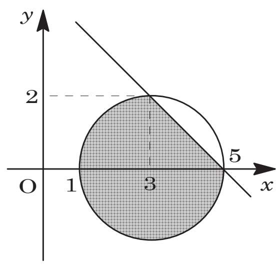
1 ［東北大・理］

領域 D： $x^2-6x+y^2+5 \leqq 0$，$x+y \leqq 5$ より，

$$(x-3)^2+y^2 \leqq 4,\ \ y \leqq -x+5$$

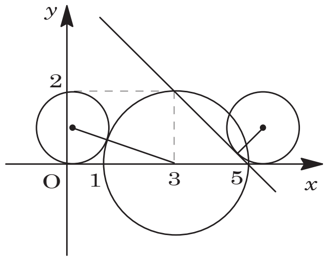


領域 D を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

また，曲線 $x^2+y^2-2ax-2y+a^2=0$ に対して，

$$(x-a)^2+(y-1)^2=1 \cdots\cdots\cdots(*)$$

すると，方程式$(*)$は，中心$(a,\ 1)$，半径 1 の円を表す。



右図より，実数 a が最大となるのは，円$(*)$が領域 D の境界線 $x+y-5=0$ に接するときなので，

$$\frac{|a+1-5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=1,\ \ |a-4|=\sqrt{2}$$

$a>4$ より，a の最大値は，$a=4+\sqrt{2}$ である。

また，実数 a が最小となるのは，円$(*)$が領域 D の境界線 $(x-3)^2+y^2=4$ に接するときなので，

$$\sqrt{(a-3)^2+1^2}=2+1,\ \ (a-3)^2=8$$

$a<3$ より，a の最小値は，$a=3-2\sqrt{2}$ である。

［解 説］

領域と最大・最小を組み合わせた問題です。円と直線，円と円が接する条件の処理がポイントです。

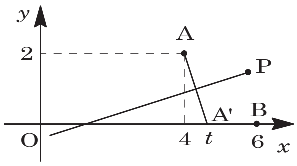
$\boxed{2}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[名古屋大・理]

(1)　ピッタリ直線 l は，線分AA$'$の垂直二等分線より，

PA $=$ PA$'$となり，

$$(p-4)^2+(q-2)^2=(p-t)^2+q^2$$

$$-8p+16-4q+4=-2pt+t^2$$



まとめると，$t^2-2pt+8p+4q-20=0$ ………①

(2)　ピッタリ直線が 2 本存在するのは，点A$'(t,\ 0)$が 2 つ存在するときで，このとき①は $0\leqq t\leqq 6$ に異なる 2 つの実数解をもつ。

ここで，$f(t)=t^2-2pt+8p+4q-20=(t-p)^2-p^2+8p+4q-20$ とおくと，

$0<p<6$ ………②，$-p^2+8p+4q-20<0$ ………③

$f(0)=8p+4q-20\geqq 0$ ………④，$f(6)=-4p+4q+16\geqq 0$ ………⑤

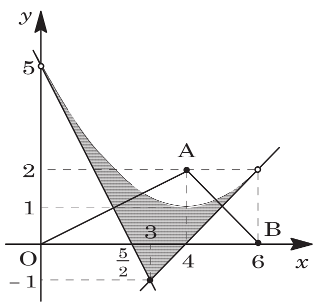
③より，$4q<(p-4)^2+4$，$q<\dfrac{1}{4}(p-4)^2+1$ ………③$'$

④より $q\geqq -2p+5$ ………④$'$，⑤より $q\geqq p-4$ ………⑤$'$

さて，領域③$'$の境界線 $q=\dfrac{1}{4}(p-4)^2+1$ に対して，$q'=\dfrac{1}{2}(p-4)$ となる。

すると，$p=0$ のとき $q'=-2$，$p=6$ のとき $q'=1$ から，領域③$'$と領域④$'$の境界線，領域③$'$と領域⑤$'$の境界線はそれぞれ接する。

したがって，②③$'$④$'$⑤$'$より，点P$(p,\ q)$の存在範囲は，右図の網点部となる。ただし，実線の境界線は含み，破線の放物線上の境界線は含まない。



(3)　①の異なる 2 つの実数解を $t=t_1,\ t_2$ とおき，A$_1'(t_1,\ 0)$，A$_2'(t_2,\ 0)$とする。

$$\overrightarrow{\mathrm{AA}_1'}=(t_1-4,\ -2),\ \overrightarrow{\mathrm{AA}_2'}=(t_2-4,\ -2)$$

2 本のピッタリ直線が直交することより，$\overrightarrow{\mathrm{AA}_1'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AA}_2'}=0$ となり，

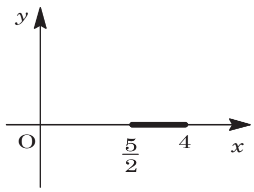
$$(t_1-4)(t_2-4)+4=0,\ t_1t_2-4(t_1+t_2)+20=0\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

ここで，①に対して，解と係数の関係を用いると，

$$t_1+t_2=2p,\ t_1t_2=8p+4q-20$$

⑥に代入して，$8p+4q-20-8p+20=0$

よって，$q=0$ となり，点P$(p,\ q)$は x 軸上に存在し，(2)の結論と合わせて図示すると，右図の太線部となる。



[解 説]

線対称を題材にした問題です。文系の類題に，ひとひねりが加えられています。

3　　［北海道大・理］

(1)　条件より, $x \leqq y \leqq z \leqq 1$……①，$4x+3y+2z=1$……②に対して,

②から $z=-2x-\dfrac{3}{2}y+\dfrac{1}{2}$ となり，①に代入すると，

$$x \leqq y \cdots\cdots ③,\quad y \leqq -2x-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2} \cdots\cdots ④,\quad -2x-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2} \leqq 1 \cdots\cdots ⑤$$

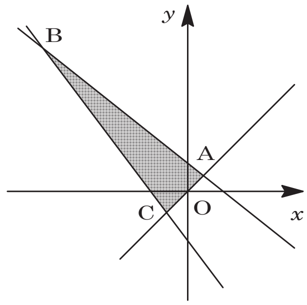
すると，④より $y \leqq -\dfrac{4}{5}x+\dfrac{1}{5}$，⑤より $y \geqq -\dfrac{4}{3}x-\dfrac{1}{3}$ となる。

③④の境界線の交点をAとすると，$x=-\dfrac{4}{5}x+\dfrac{1}{5}$ から，$x=\dfrac{1}{9}$，$y=\dfrac{1}{9}$

④⑤の境界線の交点をBとすると，$-\dfrac{4}{5}x+\dfrac{1}{5}=-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{1}{3}$ から，$x=-1$，$y=1$

③⑤の境界線の交点をCとすると，$x=-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{1}{3}$ から，$x=-\dfrac{1}{7}$，$y=-\dfrac{1}{7}$

よって，③④⑤を満たす領域は右図の網点部となり，x の最大値は点Aの x 座標から $\dfrac{1}{9}$, y の最小値は点Cの y 座標より $-\dfrac{1}{7}$ である。



(2)　$P=3x-y+z$ とおくと，②より，

$$P=3x-y-2x-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}=x-\frac{5}{2}y+\frac{1}{2}$$

これより，$y=\dfrac{2}{5}x+\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}P$ となり，傾き $\dfrac{2}{5}$ の直線群を表す。

よって，点Bを通るとき P は最小となり，最小値は,

$$P=-1-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=-3$$

また, 点Cを通るとき, P は最大となり，最大値は,

$$P=-\frac{1}{7}+\frac{5}{14}+\frac{1}{2}=\frac{5}{7}$$

以上より，$-3 \leqq 3x-y+z \leqq \dfrac{5}{7}$ である。

［解 説］

(1)の問題文で示唆されているように, z を消去すれば，領域と最大・最小の典型題となります。

4　　　　［神戸大・文］

(1)　P$(x,\ y)$を通る直線$l_t : y = 2tx - t^2$ ……①がただ１つである条件は，①をtの方程式としてみたとき，ただ１つの解をもつことに対応する。

①より，$t^2 - 2xt + y = 0$となり，

$$D/4 = x^2 - y = 0$$

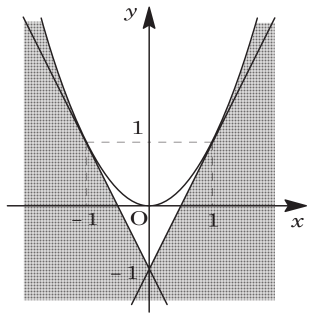
よって，点Pの軌跡の方程式は，$y = x^2$ ……②である。

(2)　①と②の共有点は，$2tx - t^2 = x^2$より，

$$(x-t)^2 = 0,\ x = t$$

これより，直線①は，放物線②の点$(t,\ t^2)$における接線である。

そこで，tが$|t| \geqq 1$すなわち$t \leqq -1$，$1 \leqq t$の範囲を動くとき，①において，$l_1 : y = 2x - 1$，$l_{-1} : y = -2x - 1$であることを利用すると，直線l_tの通過領域は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



［解 説］

直線①は，放物線②の点$(t,\ t^2)$における接線です。このためのヒントが(1)の役割でしょうが，気付きにくい部分です。もっとも，この点を無視しても，直線②の通過領域は，有名な実数解条件として求めることができます。

$\boxed{5}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［千葉大・理］

(1)　$C: x^2+y^2-4-t(2x+2y-a)=0$ より，

$$(x-t)^2+(y-t)^2=2t^2-at+4 \cdots\cdots\cdots ①$$

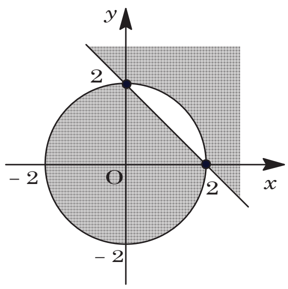
①が円を表す条件 $2t^2-at+4>0$ が，すべての t に対して成立するためには，

$$D=a^2-32<0,\ -4\sqrt{2}<a<4\sqrt{2}$$

(2)　$a=4$ のとき，$C: x^2+y^2-4-t(2x+2y-4)=0 \cdots\cdots\cdots ②$

t が $t>0$ の範囲を動くとき，C が通過する領域は，②を t の方程式としてみたとき，$t>0$ の解をもつ条件として表される。

まず，$2x+2y-4=0 \cdots\cdots ③$のとき，$t>0$ の解をもつのは，$x^2+y^2-4=0 \cdots\cdots ④$の場合だけである。ここで，③④を連立することにより $(x,\ y)=(2,\ 0),\ (0,\ 2)$ となり，C はこの点を通過する。



次に，$2x+2y-4\neq 0$ のときは，$t=\dfrac{x^2+y^2-4}{2x+2y-4}$ となり，

$$\frac{x^2+y^2-4}{2x+2y-4}>0,\ (x^2+y^2-4)(x+y-2)>0$$

よって，C が通過する領域は右図の網点部となる。ただし，点 $(2,\ 0),\ (0,\ 2)$ 以外の境界は含まない。

(3)　$a=6$ のとき，$C: x^2+y^2-4-t(2x+2y-6)=0 \cdots\cdots\cdots ⑤$

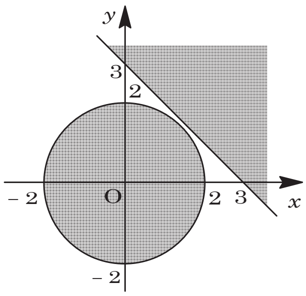
⑤が円を表す条件は，(1)より $2t^2-6t+4>0$ すなわち $(t-1)(t-2)>0$ であり，$t>0$ と合わせて，$0<t<1,\ 2<t \cdots\cdots (*)$となる。

まず，$2x+2y-6=0 \cdots\cdots ⑥$のとき，$t>0$ の解をもつのは，$x^2+y^2-4=0 \cdots\cdots ⑦$の場合だけである。ここで，⑥より $y=-x+3$ となり，⑦に代入すると，

$$x^2+(-x+3)^2-4=0,\ 2x^2-6x+5=0$$

しかし，$D/4=-1$ より実数解をもたず，不適である。

次に，$2x+2y-6\neq 0$ のときは，$t=\dfrac{x^2+y^2-4}{2x+2y-6}$ となり，



(*)より，

$$0<\frac{x^2+y^2-4}{2x+2y-6}<1 \cdots\cdots ⑧,\ 2<\frac{x^2+y^2-4}{2x+2y-6} \cdots\cdots ⑨$$

⑧の左側の不等式は，

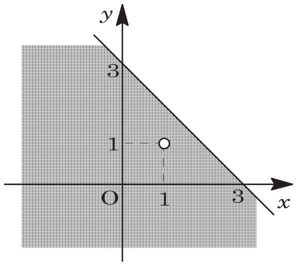
$$(x^2+y^2-4)(x+y-3)>0 \cdots\cdots\cdots ⑩$$

不等式⑩を図示すると，右上図の網点部となる。ただし，境界は含まない。

⑧の右側の不等式は，$(x^2+y^2-4)(2x+2y-6)<(2x+2y-6)^2$

$$2(x+y-3)(x^2+y^2-4-2x-2y+6)<0$$

$$(x+y-3)\{(x-1)^2+(y-1)^2\}<0 \cdots\cdots\cdots ⑪$$

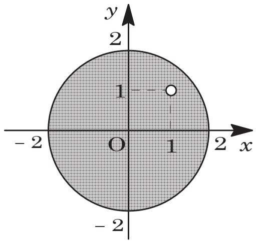


すると，$(x-1)^2+(y-1)^2 \geqq 0$ から，不等式⑪は，

$(x,\ y) \neq (1,\ 1)$ かつ $x+y-3<0$

よって，図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は含まない。

まとめると，不等式⑧は，不等式⑩と⑪を連立したものであるので，その共通部分を領域として図示すると，右下図の網点部となる。ただし，境界および点$(1,\ 1)$は含まない。



