1　　［金沢大・理］

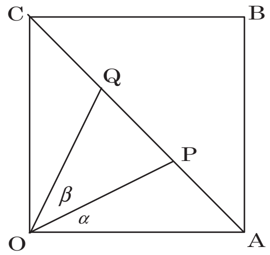
xy 平面上の円 $C : x^2+y^2=3$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(0,\ \sqrt{3})$，$\mathrm{B}(0,\ -\sqrt{3})$ がある。点 $\mathrm{P}(0,\ \sqrt{2})$ を通る直線と円 C の交点を Q, R とする。ただし，点 R は第 1 象限にあり，$\angle\mathrm{APR}=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 原点 O から線分 QR へ垂線をひき QR との交点を S とする。線分 OS, QR の長さをそれぞれ θ を用いて表せ。

(2) $\triangle\mathrm{AQB}$ と $\triangle\mathrm{ABR}$ の面積をそれぞれ T_1，T_2 とする。$T_1=\sqrt{3}\,\mathrm{QP}\sin\theta$，$T_2=\sqrt{3}\,\mathrm{PR}\sin\theta$ が成り立つことを示し，四角形 AQBR の面積 $S(\theta)$ を求めよ。

(3) (2)の $S(\theta)$ に対して，$2\sqrt{3}<S(\theta)$ を満たす θ の値の範囲を求めよ。

2　　［広島大・理］



正方形 OABC の対角線 AC を 3 等分し，図のように，A に近い点を P，C に近い点を Q とする。また，$\angle AOP = \alpha$，$\angle POQ = \beta$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\cos\alpha$，$\cos\beta$ の値を求めよ。

(2)　$\alpha < \dfrac{\pi}{6} < \beta$ を示せ。

(3)　線分 PQ 上に点 R を $\angle POR = \alpha$ となるようにとる。このとき，比 AR : RC を求めよ。

3　　［東京大・文］

四角形 ABCD が，半径 $\frac{65}{8}$ の円に内接している。この四角形の周の長さが 44 で，辺 BC と辺 CD の長さがいずれも 13 であるとき，残りの 2 辺 AB と DA の長さを求めよ。

4　［大阪大・理］

1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD の辺 BC, CD, DA, AB 上に，それぞれ点 P, Q, R, S を，$\angle APB = \angle QPC$，$\angle PQC = \angle RQD$，$\angle QRD = \angle SRA$ となるようにとる。ただし，点 P, Q, R, S は，どれも正方形 ABCD の頂点とは一致しないものとする。以下の問いに答えよ。

(1)　線分 BP の長さ t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　直線 AP と直線 RS の交点を T とする。四角形 PQRT の面積を線分 BP の長さ t についての関数と考えて $f(t)$ で表す。$f(t)$ の最大値を求めよ。

5　　［九州大・文］

3 辺の長さがそれぞれ $\sqrt{x^2-2x}$ ，$4-x$ ，2 で表される三角形がある。長さ $\sqrt{x^2-2x}$ の辺は他の 2 辺より長さが短くないとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　このような三角形が描けるための x の満たす範囲を求めよ。

(2)　この三角形の最短の辺と向かい合った角の大きさを θ とするとき，$\cos\theta$ を x を用いて表せ。

(3)　x が(1)で求めた範囲にあるときの $\cos\theta$ の最小値と，その最小値を与える x の値を求めよ。

6　　［京都大・文］

$AB=AC$ である二等辺三角形 ABC を考える。辺 AB の中点を M とし，辺 AB を延長した直線上に点 N を，$AN:NB=2:1$ となるようにとる。このとき $\angle BCM=\angle BCN$ となることを示せ。ただし，点 N は辺 AB 上にはないものとする。

7　　[京都大・理]

地球上の北緯60°東経135°の地点を A，北緯60°東経75°の地点を B とする。A から B に向かう 2 種類の飛行経路R_1，R_2を考える。R_1は西に向かって同一緯度で飛ぶ経路とする。R_2は地球の大円に沿った経路のうち飛行距離の短い方とする。R_1に比べてR_2は飛行距離が3%以上短くなることを示せ。ただし地球は完全な球体であるとし，飛行機は高度 0 を飛ぶものとする。また必要があれば，三角関数表を用いよ。

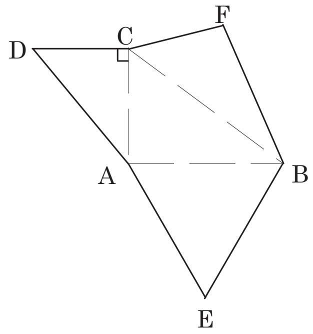
注：大円とは，球を球の中心を通る平面で切ったとき，その切り口にできる円のことである。

8　［京都大・文］

平面上で，鋭角三角形△OAB を辺 OB に関して折り返して得られる三角形を△OBC，△OBC を辺 OC に関して折り返して得られる三角形を△OCD，△OCD を辺 OD に関して折り返して得られる三角形を△ODE とする。△OAB と△OBE の面積比が 2 : 3 のとき，$\sin\angle AOB$ の値を求めよ。

