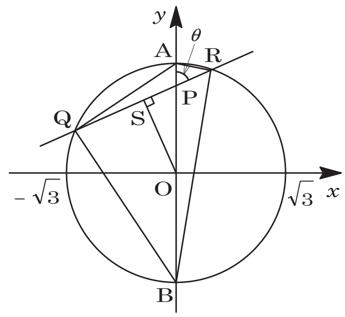
1　　　　［金沢大・理］



(1)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\mathrm{OS}=\mathrm{OP}\sin\theta=\sqrt{2}\sin\theta$

また，$\mathrm{SR}=\sqrt{\mathrm{OR}^2-\mathrm{OS}^2}=\sqrt{3-2\sin^2\theta}$ より，

$$\mathrm{QR}=2\mathrm{SR}=2\sqrt{3-2\sin^2\theta}$$

(2)　$T_1=\triangle\mathrm{AQB}$，$T_2=\triangle\mathrm{ABR}$ なので，

$$T_1=\frac{1}{2}\mathrm{QP}\cdot\mathrm{AP}\sin(\pi-\theta)+\frac{1}{2}\mathrm{QP}\cdot\mathrm{PB}\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{QP}(\mathrm{AP}+\mathrm{PB})\sin\theta=\frac{1}{2}\mathrm{QP}\cdot2\sqrt{3}\sin\theta$$
$$=\sqrt{3}\,\mathrm{QP}\sin\theta$$
$$T_2=\frac{1}{2}\mathrm{PR}\cdot\mathrm{AP}\sin\theta+\frac{1}{2}\mathrm{PR}\cdot\mathrm{PB}\sin(\pi-\theta)=\frac{1}{2}\mathrm{PR}(\mathrm{AP}+\mathrm{PB})\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{PR}\cdot2\sqrt{3}\sin\theta=\sqrt{3}\,\mathrm{PR}\sin\theta$$

よって，四角形AQBRの面積$S(\theta)$は，(1)より，

$$S(\theta)=T_1+T_2=\sqrt{3}(\mathrm{QP}+\mathrm{PR})\sin\theta=\sqrt{3}\,\mathrm{QR}\sin\theta=2\sqrt{3}\sqrt{3-2\sin^2\theta}\sin\theta$$

(3)　$2\sqrt{3}<S(\theta)$ より，$1<\sqrt{3-2\sin^2\theta}\sin\theta$ となり，$1<(3-2\sin^2\theta)\sin^2\theta$

$$2\sin^4\theta-3\sin^2\theta+1<0,\ (2\sin^2\theta-1)(\sin^2\theta-1)<0$$
$$(\sqrt{2}\sin\theta+1)(\sqrt{2}\sin\theta-1)(\sin\theta+1)(\sin\theta-1)<0$$

ここで，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ なので，$\sqrt{2}\sin\theta-1>0$ と同値になる。

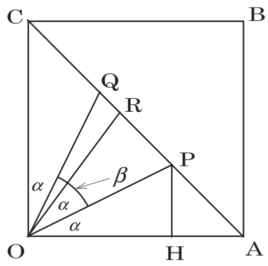
よって，$\sin\theta>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ から，$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ である。

［解 説］

四角形の面積は，2 本の対角線の長さとそのなす角を用いて表すことができます。(1)と(2)は，この公式を誘導する設問です。

2

［広島大・理］



(1)　まず，一般性を失うことなく，$OA = OC = 1$ とすることができる。

　ここで，P から OA に下ろした垂線の足を H とすると，$OH : HA = CP : PA = 2 : 1$ から，

$$OP = \sqrt{OH^2 + PH^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

　これより，$\cos\alpha = \dfrac{OH}{OP} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2}{5}\sqrt{5}$

$$\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\sqrt{1 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$$