さらに，⑨を変形すると，

$(x^2+y^2-4)(2x+2y-6)>2(2x+2y-6)^2$

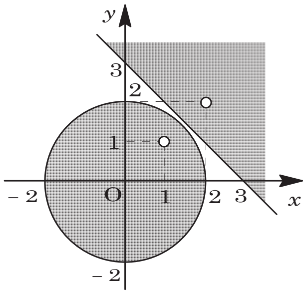
$2(x+y-3)(x^2+y^2-4-4x-4y+12)>0$

$(x+y-3)\{(x-2)^2+(y-2)^2\}>0$ ………⑫

すると，$(x-2)^2+(y-2)^2 \geqq 0$ から，不等式⑫は，

$(x,\ y) \neq (2,\ 2)$ かつ $x+y-3>0$

したがって，不等式⑨は，直線 $x+y-3=0$ の上側から，点$(2,\ 2)$を除いた領域を表す。



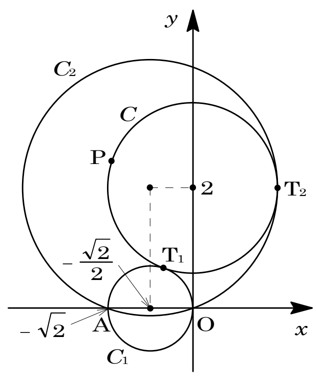
以上より，C が通過する領域は不等式⑧または⑨で表されるので，図示すると右図の網点部となる。

ただし，境界線および 2 点$(1,\ 1)$，$(2,\ 2)$は含まない。

［解　説］

記述量が多い問題です。ステップを 1 つずつ踏んで図示していくだけですが，かなりの計算力と忍耐力が要求されます。

$\boxed{6}$　　［北海道大・文］



(1)　$C: x^2+y^2-4y+2=0$ より，$x^2+(y-2)^2=2$

これより，円 C は中心 $(0,\ 2)$，半径 $r=\sqrt{2}$ となる。

さて，中心 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$ で，$\mathrm{A}(-\sqrt{2},\ 0)$，$\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通る円を C_1 とすると，その半径は $r_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ である。

すると, C と C_1 の中心間距離は,

$$d_1=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2^2}=\sqrt{\frac{9}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

また，半径の和は，$r+r_1=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$

よって，$d_1=r+r_1$ となり, 2 円 C と C_1 は外接する。

次に，中心 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 2\right)$ で, 2 点 A, O を通る円を C_2 とすると，その半径は,

$$r_2=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2^2}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

すると，C と C_2 の中心間距離は $d_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$，半径の差は $r_2-r=\frac{3}{2}\sqrt{2}-\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ となり，$d_2=r_2-r$ より，円 C は円 C_2 に内接する。

(2)　C と C_1，C と C_2 の接点を T_1，T_2 とおくと，この接点以外は，C 上の点 P は円 C_1 の外部，円 C_2 の内部にあり，

$$\angle\mathrm{AT_2O}\leqq\angle\mathrm{APO}\leqq\angle\mathrm{AT_1O}$$

$$\cos\angle\mathrm{AT_1O}\leqq\cos\angle\mathrm{APO}\leqq\cos\angle\mathrm{AT_2O}$$

さて, AO は C_1 の直径なので $\angle\mathrm{AT_1O}=90°$ となり，$\cos\angle\mathrm{AT_1O}=0$

また，C_2 の中心を B とおくと，$\angle\mathrm{AT_2O}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{ABO}$ より,

$$\cos\angle\mathrm{AT_2O}=\frac{2}{r_2}=\frac{2}{\frac{3}{2}\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

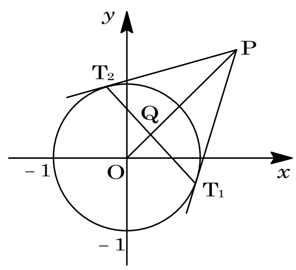
よって，$\cos\angle\mathrm{APO}$ の最小値は 0，最大値は $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ である。

［解　説］

(1)の巧みな誘導により，(2)は図形的に解くことができます。この設問を，誘導を無視して押し通そうとすると，計算の海に溺れてしまいます。

7　　［名古屋大・理］

(1)　2 つの接点を $T_1(s_1,\ t_1)$，$T_2(s_2,\ t_2)$ とおくと，接線の方程式はそれぞれ，



$$s_1x+t_1y=1,\quad s_2x+t_2y=1$$

点 $P(x_0,\ y_0)$ を通ることより，

$$s_1x_0+t_1y_0=1\ \cdots\cdots①,\quad s_2x_0+t_2y_0=1\ \cdots\cdots②$$

ここで，方程式 $x_0x+y_0y=1\ \cdots\cdots③$ は直線を表し，①から $T_1(s_1,\ t_1)$，②から $T_2(s_2,\ t_2)$ を通過することがわかる。すなわち，③は直線 T_1T_2 を表す。

さて，直線 T_1T_2 の法線ベクトルは，$\overrightarrow{OP}=(x_0,\ y_0)$ となり，2 直線 OP，T_1T_2 は直交する。言い換えると，2 点 T_1，T_2 の中点 Q は 2 直線 OP，T_1T_2 の交点である。

ここで，直線 OP は，k を実数として，

$$(x,\ y)=k(x_0,\ y_0),\quad y_0x-x_0y=0\ \cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$x=\dfrac{x_0}{x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}}$，$y=\dfrac{y_0}{x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}}$ となるので，$Q\left(\dfrac{x_0}{x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}},\ \dfrac{y_0}{x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}}\right)$

$$OP\cdot OQ=\sqrt{x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}}\cdot\sqrt{\frac{x_0^{\ 2}}{(x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2})^2}+\frac{y_0^{\ 2}}{(x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2})^2}}$$

$$=\sqrt{x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}}}=1$$

(2)　$Q(x_1,\ y_1)$ より，$x_1=\dfrac{x_0}{x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}}$，$y_1=\dfrac{y_0}{x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}}\ \cdots\cdots\cdots⑤$

(1)から $OP\cdot OQ=1$ なので，$(x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2})(x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2})=1$ となり，⑤より，

$$x_0=x_1(x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2})=\frac{x_1}{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}},\quad y_0=y_1(x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2})=\frac{y_1}{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}}\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

さて，条件より，$x_0+y_0=2$ なので，⑥より $\dfrac{x_1}{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}}+\dfrac{y_1}{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}}=2$

$$2x_1^{\ 2}+2y_1^{\ 2}-x_1-y_1=0,\quad (x_1,\ y_1)\neq(0,\ 0)$$

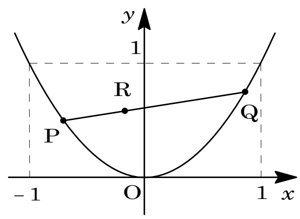
すると，$\left(x_1-\dfrac{1}{4}\right)^2+\left(y_1-\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{8}$ から，点 Q の軌跡は円 $\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{8}$ である。ただし，原点は除く。

［解　説］

有名な頻出問題です。なお，点 Q が 2 直線 OP，T_1T_2 の交点であることは対称性から明らかですが，ここでは二等辺三角形の頂点から底辺に引いた垂線の足が，底辺の中点であることを用いています。

8　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大・理］

(1)　P$(p,\ p^2)$，Q$(q,\ q^2)$とおき，線分 PQ を$1:2$に内分する点 R の動く範囲Dに点$(a,\ b)$が属することより，



$$a=\frac{2p+q}{3}\cdots\cdots\cdots①,\ \ b=\frac{2p^2+q^2}{3}\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$q=3a-2p\cdots\cdots③$となり，②に代入すると，

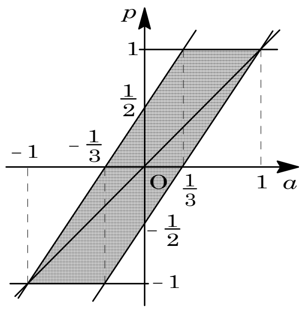
よって，$2p^2+(3a-2p)^2=3b$

$$b=2p^2-4ap+3a^2=2(p-a)^2+a^2$$

そこで，$f(p)=2(p-a)^2+a^2$とおき，$-1\leqq p\leqq 1\cdots\cdots④$，$-1\leqq q\leqq 1\cdots\cdots⑤$のもとで，$f(p)$のとり得る値の範囲を求める。

③⑤から，$-1\leqq 3a-2p\leqq 1$となり，

$$\frac{3a-1}{2}\leqq p\leqq\frac{3a+1}{2}\cdots\cdots\cdots⑥$$



さて，④⑥を ap 平面上に図示すると，右図の網点部になる。

ここで，$-1\leqq a\leqq 1$から，$f(p)$は最小値$f(a)=a^2$をとり，また最大値の候補としては，

$$f(-1)=3a^2+4a+2,\ \ f(1)=3a^2-4a+2$$

$$f\left(\frac{3a-1}{2}\right)=\frac{3}{2}a^2-a+\frac{1}{2},\ \ f\left(\frac{3a+1}{2}\right)=\frac{3}{2}a^2+a+\frac{1}{2}$$

これより，aの値で場合分けをして，$f(p)$のとり得る値の範囲を求めると，

(i)　$-1\leqq a\leqq-\frac{1}{3}$のとき

$f(a)\leqq f(p)\leqq f(-1)$より，$a^2\leqq b\leqq 3a^2+4a+2$

(ii)　$-\frac{1}{3}\leqq a\leqq 0$のとき

$f(a)\leqq f(p)\leqq f\left(\frac{3a-1}{2}\right)$より，$a^2\leqq b\leqq\frac{3}{2}a^2-a+\frac{1}{2}$

(iii)　$0\leqq a\leqq\frac{1}{3}$のとき

$f(a)\leqq f(p)\leqq f\left(\frac{3a+1}{2}\right)$より，$a^2\leqq b\leqq\frac{3}{2}a^2+a+\frac{1}{2}$

(iv)　$\frac{1}{3}\leqq a\leqq 1$のとき

$f(a)\leqq f(p)\leqq f(1)$より，$a^2\leqq b\leqq 3a^2-4a+2$

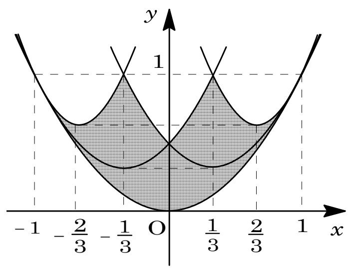
(2)　$a<-1$，$1<a$のときは，右上図より，④⑥を満たすpは存在しない。

よって，(1)から，Dを表す不等式は，

$$x^2\leqq y\leqq 3x^2+4x+2\left(-1\leqq x\leqq-\frac{1}{3}\right)$$

$$x^2 \leqq y \leqq \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3} \leqq x \leqq 0\right)$$
$$x^2 \leqq y \leqq \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}\left(0 \leqq x \leqq \frac{1}{3}\right)$$
$$x^2 \leqq y \leqq 3x^2 - 4x + 2\left(\frac{1}{3} \leqq x \leqq 1\right)$$

以上より，D は右図の網点部のようになる。ただし，境界は領域に含む。

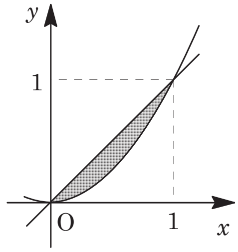


［解 説］

東大で頻出するタイプの問題です。(1)の誘導がなくても完答できるようにしたいところです。なお，(1)では，いったん考え方を整理するために，ap 平面上で方針を確認しています。

9　　　　［一橋大］

不等式 $x^2 \leqq y \leqq x$ ……①の定める領域は右図の網点部である。



さて，$\frac{1}{2} \leqq (x-a)^2 + y \leqq 2$ より，

$$-(x-a)^2 + \frac{1}{2} \leqq y \leqq -(x-a)^2 + 2 \text{………②}$$

すると，②で表される領域は，$y = -(x-a)^2 + \frac{1}{2}$ ……③と $y = -(x-a)^2 + 2$ ……④のグラフに挟まれた領域である。

ここで，③と $y = x^2$ を連立して，

$$x^2 = -(x-a)^2 + \frac{1}{2},\ 2x^2 - 2ax + a^2 - \frac{1}{2} = 0$$

すると，③のグラフが $y = x^2$ に接するのは，

$$D/4 = a^2 - 2\left(a^2 - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$a > 0$ から，$a = 1$ となる。

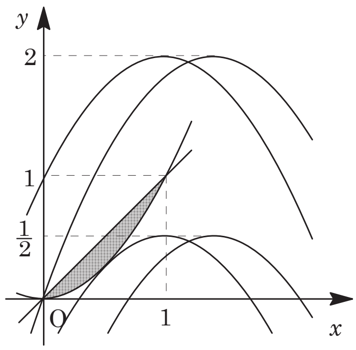
また，④のグラフが原点を通るのは，

$$0 = -a^2 + 2$$

$a > 0$ から，$a = \sqrt{2}$ となる。

よって，領域①が領域②に含まれる a の値の範囲は，

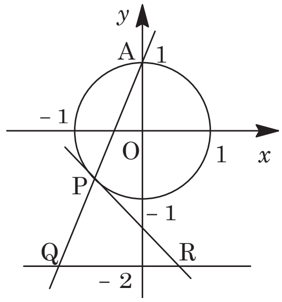
$$1 \leqq a \leqq \sqrt{2}$$



［解 説］

図を見ながら必要な計算をしていきます。ただ，2 つの放物線の頂点の y 座標はそれぞれ固定されており，しかも x 座標は等しくなっています。このため，a の値の変化に伴う 2 つの放物線の動きは，複雑ではありません。

$\boxed{10}$ ［金沢大・理］



(1)　$C: x^2+y^2=1$ ……①と $l: y=ax+1$ ……②の交点は,

$$x^2+(ax+1)^2=1,\ (a^2+1)x^2+2ax=0$$

$x\neq 0$ の解は, $x=-\dfrac{2a}{a^2+1}$

②より, $y=-\dfrac{2a^2}{a^2+1}+1=\dfrac{-a^2+1}{a^2+1}$

よって, $\mathrm{P}\left(-\dfrac{2a}{a^2+1},\ \dfrac{-a^2+1}{a^2+1}\right)$となり, 点 P における円①の接線 m の方程式は,

$$-\frac{2a}{a^2+1}x+\frac{-a^2+1}{a^2+1}y=1,\ -2ax+(-a^2+1)y=a^2+1\ \cdots\cdots\cdots ③$$

(2)　②において, $y=-2$ とすると $x=-\dfrac{3}{a}$ から, $\mathrm{Q}\left(-\dfrac{3}{a},\ -2\right)$

③において, $y=-2$ とすると $x=\dfrac{a^2-3}{2a}$ から, $\mathrm{R}\left(\dfrac{a^2-3}{2a},\ -2\right)$

ここで, 相加平均と相乗平均の関係を用いると,

$$\mathrm{QR}=\left|\frac{a^2-3}{2a}+\frac{3}{a}\right|=\frac{a^2+3}{2a}=\frac{1}{2}\left(a+\frac{3}{a}\right)\geqq\sqrt{a\cdot\frac{3}{a}}=\sqrt{3}$$