9　　［北海道大］

図はある三角錐 V の展開図である。ここで，$\mathrm{AB}=4$，$\mathrm{AC}=3$，$\mathrm{BC}=5$，$\angle\mathrm{ACD}=90°$ で，$\triangle\mathrm{ABE}$ は正三角形である。このとき，V の体積を求めよ。



10　　　　［九州大］

三角形 ABC の 3 辺の長さを $a=\mathrm{BC}$, $b=\mathrm{CA}$, $c=\mathrm{AB}$ とする。実数 $t \geqq 0$ を与えたとき, A を始点とし B を通る半直線上に $\mathrm{AP}=tc$ となるように点 P をとる。次の問いに答えよ。

(1)　CP^2 を a, b, c, t を用いて表せ。

(2)　点 P が $\mathrm{CP}=a$ を満たすとき, t を求めよ。

(3)　(2)の条件を満たす点 P が辺 AB 上にちょうど 2 つあるとき, $\angle\mathrm{A}$ と $\angle\mathrm{B}$ に関する条件を求めよ。

11　　［千葉大・文］

$\triangle$ABC において，頂点 A から直線 BC に下ろした垂線の長さは 1，頂点 B から直線 CA に下ろした垂線の長さは $\sqrt{2}$，頂点 C から直線 AB に下ろした垂線の長さは 2 である。このとき，$\triangle$ABC の面積と，内接円の半径，および，外接円の半径を求めよ。

$\boxed{12}$　［京都大・理］

$1<a<2$ とする。3 辺の長さが $\sqrt{3}$, a, b である鋭角三角形の外接円の半径が 1 であるとする。このとき, a を用いて b を表せ。

13　　［長崎大・理］

$\angle \mathrm{A}=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle \mathrm{B}=\alpha$ である△ABC を考える。△ABC の外接円の半径を R とする。この外接円上の点 P が，点 A を含まない弧 BC 上を動くものとする。$\angle \mathrm{BAP}=\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　△ABP の面積の最大値を R，α を用いて表せ。

(2)　△BPC の面積を R，θ を用いて表せ。

(3)　$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ とする。△ABP と△BPC の面積の和 S の最大値を求めよ。

14　　[千葉大・文]

三角形 ABC の面積は $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$，外接円の半径は 1，$\angle \mathrm{BAC}=60^\circ$，$\mathrm{AB}>\mathrm{AC}$ である。このとき，三角形 ABC の各辺の長さを求めよ。

15　　［神戸大・文］

xy 平面上に相異なる 4 点 A，B，C，D があり，線分 AC と BD は原点 O で交わっている。点 A の座標は(1，2)で，線分 OA と OD の長さは等しく，四角形 ABCD は円に内接している。$\angle \mathrm{AOD}=\theta$ とおき，点 C の x 座標を a，四角形 ABCD の面積を S とする。以下の問いに答えよ。

(1) 線分 OC の長さを a を用いた式で表せ。また，線分 OB と OC の長さは等しいことを示せ。

(2) S を a と θ を用いた式で表せ。

(3) $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ とし，$20 \leqq S \leqq 40$ とするとき，a のとりうる値の最大値を求めよ。

$\boxed{16}$　［京都大・理］

次の命題(p)，(q)のそれぞれについて，正しいかどうか答えよ。正しければ証明し，正しくなければ反例を挙げて正しくないことを説明せよ。

(p)　正 n 角形の頂点から 3 点を選んで内角の 1 つが $60°$ である三角形を作ることができるならば，n は 3 の倍数である。

(q)　$\triangle$ABC と$\triangle$ABD において，AC＜AD かつ BC＜BD ならば，$\angle$C＞$\angle$D である。

17　　［一橋大］

平面上の 4 点 O，A，B，C が，$\mathrm{OA}=4$，$\mathrm{OB}=3$，$\mathrm{OC}=2$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3$ を満たすとき，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積の最大値を求めよ。

$\boxed{18}$ ［千葉大］

座標平面上に，原点を中心とする半径 1 の円と，その円に外接し各辺が x 軸または y 軸に平行な正方形がある。円周上の点$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(ただし\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$における接線と正方形の隣接する 2 辺がなす三角形の 3 辺の長さの和は一定であることを示せ。また，その三角形の面積を最大にする θ を求めよ。

19　　　　［九州大・文］

鋭角三角形 △ABC について，∠A，∠B，∠C の大きさを，それぞれ A，B，C とする。△ABC の重心を G，外心を O とし，外接円の半径を R とする。

(1) A と O から辺 BC に下ろした垂線を，それぞれ AD，OE とする。このとき，$\mathrm{AD}=2R\sin B\sin C$，$\mathrm{OE}=R\cos A$ を証明せよ。

(2) G と O が一致するならば，△ABC は正三角形であることを証明せよ。

(3) △ABC が正三角形でないとし，さらに OG が BC と平行であるとする。このとき，$\mathrm{AD}=3\mathrm{OE}$，$\tan B\tan C=3$ を証明せよ。