(2)　まず，$4 > \sqrt{15}$ より $\dfrac{2}{\sqrt{5}} > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$5\sqrt{3} > 8$ より $\dfrac{\sqrt{3}}{2} > \dfrac{4}{5}$ となるので，

$$\frac{2}{\sqrt{5}} > \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{4}{5},\quad \cos\alpha > \cos\frac{\pi}{6} > \cos\beta$$

　$f(x) = \cos x$ は $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ で単調減少するので，$\alpha < \dfrac{\pi}{6} < \beta$ となる。

(3)　(1)から $\sin 2\alpha = \dfrac{4}{5}$ なので，$\cos 2\alpha = \sqrt{1 - \left(\dfrac{4}{5}\right)^2} = \dfrac{3}{5}$

　さて，$\angle ORA = \pi - \left(\dfrac{\pi}{4} + 2\alpha\right) = \dfrac{3}{4}\pi - 2\alpha$ から，$\triangle OAR$ に正弦定理を適用すると，

$$\frac{AR}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{\sin\left(\frac{3}{4}\pi - 2\alpha\right)},\quad AR = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\frac{3}{4}\pi\cos 2\alpha - \cos\frac{3}{4}\pi\sin 2\alpha}$$

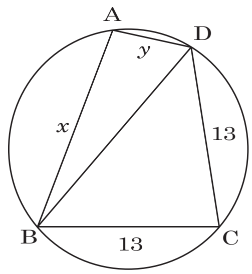
　よって，$AR = \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{4}{5}} = \dfrac{8}{7\sqrt{2}} = \dfrac{4}{7}\sqrt{2}$

　これより，$RC = \sqrt{2} - \dfrac{4}{7}\sqrt{2} = \dfrac{3}{7}\sqrt{2}$ となり，$AR : RC = 4 : 3$ である。

［解 説］

ベクトルを利用した設定で，文系に類題が出ていますが，理系ではこの誘導はありません。しかし，そのために逆に発想が制約されませんでした。

3　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大・文］



$\triangle$BCD において，正弦定理より，

$$\frac{\mathrm{BD}}{\sin C}=2\times\frac{65}{8},\ \mathrm{BD}=\frac{65}{4}\sin C\ \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，余弦定理より，

$$\mathrm{BD}^2=13^2+13^2-2\cdot 13^2\cos C$$
$$=2\cdot 13^2(1-\cos C)\ \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$\dfrac{65^2}{4^2}\sin^2 C=2\cdot 13^2(1-\cos C)$

$$5^2\cdot 13^2(1+\cos C)(1-\cos C)=2\cdot 13^2\cdot 4^2(1-\cos C)$$

$1-\cos C>0$ より，$25(1+\cos C)=32$，$\cos C=\dfrac{7}{25}\ \cdots\cdots\cdots ③$

②より，$\mathrm{BD}^2=2\times 13^2\times\dfrac{18}{25}$，$\mathrm{BD}=\dfrac{6\times 13}{5}=\dfrac{78}{5}$

ここで，$\mathrm{AB}=x$，$\mathrm{DA}=y$ とおくと，条件より，

$$x+y=44-13\times 2,\ x+y=18\ \cdots\cdots\cdots ④$$

$\triangle$ABD に余弦定理を適用して，$\dfrac{78^2}{25}=x^2+y^2-2xy\cos(180^\circ-C)$

$$\frac{6^2\times 13^2}{25}=(x+y)^2-2xy+2xy\cos C$$

③より，$\dfrac{6^2\times 13^2}{25}=(x+y)^2-\dfrac{36}{25}xy$，$6^2\times 13^2=25(x+y)^2-36xy\ \cdots\cdots\cdots ⑤$