ここで, 等号が成立するのは, $a=\dfrac{3}{a}$ $(a=\sqrt{3})$ のときである。

よって, 線分 QR の長さは, $a=\sqrt{3}$ のとき最小値 $\sqrt{3}$ をとる。

(3)　$a=\sqrt{3}$ のとき, ②より, 直線 $\mathrm{AQ}: \sqrt{3}x-y+1=0$

また, $\mathrm{R}(0,\ -2)$ から, 直線 $\mathrm{AR}: x=0$

すると, ∠QAR の二等分線は, 2 直線 AQ, AR から等距離にあることより,

$$\frac{|\sqrt{3}x-y+1|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}}=|x|,\ \sqrt{3}x-y+1=\pm 2x$$

∠QAR の二等分線の傾きは正より, $y=(2+\sqrt{3})x+1$

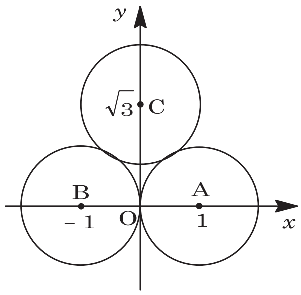
［解 説］

(3)では, 線分 QR を AQ : AR の比に内分する点を求め, 内角の二等分線の定理を利用しても OK です。

$\boxed{11}$　　［神戸大・理］

(1)　A$(1,\ 0)$，B$(-1,\ 0)$を中心とする半径 r の 2 つの円が接するのは，外接する場合のみなので，

$2r=2$，$r=1$



(2)　C$(0,\ \sqrt{3})$に対し，AC$=2$より，C を中心とする半径 1 の円は，A を中心とする半径 1 の円に接する。

同様に，BC$=2$より，C を中心とする半径 1 の円は，B を中心とする半径 1 の円に接する。

(3)　3 点 A, B, C を中心とする半径 s の 3 つの円を，それぞれ円 A, B, C とする。

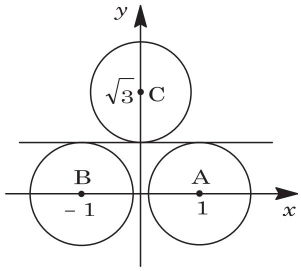
さて，(2)より，$s=1$のとき，3 円 A, B, C は互いに外接し，3 円に接する接線は存在しない。また，$s>1$ のときは，3 円 A, B, C は互いに交わり，3 円に接する接線は存在しない。また，これより，3 円に接する直線 l は，$s<1$ のときに存在する。

(i)　2 円 A, B の共通外接線に円 C が接するとき

2 円 A, B の共通外接線は x 軸に平行になり，$l:y=s$ とおくことができ，直線 l と円 C が接することより，

$$\sqrt{3}-s=s,\quad s=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

すると，$l:y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である。



(ii)　2 円 A, B の共通内接線に円 C が接するとき

まず，2 円 A, B の共通内接線は原点を通る。

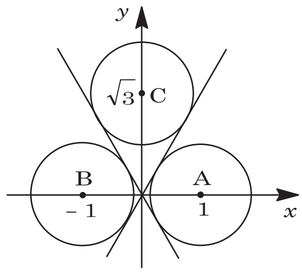
ここで，x 軸の正の部分とのなす角を θ とすると，

$$\sin\theta=s,\quad \tan\theta=\frac{s}{\sqrt{1-s^2}}$$

直線 l は $y=\pm\dfrac{s}{\sqrt{1-s^2}}x$ すなわち $\pm sx-\sqrt{1-s^2}\,y=0$ とおくことができ，直線 l と円 C が接することより，

$$\frac{\left|-\sqrt{1-s^2}\cdot\sqrt{3}\right|}{\sqrt{s^2+1-s^2}}=s,\quad 3(1-s^2)=s^2,\quad s=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

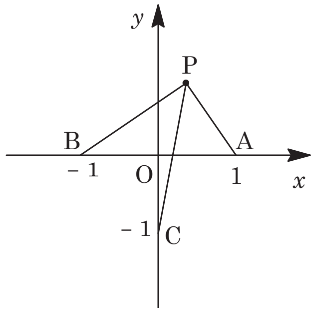
すると，$l:y=\pm\sqrt{3}x$ である。



［解 説］

(3)では，共通接線 l が 3 本存在しますが，対称性を考えると明らかでしょう。

12　　　　［東京大・文］



$A(1,\ 0)$，$B(-1,\ 0)$，$C(0,\ -1)$ に対し，$P(x,\ y)$ とおくと，

$$\overrightarrow{PA}=(1-x,\ -y),\ \overrightarrow{PB}=(-1-x,\ -y)$$
$$\overrightarrow{PC}=(-x,\ -1-y)$$

$\angle APC=\angle BPC$ より，$\cos\angle APC=\cos\angle BPC$ となり，

$$\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PC}|}=\frac{\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{PC}|}$$
$$(\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC})|\overrightarrow{PB}|=(\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC})|\overrightarrow{PA}|$$
$$(x^2+y^2-x+y)\sqrt{x^2+y^2+2x+1}=(x^2+y^2+x+y)\sqrt{x^2+y^2-2x+1}$$

$(x^2+y^2-x+y)(x^2+y^2+x+y)\geqq 0$ ……①のもとで，

$$(x^2+y^2-x+y)^2(x^2+y^2+2x+1)=(x^2+y^2+x+y)^2(x^2+y^2-2x+1)$$

ここで，$u=x^2+y^2$ とおくと，

$$(u-x+y)^2(u+2x+1)=(u+x+y)^2(u-2x+1)\ \cdots\cdots\cdots②$$

②の左辺 $=\{(u+y)^2-2x(u+y)+x^2\}\{(u+1)+2x\}$

②の右辺 $=\{(u+y)^2+2x(u+y)+x^2\}\{(u+1)-2x\}$

これから，②をまとめると，$-4x(u+y)(u+1)+4x\{(u+y)^2+x^2\}=0$ となり，

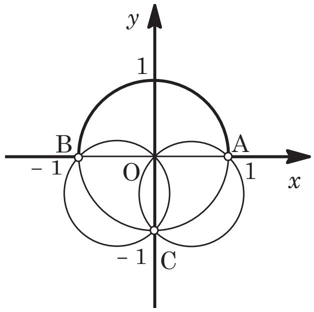
$$x(-u+yu-y+x^2+y^2)=0$$

$u=x^2+y^2$ より，$xy(x^2+y^2-1)=0$

$$x=0,\ y=0,\ x^2+y^2=1\ \cdots\cdots\cdots③$$

①より，$\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\right\}\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\right\}\geqq 0\ \cdots\cdots\cdots①'$

以上より，$P\neq A,\ B,\ C$ に注意して，①′かつ③を図示すると，点 P の軌跡は右図の太線部となり，これを表す方程式は，

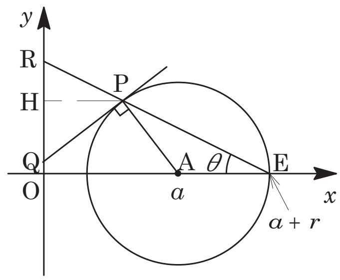


$$x=0\ (y\neq -1)$$
$$y=0\ (x<-1,\ 1<x)$$
$$x^2+y^2=1\ (y>0)$$

［解 説］

条件を満たす点 P の軌跡の一部が，y 軸上や原点中心の単位円周上にあることは，問題の設定からわかります。これをもとに，計算を押し進めました。

13　　［金沢大・文］



(1)　まず，$\angle\mathrm{AEP}=\theta$ より $\angle\mathrm{QRP}=\dfrac{\pi}{2}-\theta$

また，$\angle\mathrm{APE}=\theta$，$\angle\mathrm{APQ}=\dfrac{\pi}{2}$ より，

$$\angle\mathrm{QPR}=\pi-\theta-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-\theta$$

よって，$\angle\mathrm{QRP}=\angle\mathrm{QPR}$ から，$\triangle\mathrm{PQR}$ は辺 PR を底辺とする二等辺三角形である。

さらに，二等辺三角形 PQR が正三角形になるのは，$\angle\mathrm{QRP}=\dfrac{\pi}{3}$ の場合より，

$$\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\pi}{3}，\ \theta=\frac{\pi}{6}$$

(2)　まず，$\triangle\mathrm{PQR}$ の頂点の 1 つが原点であるのは，点 Q が原点の場合である。

さて，(1)から $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，$\angle\mathrm{EAP}=\dfrac{2}{3}\pi$ となり，$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，

$$x=a+r\cos\frac{2}{3}\pi=a-\frac{1}{2}r，\ y=r\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}r$$

すると，点 P における円 $C:(x-a)^2+y^2=r^2$ の接線の方程式は，

$$\left(a-\frac{1}{2}r-a\right)(x-a)+\frac{\sqrt{3}}{2}ry=r^2，\ -x+\sqrt{3}y=-a+2r$$

この接線の y 軸との交点 Q が原点に一致することより $-a+2r=0$，すなわち求める関係式は $a=2r$ である。

(3)　条件より，正三角形 PQR の外接円の半径は r なので，正弦定理を用いると，

$$\frac{\mathrm{PR}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2r，\ \mathrm{PR}=2r\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}r\ \cdots\cdots\cdots①$$

さて，(1)から $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，P から y 軸に下ろした垂線の足を H とおくと，

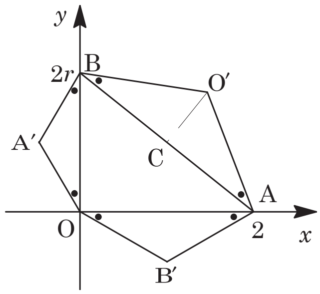
$$\mathrm{PH}=\mathrm{PR}\cos\frac{\pi}{6}，\ a-\frac{1}{2}r=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{PR}\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$a-\dfrac{1}{2}r=\dfrac{3}{2}r$，すなわち求める関係式は $a=2r$ である。

［解 説］

円と接線，および三角形の位置関係についての標準的な問題です。いろいろな解法が考えられますが，角に着目したのが上の解です。

14　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［金沢大・理］



(1)　$A'(x_1,\ y_1)$，$B'(x_2,\ y_2)$，$\angle A'OB=\theta$ とおくと，

$$x_1=-r\tan\theta=-rt,\quad y_1=r$$

$$x_2=1,\quad y_2=-\tan\theta=-t$$

よって，$A'(-rt,\ r)$，$B'(1,\ -t)$

(2)　$\overrightarrow{AA'}=(-rt-2,\ r)$ より，直線 AA' の法線ベクトルの成分を $(r,\ rt+2)$，$\overrightarrow{BB'}=(1,\ -2r-t)$ より，直線 BB' の法線ベクトルの成分を $(2r+t,\ 1)$ とすることができる。これより，直線 AA'，BB' の方程式は，

$$AA' : r(x-2)+(rt+2)y=0,\ rx+(rt+2)y=2r \cdots\cdots\cdots①$$

$$BB' : (2r+t)x+(y-2r)=0,\ (2r+t)x+y=2r \cdots\cdots\cdots②$$

(3)　2 直線 AA' と BB' の交点が $M(x_0,\ y_0)$ より，①②から，

$$rx_0+(rt+2)y_0=2r \cdots\cdots\cdots③,\quad (2r+t)x_0+y_0=2r \cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$(-r-t)x_0+(rt+1)y_0=0$，$(r+t)x_0=(rt+1)y_0$ となり，

$$\frac{y_0}{x_0}=\frac{r+t}{rt+1}$$

(4)　まず，辺 AB の中点を C とすると $C(1,\ r)$ となり，$AC=\sqrt{1+r^2}$ から，

$$CO'=AC\tan\theta=t\sqrt{1+r^2}$$

また，$\overrightarrow{AB}=-2(1,\ -r)$ より，直線 AB の法線ベクトルの成分を $(r,\ 1)$ とすることができ，

$$\overrightarrow{OO'}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CO'}=(1,\ r)+t\sqrt{1+r^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{r^2+1}}(r,\ 1)=(rt+1,\ r+t)$$

これより，$O'(rt+1,\ r+t)$ となり，直線 OO' の方程式は $y=\dfrac{r+t}{rt+1}x$ である。

よって，(3)から，直線 OO' 上に 2 直線 AA' と BB' の交点 $M(x_0,\ y_0)$ が存在することになる。すなわち，3 直線 AA'，BB'，OO' は 1 点で交わる。

［解 説］

座標平面上の図形を題材とした頻出題です。ベクトルの利用によって，計算量を減らすことがポイントです。

15　　　　［京都大・文］

$\log_x y+\log_y x>2+(\log_x 2)(\log_y 2)$　$(x>0,\ x\neq 1,\ y>0,\ y\neq 1)$ より，

$$\log_x y+\frac{1}{\log_x y}>2+(\log_x 2)\cdot\frac{\log_x 2}{\log_x y}$$

(i)　$\log_x y>0$ $(x>1,\ y>1$ または $0<x<1,\ 0<y<1)$ のとき

$(\log_x y)^2+1>2\log_x y+(\log_x 2)^2$，$(\log_x y-1)^2-(\log_x 2)^2>0$ より，

$$(\log_x y-1-\log_x 2)(\log_x y-1+\log_x 2)>0,\ \log_x\frac{y}{2x}\cdot\log_x\frac{2y}{x}>0$$

(i-i)　$\log_x\dfrac{y}{2x}>0$ かつ $\log_x\dfrac{2y}{x}>0$ のとき

$x>1$ では，$\dfrac{y}{2x}>1$ かつ $\dfrac{2y}{x}>1$ より，$y>2x$，$y>\dfrac{1}{2}x$

$0<x<1$ では，$0<\dfrac{y}{2x}<1$ かつ $0<\dfrac{2y}{x}<1$ より，$0<y<2x$，$0<y<\dfrac{1}{2}x$

(i-ii)　$\log_x\dfrac{y}{2x}<0$ かつ $\log_x\dfrac{2y}{x}<0$ のとき

$x>1$ では，$0<\dfrac{y}{2x}<1$ かつ $0<\dfrac{2y}{x}<1$ より，$0<y<2x$，$0<y<\dfrac{1}{2}x$

$0<x<1$ では，$\dfrac{y}{2x}>1$ かつ $\dfrac{2y}{x}>1$ より，$y>2x$，$y>\dfrac{1}{2}x$

(ii)　$\log_x y<0$ $(x>1,\ 0<y<1$ または $0<x<1,\ y>1)$ のとき

$(\log_x y)^2+1<2\log_x y+(\log_x 2)^2$ より，$\log_x\dfrac{y}{2x}\cdot\log_x\dfrac{2y}{x}<0$

