 $(a,\ b)$ のなす領域を座標平面上に図示せよ。

(2)　(1)の領域を点 $(a,\ b)$ が動くとき a^2+b の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{37}$　　　　[一橋大]

円 $C: x^2+y^2=1$ 上の点 P における接線を l とする。点 $(1,\ 0)$ を通り l と平行な直線を m とする。直線 m と円 C の $(1,\ 0)$ 以外の共有点を P' とする。ただし, m が直線 $x=1$ のときは P' を $(1,\ 0)$ とする。

円 C 上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ から点 $\mathrm{P}'(s',\ t')$ を得る上記の操作を T と呼ぶ。

(1) s', t' をそれぞれ s と t の多項式として表せ。

(2) 点 P に操作 T を n 回繰り返して得られる点を P_n とおく。P が $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ のとき, P_1, P_2, P_3 を図示せよ。

(3) 正の整数 n について, $\mathrm{P}_n=\mathrm{P}$ となるような点 P の個数を求めよ。

$\boxed{38}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大・理］

座標平面の原点を O で表す。線分 $y=\sqrt{3}x$ $(0\leqq x\leqq 2)$ 上の点 P と，線分 $y=-\sqrt{3}x$ $(-2\leqq x\leqq 0)$ 上の点 Q が，線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く。このとき，線分 PQ の通過する領域を D とする。

(1) s を $0\leqq s\leqq 2$ を満たす実数とするとき，点 $(s,\ t)$ が D に入るような t の範囲を求めよ。

(2) D を図示せよ。