(ii-i)　$\log_x\dfrac{y}{2x}>0$ かつ $\log_x\dfrac{2y}{x}<0$ のとき

$x>1$ では，$\dfrac{y}{2x}>1$ かつ $0<\dfrac{2y}{x}<1$ より，$y>2x$，$0<y<\dfrac{1}{2}x$

$0<x<1$ では，$0<\dfrac{y}{2x}<1$ かつ $\dfrac{2y}{x}>1$ より，$0<y<2x$，$y>\dfrac{1}{2}x$

(ii-ii)　$\log_x\dfrac{y}{2x}<0$ かつ $\log_x\dfrac{2y}{x}>0$ のとき

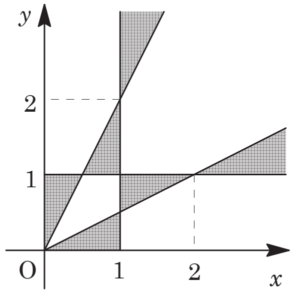
$x>1$ では，$0<\dfrac{y}{2x}<1$ かつ $\dfrac{2y}{x}>1$ より，$0<y<2x$，$y>\dfrac{1}{2}x$

$0<x<1$ では，$\dfrac{y}{2x}>1$ かつ $0<\dfrac{2y}{x}<1$ より，

$y>2x$，$0<y<\dfrac{1}{2}x$

以上より，$(x,\ y)$ の満たす範囲は右図の網点部となる。

ただし，境界は領域に含まない。



［解 説］

頻出タイプの問題です。丁寧に場合分けをして記述しました。

16 ［一橋大］

(1) 不等式 $-2 \leqq x\cos\theta + y\sin\theta \leqq y+1$ ……①に対して，

(i) $x=y=0$ のとき　①は $-2 \leqq 0 \leqq 1$ となり，任意 θ に対して成立する。

(ii) $x \neq 0$ または $y \neq 0$ のとき

φ を $\sin\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\cos\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ と決めると，①より，

$$-2 \leqq \sqrt{x^2+y^2}\sin(\theta+\varphi) \leqq y+1$$

任意の θ に対して成立する条件は，

$$-2 \leqq -\sqrt{x^2+y^2} \cdots\cdots\cdots ②,\quad \sqrt{x^2+y^2} \leqq y+1 \cdots\cdots\cdots ③$$

②より，$\sqrt{x^2+y^2} \leqq 2$，$x^2+y^2 \leqq 4$ ………④

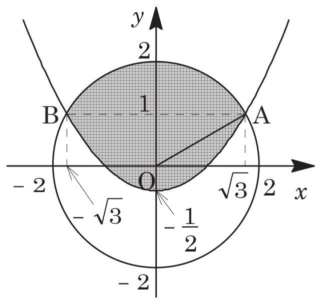
③より，$y+1 \geqq 0$ のもとで，$x^2+y^2 \leqq (y+1)^2$

$$x^2 \leqq 2y+1,\quad y \geqq \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \cdots\cdots\cdots ⑤$$

さて，領域④と⑤の境界線の 2 つの交点 A, B は，

$$(2y+1)+y^2 = 4,\quad (y-1)(y+3)=0$$

$y \geqq -\dfrac{1}{2}$ から $y=1$ となり，$x = \pm\sqrt{3}$ である。



(i)(ii)より，求める領域は右図の網点部である。

ただし，境界は領域に含む。

さて，直線 OA の方程式が $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ で，OA と y 軸のなす角が $\dfrac{\pi}{3}$ より，網点部の面積を S とすると，

$$S = 2\times\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{3} + 2\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right)dx$$

$$= \frac{4\pi}{3} + 2\left[\frac{1}{2\sqrt{3}}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}$$

(2) 不等式 $-1 \leqq x^2\cos\alpha + y\sin\beta \leqq 1$ ……⑥に対し，独立に値をとる任意の α，β では，$-1 \leqq \cos\alpha \leqq 1$，$-1 \leqq \sin\beta \leqq 1$ なので，⑥より，

(i) $y \geqq 0$ のとき

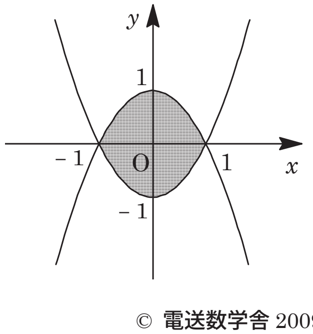
$$-1 \leqq -x^2 - y \cdots\cdots\cdots ⑦,\quad x^2 + y \leqq 1 \cdots\cdots\cdots ⑧$$

⑦⑧より，$y \leqq -x^2+1$

(ii) $y < 0$ のとき

$$-1 \leqq -x^2 + y \cdots\cdots\cdots ⑨,\quad x^2 - y \leqq 1 \cdots\cdots\cdots ⑩$$

⑨⑩より，$y \geqq x^2 - 1$



(i)(ii)より，求める領域は右図の網点部である。

ただし，境界は領域に含む。

そこで，網点部の面積を S とすると，

$$S=2\int_{-1}^{1}(-x^2+1)\,dx=-2\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)\,dx=\frac{1}{3}(1+1)^3=\frac{8}{3}$$

［解 説］

三角不等式の問題です。(1)では任意の θ でとりうる最大値・最小値，(2)では任意の α，β でとる最大値・最小値をもとに，$(x,\ y)$ の条件が定まります。

17　　　　［広島大・理］

(1)　△ABC が二等辺三角形であるとき，点 $C(x,\ y)$ の存在範囲は，$y>0$ において，

(i)　$AC=BC$ のとき

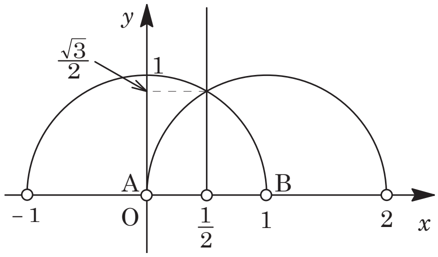
点 C は線分 AB の垂直二等分線 $x=\dfrac{1}{2}$ 上にある。

(ii)　$AB=AC$ のとき

点 C は点 A を中心とする半径 1 の円 $x^2+y^2=1$ 上にある。

(iii)　$BC=BA$ のとき

点 C は点 B を中心とする半径 1 の円 $(x-1)^2+y^2=1$ 上にある。



(i)(ii)(iii)より，点 C は右上図の円または直線上にある。

(2)　△ABC が鋭角三角形である条件は，

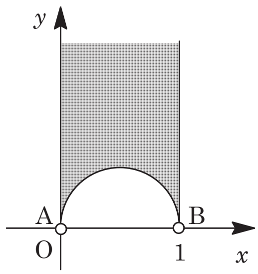
$$\angle CAB<\frac{\pi}{2}\ \cdots\cdots\text{①},\quad \angle ABC<\frac{\pi}{2}\ \cdots\cdots\text{②},\quad \angle BCA<\frac{\pi}{2}\ \cdots\cdots\text{③}$$

$y>0$ において，①②③がすべて成立する点 $C(x,\ y)$ の存在範囲を求める。

①より，点 C は y 軸の右側，すなわち領域 $x>0$ にある。

②より，点 C は直線 $x=1$ の左側，すなわち領域 $x<1$ にある。

③より，点 C は AB を直径とする円の外部，すなわち領域 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2>\dfrac{1}{4}$ にある。



①②③より，点 C は右図の網点部に存在する。ただし，境界は領域に含まない。

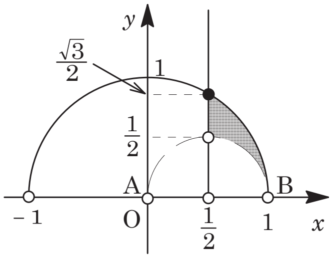
(3)　まず，$\alpha=\angle CAB<\dfrac{\pi}{2}$，$\beta=\angle ABC<\dfrac{\pi}{2}$，$\gamma=\angle BCA<\dfrac{\pi}{2}$ より，点 C は(2)の領域内に存在する。

ここで，条件から，$\alpha\leqq\beta\leqq\gamma$ なので，三角形の角と辺の大小関係を用いると，

$$BC\leqq AC\leqq AB$$

すると，$BC\leqq AC$ から，(1)の結果を利用すると，点 C は領域 $x\geqq\dfrac{1}{2}$ にある。

また，$AC\leqq AB$ から，(1)の結果を利用すると，点 C は領域 $x^2+y^2\leqq 1$ にある。

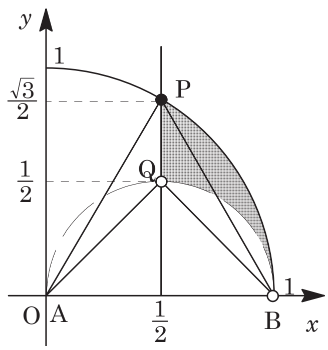


以上より，点 C は右図の網点部に存在する。ただし，破線の境界は領域に含まない。

(4)　まず，点 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\ \ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ とおくと，$\triangle\mathrm{ABP}$ は正三角形となるので，$\angle\mathrm{APB}=\frac{\pi}{3}$ である。

また，AB を直径とする円周上に点 Q をとると，$\angle\mathrm{AQB}=\frac{\pi}{2}$ である。

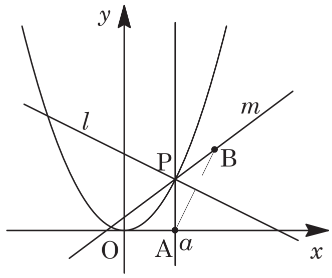
すると，点 C が右図の網点部に存在するとき，線分 AB を弦とする円弧を考え，$\gamma=\angle\mathrm{BCA}$ のとりうる値を求めると，右図より，$\frac{\pi}{3}\leqq\gamma<\frac{\pi}{2}$ である。



［解 説］

巧みな誘導がついている平面図形と領域の総合問題です。式だけで攻めるのではなく，図形的に解くと，スッキリした解になります。

18 ［東北大・文］



(1) $C : y=x^2$ に対して，$y'=2x$

これから，点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における C の接線の方向ベクトルの成分を $(1,\ 2a)$ とおくことができるので，接線に直交する直線 l の方程式は，

$$(x-a)+2a(y-a^2)=0,\quad x+2ay-a-2a^3=0$$

(2) 点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ の l に関する対称点を $\mathrm{B}(b,\ c)$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=k(1,\ 2a),\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k(1,\ 2a)$$

よって，$(b,\ c)=(a,\ 0)+k(1,\ 2a)=(a+k,\ 2ak)$ ………①

また，線分 AB の中点 $\left(\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{c}{2}\right)$ が l 上にあることより，

$$\frac{a+b}{2}+2a\cdot\frac{c}{2}-a-2a^3=0,\quad b+2ac-a-4a^3=0 \text{ ………②}$$

①②より，$a+k+4a^2k-a-4a^3=0$，$k=\dfrac{4a^3}{4a^2+1}$

よって，$(b,\ c)=\left(a+\dfrac{4a^3}{4a^2+1},\ \dfrac{8a^4}{4a^2+1}\right)$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\left(a+\frac{4a^3}{4a^2+1}-a,\ \frac{8a^4}{4a^2+1}-a^2\right)=\frac{a^2}{4a^2+1}(4a,\ 4a^2-1)$$

$a\neq 0$ のとき，2 点 P, B を通る直線 m の方程式は，

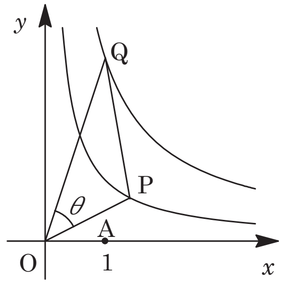
$$y-a^2=\frac{4a^2-1}{4a}(x-a),\quad y=\frac{4a^2-1}{4a}x+\frac{1}{4}$$

(3) a の値によらず直線 m が通る定点 F の座標は，(2)より，$\mathrm{F}\left(0,\ \dfrac{1}{4}\right)$ である。

［解 説］

図形と方程式についての基本題です。ただ，(3)については，定点が 2 点以上存在する可能性はないので，1 点を見つけて終了としています。

19　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［千葉大・理］



$P\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$，$Q\left(q,\ \dfrac{a}{q}\right)$に対して，$\angle AOP=\alpha$，$\angle AOQ=\beta$ とおくと，$\tan\alpha=\dfrac{1}{p^2}$，$\tan\beta=\dfrac{a}{q^2}$となる。

条件より，$\alpha<\beta$なので，$\tan\alpha<\tan\beta$

$$\frac{1}{p^2}<\frac{a}{q^2},\quad ap^2-q^2>0\cdots\cdots\cdots①$$

さて，$\triangle OPQ$の面積をSとすると，①より，

$$S=\frac{1}{2}\left|p\cdot\frac{a}{q}-\frac{1}{p}\cdot q\right|=\frac{1}{2pq}\left|ap^2-q^2\right|=\frac{1}{2pq}(ap^2-q^2)$$

条件より，$\dfrac{1}{2pq}(ap^2-q^2)=3$，$ap^2-q^2=6pq\cdots\cdots\cdots②$

ここで，$\angle POQ=\theta$とおくと，$\theta=\beta-\alpha$から，

$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{\dfrac{a}{q^2}-\dfrac{1}{p^2}}{1+\dfrac{a}{q^2}\cdot\dfrac{1}{p^2}}=\frac{ap^2-q^2}{p^2q^2+a}$$

②を代入すると，$\tan\theta=\dfrac{6pq}{p^2q^2+a}=\dfrac{6}{pq+\dfrac{a}{pq}}\leqq\dfrac{6}{2\sqrt{a}}=\dfrac{3}{\sqrt{a}}$

等号は，$pq=\dfrac{a}{pq}$すなわち$pq=\sqrt{a}$のときに成立する。

よって，$\tan\theta$の最大値は$\dfrac{3}{\sqrt{a}}$となり，$\dfrac{3}{\sqrt{a}}=\dfrac{3}{4}$から，$a=16$である。

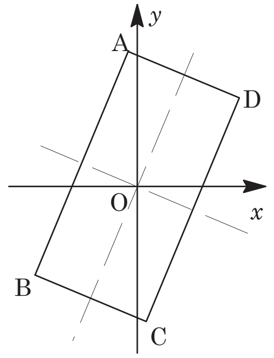
［解　説］

相加平均と相乗平均の関係を用いる最大・最小問題です。置き換えて，微分法の利用という手もありますが，おすすめは前者です。なお，等号の成立するp，qの値が存在することは明らかなので，記述を省いています。

20　　　　［名古屋大・文］

(1)　まず，条件(a)(c)から，頂点の y 座標は，A が最大，C が最小である。

さて，条件(b)より，直線 AB の $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と同じ向きの方向ベクトルの成分は $(-1,\ -2)$ とおくことができ，



$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=2\sqrt{5}a\times\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,\ -2)=-2a(1,\ 2)$$

ここで，$\mathrm{A}(p,\ q)$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(p,\ q)-2a(1,\ 2)=(p-2a,\ q-4a)$$

次に，辺 BC は AB と垂直なので，直線 BC の $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と同じ向きの方向ベクトルの成分は $(2,\ -1)$ とおくことができ，

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=2\sqrt{5}b\times\frac{1}{\sqrt{5}}(2,\ -1)=2b(2,\ -1)$$

すると，$\mathrm{B}(p-2a,\ q-4a)$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(p-2a,\ q-4a)+2b(2,\ -1)=(p-2a+4b,\ q-4a-2b)$$

条件(a)から，C は A と原点対称なので，

$$p-2a+4b=-p\ \cdots\cdots\cdots①,\quad q-4a-2b=-q\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$p=a-2b$，$q=2a+b$ となり，

$$\mathrm{A}(a-2b,\ 2a+b),\ \mathrm{C}(-a+2b,\ -2a-b)$$

また，$p-2a=-a-2b$，$q-4a=-2a+b$ であり，D は B と原点対称なので，

$$\mathrm{B}(-a-2b,\ -2a+b),\ \mathrm{D}(a+2b,\ 2a-b)$$

(2)　$\mathrm{E}(0,\ 5)$ とおくと，E は辺 AD, BC の垂直二等分線 $y=2x$ の上側，辺 AB, DC の垂直二等分線 $y=-\frac{1}{2}x$ の上側にあることより，

$$\mathrm{EA}<\mathrm{EB}<\mathrm{EC},\ \mathrm{EA}<\mathrm{ED}<\mathrm{EC}$$

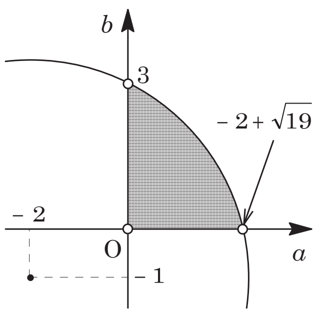
よって，長方形 ABCD が領域 $x^2+(y-5)^2\leqq 100$ ……③に含まれる条件は，点 C が領域③に含まれる条件に等しく，$(-a+2b)^2+(-2a-b-5)^2\leqq 100$

$$(-a+2b)^2+(-2a-b)^2-10(-2a-b)+25\leqq 100$$

$$5a^2+5b^2+20a+10b-75\leqq 0$$

$$(a+2)^2+(b+1)^2\leqq 20$$

よって，$a>0$，$b>0$ と合わせて，a，b に対する条件を ab 平面上に図示すると，右図の網点部となる。ただし，両軸以外の境界線は領域に含む。



［解 説］

図形の配置が指定されているため，単位ベクトルを利用した解で記しています。

21　　[名古屋大・文]

(1)　$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0)$ に対し，$\mathrm{OP}:\mathrm{AP}=1:a$ を満たす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は，$\mathrm{AP}=a\mathrm{OP}$，$\mathrm{AP}^2=a^2\mathrm{OP}^2$ より，

$$(x-1)^2+y^2=a^2(x^2+y^2),\ (a^2-1)(x^2+y^2)+2x-1=0 \cdots\cdots\cdots①$$

(i)　$a=1$ のとき

①より，$2x-1=0$ となり，点 P の軌跡は，直線 $x=\dfrac{1}{2}$ である。

(ii)　$a\neq 1$ のとき

①より，$x^2+y^2+\dfrac{2}{a^2-1}x-\dfrac{1}{a^2-1}=0$ となり，点 P の軌跡は円であり，

$$\left(x+\frac{1}{a^2-1}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{(a^2-1)^2}$$

(2)　(1)より，$\mathrm{OP}:\mathrm{AP}=1:a$ を満たす点 P の軌跡は，$a>1$ から，中心 $\left(-\dfrac{1}{a^2-1},\ 0\right)$，半径 $\dfrac{a}{a^2-1}$ の円である。また，$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1)$ に対し，$\mathrm{OP}:\mathrm{BP}=1:b$ を満たす点 P の軌跡は，$0<b<1$ から，中心 $\left(0,\ -\dfrac{1}{b^2-1}\right)$，半径 $\dfrac{b}{1-b^2}$ の円である。

よって，$\mathrm{OP}:\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=1:a:b$ を満たす点 P が存在するための条件は，

$$\left|\frac{a}{a^2-1}-\frac{b}{1-b^2}\right|\leqq\sqrt{\left(-\frac{1}{a^2-1}\right)^2+\left(\frac{1}{b^2-1}\right)^2}\leqq\frac{a}{a^2-1}+\frac{b}{1-b^2}$$

$$\left|a(1-b^2)-b(a^2-1)\right|\leqq\sqrt{(a^2-1)^2+(b^2-1)^2}\leqq a(1-b^2)+b(a^2-1)$$

$a>1>b>0\cdots\cdots②$ のもとで，この不等式を変形していくと，

$$\left\{a(1-b^2)-b(a^2-1)\right\}^2\leqq(a^2-1)^2+(b^2-1)^2\cdots\cdots\cdots③$$

$$(a^2-1)^2+(b^2-1)^2\leqq\left\{a(1-b^2)+b(a^2-1)\right\}^2\cdots\cdots\cdots④$$

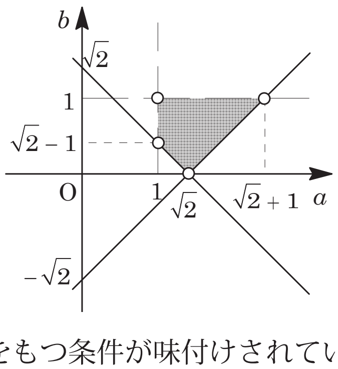
③より，$(a^2-1)(1-b^2)^2+(b^2-1)(a^2-1)^2-2ab(a^2-1)(1-b^2)\leqq 0$

$$(1-b^2)-(a^2-1)-2ab\leqq 0,\ a^2+b^2+2ab\geqq 2,\ a+b\geqq\sqrt{2}\cdots\cdots\cdots⑤$$

④より，$(a^2-1)(1-b^2)^2+(b^2-1)(a^2-1)^2+2ab(a^2-1)(1-b^2)\geqq 0$

$$(1-b^2)-(a^2-1)+2ab\geqq 0,\ a^2+b^2-2ab\leqq 2$$

$$a-b\leqq\sqrt{2}\cdots\cdots\cdots⑥$$

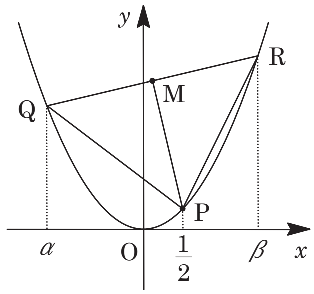


以上より，求める条件は②⑤⑥であり，これを ab 平面上に図示すると，右図の網点部となる。ただし，破線の境界線および白丸は領域に含まない。

[解 説]

アポロニウスの円を題材として，さらに 2 円が共有点をもつ条件が味付けされています。計算に工夫が必要な問題です。

22　　［東京大］



点 $Q(\alpha,\ \alpha^2)$，$R(\beta,\ \beta^2)$ を結ぶ線分の中点を M とすると，$M\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$ となり，$P\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ に対して，

$$\overrightarrow{QR}=(\beta-\alpha,\ \beta^2-\alpha^2)$$

$$\overrightarrow{PM}=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2},\ \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{4}(2\alpha+2\beta-2,\ 2\alpha^2+2\beta^2-1)$$

さて，△PQR が QR を底辺とする二等辺三角形である条件は，$QR\perp PM$ から，

$$\overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{PM}=(\beta-\alpha)(2\alpha+2\beta-2)+(\beta^2-\alpha^2)(2\alpha^2+2\beta^2-1)=0$$

$\alpha\neq\beta$ から，$(2\alpha+2\beta-2)+(\alpha+\beta)(2\alpha^2+2\beta^2-1)=0$

$$(\alpha+\beta)(2\alpha^2+2\beta^2+1)=2\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，△PQR の重心を $G(X,\ Y)$ とおくと，

$$X=\frac{1}{3}\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)\cdots\cdots\cdots②,\quad Y=\frac{1}{3}\left(\alpha^2+\beta^2+\frac{1}{4}\right)\cdots\cdots\cdots③$$

②より $\alpha+\beta=3X-\dfrac{1}{2}\cdots\cdots$④，③より $\alpha^2+\beta^2=3Y-\dfrac{1}{4}\cdots\cdots$⑤

④⑤を①に代入すると，

$$\left(3X-\frac{1}{2}\right)\left(6Y+\frac{1}{2}\right)=2,\quad \left(X-\frac{1}{6}\right)\left(Y+\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{9}$$

よって，$Y=\dfrac{1}{9\left(X-\dfrac{1}{6}\right)}-\dfrac{1}{12}\cdots\cdots\cdots$⑥

ところで，α，β は，④⑤を満たす異なる実数であり，

$$\alpha\beta=\frac{1}{2}\{(\alpha+\beta)^2-(\alpha^2+\beta^2)\}=\frac{1}{2}\left\{\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2-\left(3Y-\frac{1}{4}\right)\right\}\cdots\cdots\cdots⑦$$

④⑦より，α，β を解とする t に関する 2 次方程式は，

$$t^2-\left(3X-\frac{1}{2}\right)t+\frac{1}{2}\left\{\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2-\left(3Y-\frac{1}{4}\right)\right\}=0$$

この方程式が，異なる 2 実数解をもつことより，

$$D=\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2-2\left\{\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2-\left(3Y-\frac{1}{4}\right)\right\}=-\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(3Y-\frac{1}{4}\right)>0$$

よって，$3Y-\dfrac{1}{4}>\dfrac{1}{2}\left(3X-\dfrac{1}{2}\right)^2$，$Y>\dfrac{3}{2}\left(X-\dfrac{1}{6}\right)^2+\dfrac{1}{12}\cdots\cdots\cdots$⑧

⑥⑧より，△PQR の重心 G の軌跡は，

$$y=\frac{1}{9\left(x-\frac{1}{6}\right)}-\frac{1}{12}\cdots\cdots\cdots⑥',\quad y>\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{12}\cdots\cdots\cdots⑧'$$

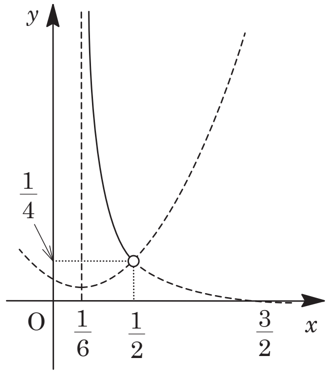
さらに，曲線⑥′と領域⑧′の境界線の交点は，

$$\frac{1}{9\left(x-\frac{1}{6}\right)}-\frac{1}{12}=\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{12}$$

$$\left(x-\frac{1}{6}\right)^3+\frac{1}{9}\left(x-\frac{1}{6}\right)-\frac{2}{27}=0$$

$$\left(x-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)\left\{\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{6}\right)+\frac{2}{9}\right\}=0$$

この方程式の実数解は $x=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$ であるので，重心 G の軌跡を図示すると，右図の実線部となる。ただし，点 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$ は除く。



［解 説］

少し前になりますが，2004 年の文理共通の第 1 問を思い浮かべながら解きました。このときは，題材が正三角形でしたが，本年は二等辺三角形です。ただ，点 P が固定されている本年の方が，方針は定まりやすかったと思います。

$\boxed{23}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［筑波大］

(1)　線分 OA の垂直二等分線の方程式は，中点が$\left(\dfrac{t}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(t,\ 1)$より，

$$t\left(x-\frac{1}{2}t\right)+\left(y-\frac{1}{2}\right)=0,\ 2tx+2y-t^2-1=0\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　①を t についてまとめると，$t^2-2xt-2y+1=0\cdots\cdots\cdots②$

すると，$|t|\geqq 1$のとき直線①が通過する点$(x,\ y)$は，t についての 2 次方程式②が$|t|\geqq 1$に少なくとも 1 つの実数解をもつ$(x,\ y)$の条件として求められる。

ここで，$f(t)=t^2-2xt-2y+1=(t-x)^2-x^2-2y+1$とおくと，

(i)　$|x|\geqq 1$ $(x\leqq -1,\ 1\leqq x)$のとき

求める条件は，$f(x)=-x^2-2y+1\leqq 0$より，

$$y\geqq -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$$

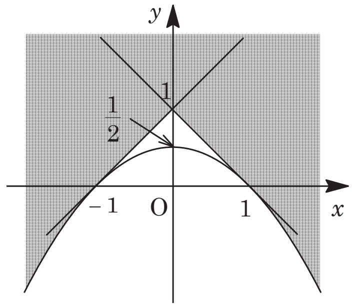
(ii)　$|x|<1$ $(-1<x<1)$のとき

求める条件は，$f(1)=1-2x-2y+1\leqq 0$ または $f(-1)=1+2x-2y+1\leqq 0$ より，

$$y\geqq -x+1 \text{ または } y\geqq x+1$$

(i)(ii)より，求める領域は右図の網点部となる。

ただし，境界は領域に含む。



［解　説］

直線の通過領域を求める頻出問題です。2 次方程式の実数解の条件として処理をしています。

$\boxed{24}$　　［東北大・理］

(1)　不等式 $y \leqq 2ax-a^2+2a+2$ の表す領域に，点 $(p,\ q)$ が存在しているので，

$$q \leqq 2ap-a^2+2a+2,\quad a^2-2(p+1)a+q-2 \leqq 0 \cdots\cdots\cdots(*)$$

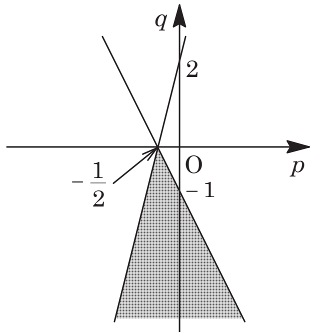
ここで，$f(a)=a^2-2(p+1)a+q-2$ とおくと，$(*)$は $f(a) \leqq 0$ となる。

さて，$-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすすべての a に対し，$f(a) \leqq 0$ である条件は，

$$f(-1)=2p+q+1 \leqq 0$$

$$f(2)=-4p+q-2 \leqq 0$$

よって，点 $(p,\ q)$ の範囲を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



(2)　(1)と同様に，$-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすいずれかの a に対し，$f(a) \leqq 0$ である条件は，

(i)　$p+1 \leqq -1\ (p \leqq -2)$ のとき

$$f(-1)=2p+q+1 \leqq 0$$

(ii)　$-1 \leqq p+1 \leqq 2\ (-2 \leqq p \leqq 1)$ のとき

$f(a)=0$ が実数解をもつことより，

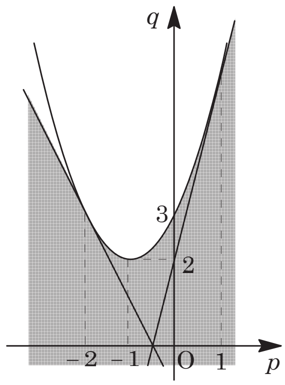
$$D/4=(p+1)^2-q+2 \geqq 0,\quad q \leqq (p+1)^2+2$$

(iii)　$p+1 \geqq 2\ (p \geqq 1)$ のとき

$$f(2)=-4p+q-2 \leqq 0$$

(i)〜(ii)より，点 $(p,\ q)$ の範囲は右図の網点部となる。

ただし，境界は領域に含む。



［解 説］

2 次不等式と領域の融合問題です。基本的な内容ですが，時間はかかります。

$\boxed{25}$　　　　［北海道大・文］

(1)　直線$l_1 : ax+y=2a+2$は，$y=-a(x-2)+2$より，どんな a の値に対しても，点$(2,\ 2)$を通る。よって，$\mathrm{P}(2,\ 2)$である。

(2)　直線$l_2 : bx+y=2b+2$は，$y=-b(x-2)+2$より，どんなbの値に対しても，点$\mathrm{P}(2,\ 2)$を通るので，l_1，l_2の交点は$\mathrm{P}(2,\ 2)$である。すると，直線$l : x+y=0$は点Pを通らないことから，3直線l，l_1，l_2が同一点で交わる場合はない。

そこで，3直線l，l_1，l_2によって三角形がつくられるための条件は，

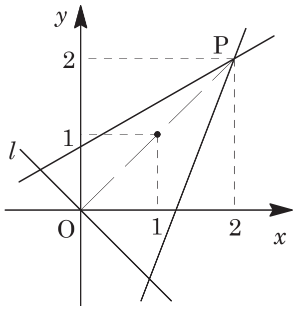
(i)　lとl_1が平行でないとき　$-a\neq-1$より，$a\neq1$

(ii)　lとl_2が平行でないとき　$-b\neq-1$より，$b\neq1$

(iii)　l_1とl_2が平行でないとき　$-a\neq-b$より，$a\neq b$

(i)～(iii)より，求める$a,\ b$の条件は，

$$a\neq1,\ b\neq1,\ a\neq b$$



(3)　(2)のとき，点$(1,\ 1)$が(2)の三角形の内部にある条件は，図より，lとl_1の交点，lとl_2の交点が，一方は第2象限，もう一方は第4象限に位置することである。

lとl_1の交点は，$ax-x=2a+2$から，$x=\dfrac{2a+2}{a-1}$

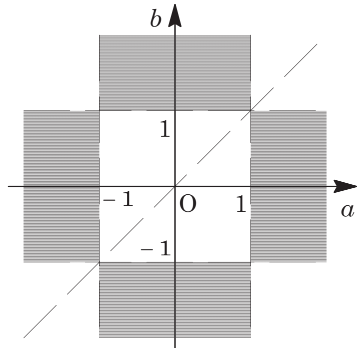
lとl_2の交点は，$bx-x=2b+2$から，$x=\dfrac{2b+2}{b-1}$

よって，求める条件は，$\dfrac{2a+2}{a-1}\cdot\dfrac{2b+2}{b-1}<0$

両辺に$(a-1)^2(b-1)^2$をかけると，

$$(a+1)(a-1)(b+1)(b-1)<0$$

この領域をab平面上に図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まない。

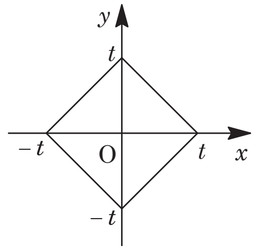


［解 説］

定点を通過する直線についての基本的な問題です。なお，(3)において，分数不等式を変形するときに，分母を2乗した式を両辺にかけるという技法は必須です。

$\boxed{26}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［神戸大・理］

(1)　$t>0$ のとき，$|x|+|y|=t$ ……①に対して，



(i)　$x\geqq 0,\ y\geqq 0$ のとき　$x+y=t$

(ii)　$x\leqq 0,\ y\geqq 0$ のとき　$-x+y=t$

(iii)　$x\leqq 0,\ y\leqq 0$ のとき　$-x-y=t$

(iv)　$x\geqq 0,\ y\leqq 0$ のとき　$x-y=t$

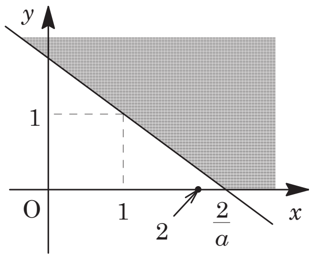
(i)〜(iv)より，①で表される図形は右図の正方形である。

(2)　$a\geqq 0$ のとき，連立不等式 $ax+(2-a)y\geqq 2$ ……②，$y\geqq 0$ ……③で表される領域は，まず②の境界線 $ax+(2-a)y=2$ …… ②$'$ に対して，

$$a(x-y)+2y-2=0$$

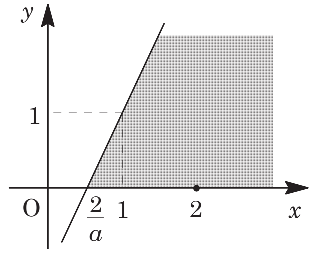
すると，0 以上の任意の実数 a に対して，$x=y=1$ で成立することから，直線②$'$ はつねに点$(1,\ 1)$を通る。また，直線②$'$ は，$a=0$ のとき $y=1$ となり x 軸に平行になり，$a>0$ のとき x 軸と交わり，その交点は点$\left(\dfrac{2}{a},\ 0\right)$である。

さらに，$x=y=0$ のとき②は成立しないので，不等式②の表す領域は，直線②$'$ を境界線とする原点を含まない側である。



(i)　$a=0$ または $\dfrac{2}{a}\geqq 2$ $(0\leqq a\leqq 1)$ のとき

連立不等式②かつ③で表される領域は右図の網点部となり，y 軸との交点$\left(0,\ \dfrac{2}{2-a}\right)$で，$|x|+|y|$ は最小値 $m=\dfrac{2}{2-a}$ をとる。

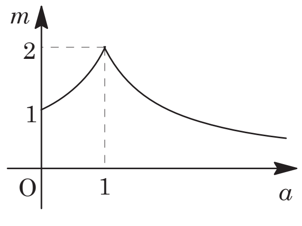


(ii)　$0<\dfrac{2}{a}\leqq 2$ $(a\geqq 1)$ のとき

連立不等式②かつ③で表される領域は右図の網点部となり，x 軸との交点$\left(\dfrac{2}{a},\ 0\right)$で，$|x|+|y|$ は最小値 $m=\dfrac{2}{a}$ をとる。

(i)(ii)より，$|x|+|y|$ の最小値 m は，

$$m=\frac{2}{2-a}\ \ (0\leqq a\leqq 1),\ \ m=\frac{2}{a}\ \ (a\geqq 1)$$



(3)　(2)より，a と m の関係をグラフに表すと右図のようになり，$a=1$ のとき m は最大値 2 をとる。

［解 説］

不等式②で表される領域を把握するために，あの手この手を用いています。これは，極力，場合分けを避けるためです。

27　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［神戸大］

(1) l が y 軸と平行であるとき，k を実数として，$l: x=k$ とおくと，A(1, 0) と l の距離が $|k-1|$，B(−1, 0) と l の距離が $|k+1|$ となる。条件より，

$$|k-1|+|k+1|=1 \cdots\cdots\cdots ①$$

ところが，$|k-1|+|k+1|=|1-k|+|k+1| \geqq |(1-k)+(k+1)|=2$ であるので，

①を満たす k は存在しない。よって，l は y 軸と平行でない。

(2) (1)より，$l: y=mx+n$，すなわち $mx-y+n=0$ とおく。

すると，l は線分 AB と交わることより，$(m+n)(-m+n) \leqq 0 \cdots\cdots\cdots ②$

ここで，A と l の距離が $\dfrac{|m+n|}{\sqrt{m^2+1}}$，B と l の距離が $\dfrac{|-m+n|}{\sqrt{m^2+1}}$ となるので，

$$\frac{|m+n|}{\sqrt{m^2+1}}+\frac{|-m+n|}{\sqrt{m^2+1}}=1,\quad |m+n|+|-m+n|=\sqrt{m^2+1}$$

$$(m+n)^2+(-m+n)^2+2|(m+n)(-m+n)|=m^2+1 \cdots\cdots\cdots ③$$

②より，$m^2+2n^2-2(m+n)(-m+n)=1$ となり，$3m^2=1$

よって，l の傾きは，$m=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。

(3) l が線分 AB と交わらないとき，$(m+n)(-m+n)>0 \cdots\cdots\cdots ④$

③④より，$m^2+2n^2+2(m+n)(-m+n)=1$ となり，$-m^2+4n^2=1 \cdots\cdots\cdots ⑤$

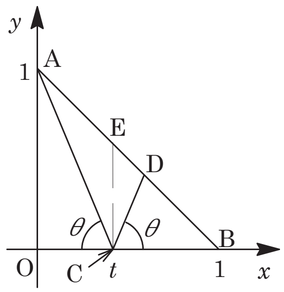
すると，l と原点との距離 d は，⑤より，

$$d=\frac{|n|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|n|}{\sqrt{4n^2}}=\frac{|n|}{2|n|}=\frac{1}{2}$$

［解 説］

点と直線についての問題です。方針がうまく立つように誘導がつけられているおもしろい問題です。なお，②と④は，正領域・負領域の考え方を利用しています。

28　　［東京大・文］



まず，直線 AB の方程式は，$y=1-x$ ………①

そこで，点 C を通り，x 軸に垂直な直線と直線 AB との交点を E とすると，

$$\mathrm{CE}=1-t$$

また，$\angle\mathrm{ACO}=\angle\mathrm{BCD}=\theta$ とおくと，$\tan\theta=\dfrac{1}{t}$ より，直線 CD の方程式は，

$$y=\frac{1}{t}(x-t)\ \cdots\cdots\cdots ②$$

①②を連立して，$1-x=\dfrac{1}{t}(x-t)$ から，$t-tx=x-t$，$(t+1)x=2t$

よって，点 D の x 座標は，$x=\dfrac{2t}{t+1}$ となる。

すると，$\triangle\mathrm{ACD}$ の面積 S は，$S=\dfrac{1}{2}(1-t)\cdot\dfrac{2t}{t+1}=\dfrac{-t^2+t}{t+1}$

ここで，$u=t+1$ とおくと，$0<t<1$ から $1<u<2$ となり，

$$S=\frac{-(u-1)^2+u-1}{u}=\frac{-u^2+3u-2}{u}=3-\left(u+\frac{2}{u}\right)$$

さて，相加平均と相乗平均の関係より，$u+\dfrac{2}{u}\geqq 2\sqrt{2}$

等号は，$u=\dfrac{2}{u}$ すなわち $u=\sqrt{2}$ のとき成立し，これは $1<u<2$ を満たすことより，

$$S=3-\left(u+\frac{2}{u}\right)\leqq 3-2\sqrt{2}$$

以上より，$\triangle\mathrm{ACD}$ の面積の最大値は，$3-2\sqrt{2}$ である。

［解 説］

分数関数の最大・最小は，微分法を利用するのが一般的ですが，範囲外です。このようなときは，次に相加平均と相乗平均の関係が使えないかと考えます。

$\boxed{29}$ ［東北大・理］

(1)　条件から，$x=s+t+1$ ……①，$y=s-t-1$ ……②に対して，①②より，

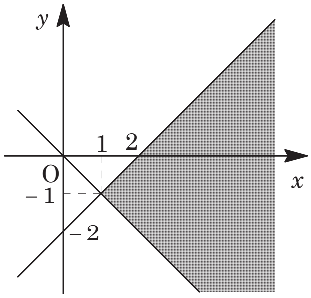
$2s=x+y$，$s=\dfrac{1}{2}(x+y)$ ………③

$2t+2=x-y$，$t=\dfrac{1}{2}(x-y-2)$ ………④

$s\geqq 0$, $t\geqq 0$ から，③④より，

$x+y\geqq 0$，$x-y-2\geqq 0$

すると，点$(x,\ y)$の動く領域は右図の網点部となる。なお，境界線は領域に含む。



(2)　条件から，$x=st+s-t+1$ ……⑤，$y=s+t-1$ ……⑥に対して，

⑤より，$x=(s-1)(t+1)+2$，$(s-1)(t+1)=x-2$ ………⑦

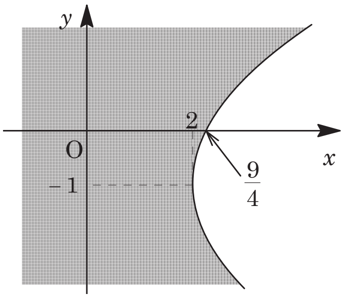
⑥より，$y=(s-1)+(t+1)-1$，$(s-1)+(t+1)=y+1$ …………⑧

⑦⑧から，$s-1$，$t+1$ は u についての 2 次方程式 $u^2-(y+1)u+x-2=0$ の 2 つの解であり，これらが実数であることより，

$D=(y+1)^2-4(x-2)\geqq 0$

$(y+1)^2\geqq 4(x-2)$

s, t が実数全体を動くとき，$s-1$，$t+1$ も実数全体を動くので，点$(x,\ y)$の動く領域は右図の網点部となる。なお，境界線は領域に含む。



［解 説］

(2)は，1 文字を消去して実数解条件からも導けますが，少し式計算をして，対称式を持ち出しました。

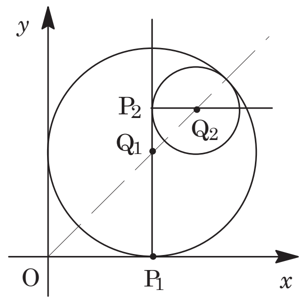
30　　　　［千葉大］

(1)　$0<a<1$ から，円 $C(a):(x+a-1)^2+(y+a-1)^2=2a^2$ は，中心 $(1-a,\ 1-a)$ で半径 $\sqrt{2}a$ である。

ここで，$a=a_1$ のとき，$C(a_1)$ が x 軸と接する条件は，

$$1-a_1=\sqrt{2}a_1,\ (\sqrt{2}+1)a_1=1$$

よって，$a_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$



(2)　(1)より，$P_1(2-\sqrt{2},\ 0)$，$Q_1(2-\sqrt{2},\ 2-\sqrt{2})$ となり，直線 P_1Q_1 は $x=2-\sqrt{2}$ である。

条件より，円 $C(a_2)$ は直線 P_1Q_1 と接することより，

$$\left|(1-a_2)-(2-\sqrt{2})\right|=\sqrt{2}a_2,\ \sqrt{2}-1-a_2=\pm\sqrt{2}a_2$$

(i)　$\sqrt{2}-1-a_2=\sqrt{2}a_2$ のとき

$(\sqrt{2}+1)a_2=\sqrt{2}-1$ より，$a_2=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$

(ii)　$\sqrt{2}-1-a_2=-\sqrt{2}a_2$ のとき

$-(\sqrt{2}-1)a_2=\sqrt{2}-1$ となり，$0<a_2<1$ に反する。

(i)(ii)より，$a_2=3-2\sqrt{2}$ である。

(3)　円 $C(a_n)$ は中心 $(1-a_n,\ 1-a_n)$ で半径 $\sqrt{2}a_n$ であり，直線 $P_{n-1}Q_{n-1}$ は $x=1-a_{n-1}$ または $y=1-a_{n-1}$ である。

条件より，円 $C(a_n)$ と直線 $P_{n-1}Q_{n-1}$ が接するので，

$$\left|(1-a_n)-(1-a_{n-1})\right|=\sqrt{2}a_n,\ a_{n-1}-a_n=\pm\sqrt{2}a_n$$

(i)　$a_{n-1}-a_n=\sqrt{2}a_n$ のとき

$(\sqrt{2}+1)a_2=a_{n-1}$ より，$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}a_{n-1}=(\sqrt{2}-1)a_{n-1}=a_1(\sqrt{2}-1)^{n-1}$

(1)より，$a_1=\sqrt{2}-1$ なので，$a_n=(\sqrt{2}-1)^n$

(ii)　$a_{n-1}-a_n=-\sqrt{2}a_n$ のとき

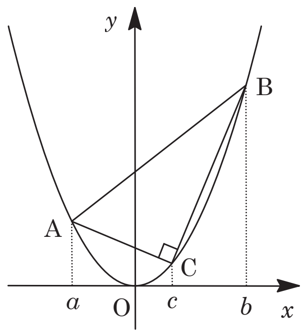
$-(\sqrt{2}-1)a_n=a_{n-1}$ となり，$0<a_n<1$，$0<a_{n-1}<1$ に反する。

(i)(ii)より，$a_n=(\sqrt{2}-1)^n$ である。

［解 説］

(3)では，n を偶奇に分けて処理が必要かとも思いましたが，対称性から不要でした。なお，円 $C(a)$ は a の値にかかわらず定点 $(1,\ 1)$ を通ることに注目すると，場合分けが必要ありません。

31　　［神戸大・文］



(1)　$\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$，$\mathrm{C}(c,\ c^2)$ に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(a-c,\ a^2-c^2)=(a-c)(1,\ a+c)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(b-c,\ b^2-c^2)=(b-c)(1,\ b+c)$$

条件より，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=0$ なので，$1+(a+c)(b+c)=0$

$$(a+c)(b+c)=-1\cdots\cdots\cdots①$$

よって，$a=-c-\dfrac{1}{b+c}\cdots\cdots\cdots②$

(2)　②より，$b-a=b+c+\dfrac{1}{b+c}\cdots\cdots\cdots③$

ここで，$b+c<0$ とすると，①より $a+c>0$ となり $b<-c<a$ であるが，これは $a<b$ に反するので，$b+c>0$ である。

すると，③より，相加平均と相乗平均の関係を用いて，

$$b-a=b+c+\frac{1}{b+c}\geqq 2\sqrt{(b+c)\cdot\frac{1}{b+c}}=2$$

なお，等号は $b+c=1$ のときに成立する。

(3)　$\mathrm{AB}=\sqrt{(b-a)^2+(b^2-a^2)^2}=\sqrt{(b-a)^2\{1+(b+a)^2\}}=(b-a)\sqrt{1+(b+a)^2}$

ここで，(2)より $b-a\geqq 2$ であり，$(b+a)^2\geqq 0$ であるので，

$$\mathrm{AB}\geqq 2\sqrt{1+0}=2$$

等号が成立するのは，$b-a=2$ かつ $b+a=0$，すなわち $a=-1$，$b=1$ のときである。このとき，$b+c=1$ から $c=0$ となる。

よって，AB の最小値は 2 であり，このとき $\mathrm{A}(-1,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ 1)$，$\mathrm{C}(0,\ 0)$ となる。

［解 説］

(3)では大雑把に評価して，細部を詰めています。この方法が，いつもうまくいくとは限りませんが。

$\boxed{32}$ ［岡山大・理］

(1)　$\mathrm{Q}(x,\ y)$ とおくと，$d(\mathrm{Q},\ \mathrm{A})=2d(\mathrm{Q},\ \mathrm{B})$ より，

$$T:|x-3|+|y|=2(|x+3|+|y|)$$

ここで，T 上に点 $(a,\ b)$ があれば，$|a-3|+|b|=2(|a+3|+|b|)$

すると，$|a-3|+|-b|=2(|a+3|+|-b|)$ から，点 $(a,\ -b)$ も T 上にある。

(2)　(1)より，図形 T は x 軸対称となるので，以下，$y\geqq 0$ で考えると，

$$|x-3|+y=2(|x+3|+y),\ \ y=|x-3|-2|x+3|$$

(i)　$x<-3$ のとき　$y=-(x-3)+2(x+3)=x+9$

すると，$y\geqq 0$ より，$-9\leqq x<3$ となる。

(ii)　$-3\leqq x<3$ のとき　$y=-(x-3)-2(x+3)=-3x-3$

すると，$y\geqq 0$ より，$-3\leqq x\leqq -1$ となる。

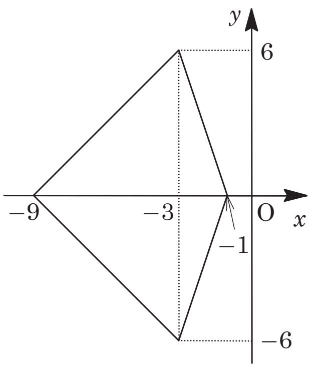
(iii)　$x\geqq 3$ のとき

$$y=(x-3)-2(x+3)=-x-9$$

このとき，$y\geqq 0$ を満たす x は存在しない。

(i)～(iii)の結果をもとに，x 軸対称すると図形 T は右図のようになり，囲まれる領域の面積 S は，

$$S=\left\{\frac{1}{2}(-1+9)\cdot 6\right\}\cdot 2=48$$



(3)　$\mathrm{D}(x,\ y)$ が図形 T 上を動くとき，$x\leqq -1$，$y\leqq 6$ より，

$$d(\mathrm{D},\ \mathrm{C})=|x-13|+|y-8|=-(x-13)-(y-8)=21-(x+y)$$

ここで，$d(\mathrm{D},\ \mathrm{C})$ が最小となるのは，$x+y$ が最大となるときで，上図より，$(x,\ y)=(-3,\ 6)$ の場合である。

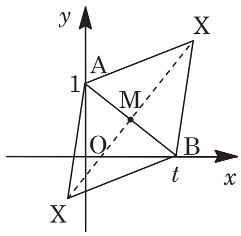
これより，$d(\mathrm{D},\ \mathrm{C})$ の最小値は，$21-(-3+6)=18$ である。

［解　説］

絶対値つきの方程式で表される図形を描く問題です。ていねいな場合分けがすべてです。

$\boxed{33}$ ［広島大・理］

(1) 線分 AB の中点 M は $\mathrm{M}\left(\dfrac{t}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ となる。



また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(t,\ -1)$ に垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ は，

$$\vec{e}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(1,\ t)$$

さて，線分 AB を 1 辺とする正三角形のもう 1 つの頂点を X とおくと，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{1+t^2}$，$|\overrightarrow{\mathrm{MX}}|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+t^2}$ から，

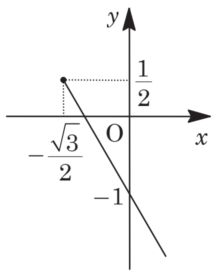
$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MX}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+t^2}\,\vec{e}=\left(\frac{t}{2},\ \frac{1}{2}\right)\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+t^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(1,\ t)$$

$$=\left(\frac{t}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

よって，$\mathrm{X}\left(\dfrac{t}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$ または $\mathrm{X}\left(\dfrac{t}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

(2) 条件より，$\mathrm{C}\left(\dfrac{t}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$ となり，$\mathrm{C}(x,\ y)$ とおくと，

$$x=\frac{t}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdots\cdots\cdots①,\quad y=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}t\cdots\cdots\cdots②$$



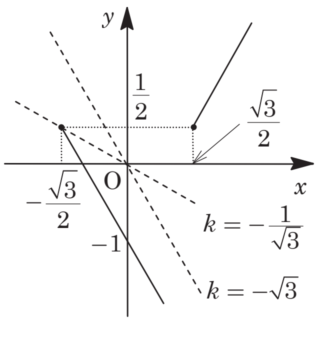
①より，$t=2x+\sqrt{3}$ となり，②に代入すると，

$$y=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}(2x+\sqrt{3})=-\sqrt{3}x-1$$

$t\geqq 0$ から $x\geqq-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となり，点 C の軌跡は右図のようになる。

(3) 点 C 以外のもう 1 つの頂点 $\mathrm{D}\left(\dfrac{t}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$ についても同様にすると，

$$y=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(2x-\sqrt{3})=\sqrt{3}x-1\quad\left(x\geqq\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



よって，点 C と点 D の軌跡は右図の実線となる。

さて，直線 $y=kx$ 上の点 P に対して，3 点 A，B，P を頂点とする正三角形ができるのは，点 C，D の軌跡と直線 $y=kx$ が共有点をもつことなので，

$$k<-\sqrt{3},\quad -\frac{1}{\sqrt{3}}\leqq k$$

［解 説］

とらえにくい(3)の設問への誘導が，うまくつけられている問題です。なお，(1)の解答例では単位ベクトルを利用しましたが，回転を利用する方法もあります。

$\boxed{34}$ ［北海道大・理］

(1)　$z=\dfrac{w-1}{w+1}$ より，$z(w+1)=w-1$ から，$(z-1)w=-z-1$ ………①

$z=1$ のとき①は成立しないので，$z\neq 1$ となり，$w=\dfrac{-z-1}{z-1}$ ………②

ここで，$z=x+yi$，$w=s+ti$ より，②から，

$$s+ti=\frac{-(x+1)-yi}{(x-1)+yi}=\frac{\{-(x+1)-yi\}\{(x-1)-yi\}}{(x-1)^2+y^2}=\frac{-(x^2-1)-y^2+2yi}{(x-1)^2+y^2}$$

よって，$s=\dfrac{-x^2-y^2+1}{(x-1)^2+y^2}$ ……③，$t=\dfrac{2y}{(x-1)^2+y^2}$ ……④

(2)　$0\leqq s\leqq 1$ かつ $0\leqq t\leqq 1$ より，③④から，

$$0\leqq\frac{-x^2-y^2+1}{(x-1)^2+y^2}\leqq 1 \text{ ………⑤},\quad 0\leqq\frac{2y}{(x-1)^2+y^2}\leqq 1 \text{ ………⑥}$$

⑤より，$0\leqq -x^2-y^2+1$ となり，$x^2+y^2\leqq 1$ ………⑦

また，$-x^2-y^2+1\leqq(x-1)^2+y^2$ となり，$x^2+y^2-x\geqq 0$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\geqq\frac{1}{4} \text{ ………⑧}$$

⑥より，$0\leqq 2y$ となり，$y\geqq 0$ ………⑨

また，$2y\leqq(x-1)^2+y^2$ となり，$(x-1)^2+(y-1)^2\geqq 1$ ………⑩

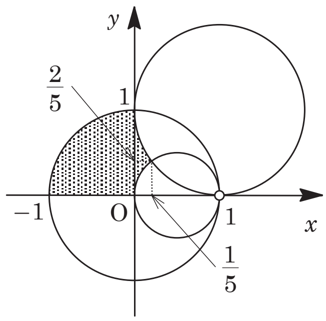
なお，⑧の境界線 $x^2+y^2-x=0$ と，⑩の境界線 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ の点 $(1,\ 0)$ 以外の交点は，両式を連立して，

$$-x-2y+1=0,\quad x=-2y+1$$

すると，$(-2y+1)^2+y^2-(-2y+1)=0$ から，

$$5y^2-2y=0$$

よって，$y=\dfrac{2}{5}$，$x=-2\cdot\dfrac{2}{5}+1=\dfrac{1}{5}$



$z\neq 1$ のもとで，⑦〜⑩より，求める範囲 D は右図の網点部となる。ただし，境界線は領域に含む。

(3)　$-5x+y=k$ とおくと，$y=5x+k$ から，傾き 5 で y 切片 k の直線を表す。

すると，k が最小となるのは，(2)の図を利用すると，この直線が点 $\left(\dfrac{1}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)$ を通るときであり，その最小値は，

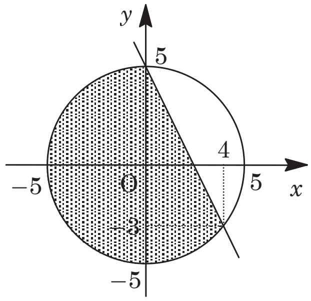
$$k=-5\cdot\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=-\frac{3}{5}$$

［解 説］

複素数が題材ですが，内容的には xy 平面での不等式と領域の問題です。

$\boxed{35}$ ［東京大・文］

まず，連立不等式 $x^2+y^2 \leqq 25$，$2x+y \leqq 5$ の満たす領域は，右図の網点部である。ただし，境界は領域に含む。



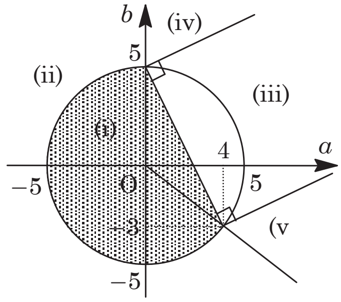
また，実数 a，b に対して，

$$z=x^2+y^2-2ax-2by$$
$$=(x-a)^2+(y-b)^2-(a^2+b^2)$$

これより，z が最小値をとるのは，点 $(x,\ y)$ と点 $(a,\ b)$ の距離が最小になるときである。

ここで，境界線 $2x+y=5$，すなわち $y=-2x+5$ に垂直で，点 $(0,\ 5)$，点 $(4,\ -3)$ を通る直線の方程式は，それぞれ，

$$y=\frac{1}{2}x+5,\quad y=\frac{1}{2}x-5$$



さらに，原点 O と点 $(0,\ 5)$，点 $(4,\ -3)$ を通る直線の方程式は，それぞれ，

$$x=0,\quad y=-\frac{3}{4}x$$

(i)　$a^2+b^2 \leqq 25$ かつ $b \leqq -2a+5$ のとき

z は，$(x,\ y)=(a,\ b)$ において最小値をとり，その値は，

$$z=-(a^2+b^2)=-a^2-b^2$$

(ii)　$a^2+b^2 \geqq 25$ かつ $\left(a \leqq 0 \text{ または } b \leqq -\frac{3}{4}a\right)$ のとき

z は，O と点 $(a,\ b)$ を結ぶ線分と円 $x^2+y^2=25$ の交点において最小値をとり，その値は，

$$z=\left(\sqrt{a^2+b^2}-5\right)^2-(a^2+b^2)=25-10\sqrt{a^2+b^2}$$

(iii)　$b \geqq -2a+5$ かつ $b \leqq \frac{1}{2}a+5$ かつ $b \geqq \frac{1}{2}a-5$ のとき

z は，点 $(a,\ b)$ から直線 $2x+y=5$ に下ろした垂線の足において最小値をとり，その値は，

$$z=\left(\frac{|2a+b-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}\right)^2-(a^2+b^2)=\frac{1}{5}(2a+b-5)^2-(a^2+b^2)$$
$$=\frac{1}{5}(-a^2-4b^2+4ab-20a-10b+25)$$

(iv)　$a \geqq 0$ かつ $b \geqq \frac{1}{2}a+5$ のとき

z は，$(x,\ y)=(0,\ 5)$ において最小値をとり，その値は，

$$z=25-10b$$

(v)　$b \geqq -\frac{3}{4}a$ かつ $b \leqq \frac{1}{2}a-5$ のとき

z は，$(x,\ y)=(4,\ -3)$ において最小値をとり，その値は，

$$z=16+9-8a+6b=25-8a+6b$$

［解 説］

点 $(a,\ b)$ が領域の外部にあるときは，境界線に沿って，円を滑らないように転がせながら，考えをまとめています。

$\boxed{36}$ ［岡山大・理］

(1)　$F=x^2+y^2+2axy+2bx+1$ とおくと,

$$F=y^2+2axy+x^2+2bx+1=(y+ax)^2+(1-a^2)x^2+2bx+1$$

これより, すべての実数 y に対して $F \geqq 0$ が成立する条件は,

$$(1-a^2)x^2+2bx+1 \geqq 0$$

さらに, $G=(1-a^2)x^2+2bx+1$ とおき, すべての実数 x に対して $G \geqq 0$ である条件を求める。

(i)　$1-a^2=0\ (a=\pm 1)$ のとき

$G=2bx+1$ より, 求める条件は $b=0$ である。

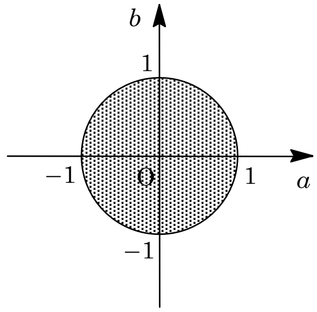
(ii)　$1-a^2 \neq 0\ (a \neq \pm 1)$ のとき

$G=(1-a^2)\left(x+\dfrac{b}{1-a^2}\right)^2-\dfrac{b^2}{1-a^2}+1$ より, 求める条件は,

$1-a^2>0$ ………①, $-\dfrac{b^2}{1-a^2}+1 \geqq 0$ ………②

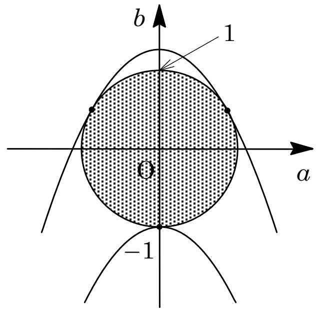
①②より, $a^2+b^2 \leqq 1\ (-1<a<1)$

(i)(ii)より, 実数 a, b が満たすべき条件は, $a^2+b^2 \leqq 1$ となり, 点 $(a,\ b)$ のなす領域は右図の網点部である。ただし, 境界は領域に含む。



(2)　$a^2+b=k$ とおくと, $b=-a^2+k$ ………③

右図より, $(a,\ b)=(0,\ -1)$ のとき, k は最小値 -1 をとる。



また, 境界線 $a^2+b^2=1$ と③を連立すると,

$b=b^2-1+k$, $b^2-b-1+k=0$ ………④

共有点の b 座標が 1 つである条件は,

$D=1-4(-1+k)=0$, $k=\dfrac{5}{4}$

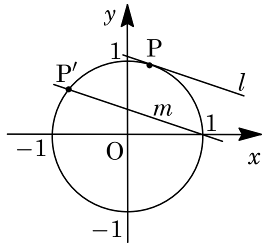
このとき, ④より $b=\dfrac{1}{2}$, ③より $a=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって, $(a,\ b)=\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ のとき, k は最大値 $\dfrac{5}{4}$ をとる。

［解 説］

2 変数関数の最小値に関する問題です。まず, x を固定し y を変化させたときの最小値を求め, 次にその最小値について, x を変化させることにより 2 変数についての最小値を求めるという手順に従っています。

37　　［一橋大］



(1)　円 $x^2+y^2=1$ ……①上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ における接線 l と平行で，点 $(1,\ 0)$ を通る直線 m の方程式は，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(s,\ t)$ より，

$$s(x-1)+ty=0 \text{ ………②}$$

ここで，$t\neq 0$ のときは，②より $y=-\dfrac{s}{t}(x-1)$ となり，①に代入すると，

$$x^2+\frac{s^2}{t^2}(x-1)^2=1,\ t^2(x^2-1)+s^2(x-1)^2=0$$

$$(x-1)\{(s^2+t^2)x-(s^2-t^2)\}=0$$

$x\neq 1$ のとき，$x=\dfrac{s^2-t^2}{s^2+t^2}$ となり，$y=-\dfrac{s}{t}\left(\dfrac{s^2-t^2}{s^2+t^2}-1\right)=\dfrac{2st}{s^2+t^2}$

すると，$s^2+t^2=1$ から，$x=s^2-t^2$，$y=2st$ となり，$\mathrm{P}'(s',\ t')$ は，

$$s'=s^2-t^2,\ t'=2st \text{ ………③}$$

なお，$t=0$ のときは $s=\pm 1$ から，$(s',\ t')=(1,\ 0)$ となり条件を満たす。

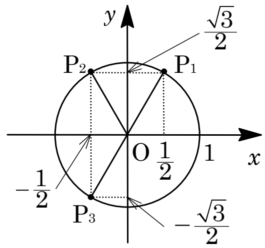
(2)　まず，$s=\cos\theta$，$t=\sin\theta$ とおくと，③より，

$$s'=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos 2\theta,\ t'=2\cos\theta\sin\theta=\sin 2\theta$$

点 P が $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)=\left(\cos\dfrac{\pi}{6},\ \sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ のとき，

$\mathrm{P}_1\left(\cos\dfrac{\pi}{3},\ \sin\dfrac{\pi}{3}\right)$，$\mathrm{P}_2\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi,\ \sin\dfrac{2}{3}\pi\right)$

$\mathrm{P}_3\left(\cos\dfrac{4}{3}\pi,\ \sin\dfrac{4}{3}\pi\right)$



よって，P_1，P_2，P_3 を図示すると，右図のようになる。

(3)　$0\leqq\theta<2\pi$ として，$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおくと，(2)から $\mathrm{P}_1(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$ となり，さらに $\mathrm{P}_2(\cos 4\theta,\ \sin 4\theta)$，$\mathrm{P}_3(\cos 8\theta,\ \sin 8\theta)$ から，帰納的に $\mathrm{P}_n(\cos 2^n\theta,\ \sin 2^n\theta)$ と表すことができる。

ここで，$\mathrm{P}_n=\mathrm{P}$ のとき，k を整数として，$2^n\theta=\theta+2k\pi$ なので，

$$(2^n-1)\theta=2k\pi,\ \theta=\frac{2k\pi}{2^n-1}$$

すると，$0\leqq\dfrac{2k\pi}{2^n-1}<2\pi$ より，$0\leqq 2k\pi<2\pi(2^n-1)$，$0\leqq k<2^n-1$

よって，$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 2^n-2$ から，$\mathrm{P}_n=\mathrm{P}$ となる点 P は 2^n-1 個ある。

［解　説］

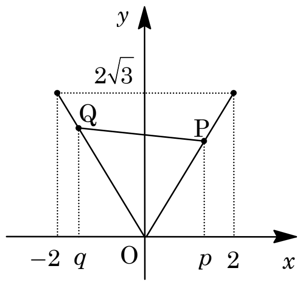
図形的な条件を三角関数の列へとつなぐ問題です。(3)は題意が把握しにくいので，$n=1,\ 2,\ \cdots$ と具体例を考え，方針を立てました。

$\boxed{38}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大・理］

(1) 条件より，$\mathrm{P}(p,\ \sqrt{3}p)$，$\mathrm{Q}(q,\ -\sqrt{3}q)$ とおくと，$\mathrm{OP}+\mathrm{OQ}=6$ から，

$$2p-2q=6,\ q=p-3 \cdots\cdots\cdots ①$$

ただし，$-2 \leqq q \leqq 0$ より $-2 \leqq p-3 \leqq 0$ となり，$0 \leqq p \leqq 2$ と合わせて $1 \leqq p \leqq 2$ である。



ここで，直線 PQ の傾きは，①より，

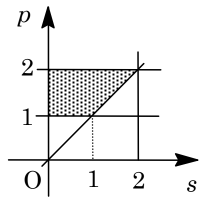
$$\frac{\sqrt{3}p+\sqrt{3}q}{p-q}=\frac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)$$

これより，線分 PQ の方程式は，$y-\sqrt{3}p=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)(x-p)$　$(p-3 \leqq x \leqq p)$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)x-\frac{2\sqrt{3}}{3}p(p-3) \cdots\cdots\cdots ②$$

さて，点 $(s,\ t)$ は直線②上にあるので，$t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)s-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}p(p-3) \cdots\cdots\cdots ③$

ただし，$0 \leqq s \leqq 2$，$p-3 \leqq s \leqq p$，$1 \leqq p \leqq 2$ であり，これを sp 平面上に図示すると，右図の網点部となる。



そこで，$f(p)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)s-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}p(p-3)$ とおき，この領域における $f(p)$ のとり得る値の範囲を求める。

$$f(p)=\frac{\sqrt{3}}{3}\{-2p^2+(2s+6)p-3s\}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left\{-2\left(p-\frac{s+3}{2}\right)^2+\frac{s^2+9}{2}\right\}$$

(i)　$0 \leqq s \leqq 1$ のとき

右上図より，$1 \leqq p \leqq 2$ となり，$\dfrac{3}{2} \leqq \dfrac{s+3}{2} \leqq 2$ から，

$$f(1) \leqq f(p) \leqq f\left(\frac{s+3}{2}\right),\ \frac{\sqrt{3}}{3}(-s+4) \leqq f(p) \leqq \frac{\sqrt{3}}{6}(s^2+9)$$

(ii)　$1 \leqq s \leqq 2$ のとき

右上図より，$s \leqq p \leqq 2$ となり，$2 \leqq \dfrac{s+3}{2} \leqq \dfrac{5}{2}$ から，

$$f(s) \leqq f(p) \leqq f(2),\ \sqrt{3}s \leqq f(p) \leqq \frac{\sqrt{3}}{3}(s+4)$$

(i)(ii)より，D に入るような t の範囲は，③から $t=f(p)$ なので，

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(-s+4) \leqq t \leqq \frac{\sqrt{3}}{6}(s^2+9)\quad (0 \leqq s \leqq 1)$$

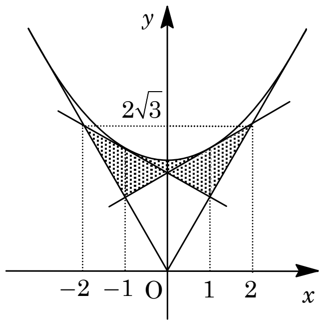
$$\sqrt{3}s \leqq t \leqq \frac{\sqrt{3}}{3}(s+4)\quad (1 \leqq s \leqq 2)$$

(2)　$-2 \leqq s \leqq 0$ のときは，y 軸に関する対称性を考え，(1)と同様にすると，

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(s+4) \leqq t \leqq \frac{\sqrt{3}}{6}(s^2+9)\quad (-1 \leqq s \leqq 0)$$

$$-\sqrt{3}s \leqq t \leqq \frac{\sqrt{3}}{3}(-s+4) \quad (-2 \leqq s \leqq -1)$$

そこで，放物線 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}(s^2+9)$ と直線 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}(s+4)$，$t=\frac{\sqrt{3}}{3}(-s+4)$ は，それぞれ $s=1$，$s=-1$ で接することに注意して点 $(s,\ t)$ を含む領域 D を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



[解 説]

線分の通過領域の頻出問題です。上の解答例では，条件の不等式を sp 平面上に領域として示し，それを見ながら計算を進めています。なお，この図にグラフの軸となる $p=\frac{s+3}{2}$ も書き込んでおくのも，1 つの方法です。