④⑤より，$36xy=-6^2\times 13^2+5^2\times 18^2$，$36xy=(78+90)(-78+90)$

$$xy=\frac{168\times 12}{36}=56\ \cdots\cdots\cdots ⑥$$

④⑥より, x, y は方程式 $t^2-18t+56=0$ の 2 つの解となるので,

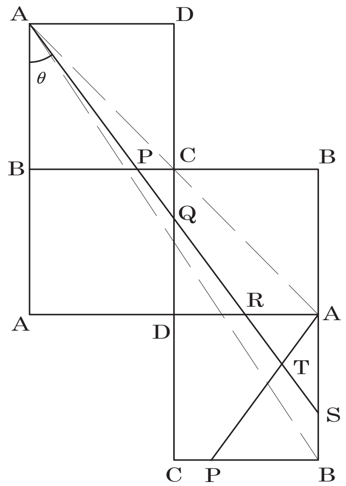
$$(t-4)(t-14)=0,\ t=4,\ 14$$

よって，$(\mathrm{AB},\ \mathrm{DA})=(4,\ 14),\ (14,\ 4)$

［解 説］

センター試験でよく見かける構図の問題ですが，いろいろな考え方が浮かび，方針の決めにくい良問です。また，計算にも工夫が必要です。

4　［大阪大・理］



(1)　右図のように，正方形 ABCD を辺 BC，CD，DA に関して，順に折り返していく。すると，条件より，折れ線 APQRS は 1 本の直線になる。

さて，点 S が辺 AB 上にあるとき，点 P, Q, R は，それぞれ辺 BC, CD, DA 上に存在する。

ここで，点 S が点 A と一致するとき $BP=1$，点 S が点 B と一致するとき $BP=\dfrac{2}{3}$ となり，求める条件は，$BP=t$ から $\dfrac{2}{3}<t<1$ である。

(2)　まず，$\angle BAP=\theta$ とおくと，$\tan\theta=t$ となる。

そこで，$\angle CQP=\angle DQR=\angle ASR=\theta$ から，

$$CP=1-t,\ CQ=\frac{1-t}{\tan\theta}=\frac{1-t}{t}$$

$$DQ=1-\frac{1-t}{t}=\frac{2t-1}{t},\ DR=\frac{2t-1}{t}\tan\theta=2t-1,\ AR=1-(2t-1)=2-2t$$

これより，$\triangle ABP=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot t=\dfrac{t}{2}$，$\triangle PCQ=\dfrac{1}{2}(1-t)\cdot\dfrac{1-t}{t}=\dfrac{(1-t)^2}{2t}$

$$\triangle QDR=\frac{1}{2}(2t-1)\cdot\frac{2t-1}{t}=\frac{(2t-1)^2}{2t}$$

また，RS と AP の交点を T とするとき，$\angle TAS=\angle TSA=\theta$ から，$\triangle TAS$ は二等辺三角形となり，T から AR への垂線の長さは，AS の $\dfrac{1}{2}$ であるので，

$$AS=\frac{2-2t}{\tan\theta}=\frac{2-2t}{t},\ \triangle RAT=\frac{1}{2}(2-2t)\cdot\frac{2-2t}{2t}=\frac{(1-t)^2}{t}$$

したがって，四角形 PQRT の面積 $f(t)$ は，

$$f(t)=1-\frac{t}{2}-\frac{(1-t)^2}{2t}-\frac{(2t-1)^2}{2t}-\frac{(1-t)^2}{t}=1-\frac{t^2+3(1-t)^2+(2t-1)^2}{2t}$$

$$=1-\frac{4t^2-5t+2}{t}=\frac{-4t^2+6t-2}{t}=6-\left(4t+\frac{2}{t}\right)$$

ここで，相加平均と相乗平均の関係より，$4t+\dfrac{2}{t}\geqq2\sqrt{4t\cdot\dfrac{2}{t}}=4\sqrt{2}$

等号成立は $4t=\dfrac{2}{t}$ のときであり，$\dfrac{2}{3}<t<1$ から $t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の場合となる。

以上より，$f(t)$ の最大値は $6-4\sqrt{2}$ である。

［解 説］

有名な反射の問題です。上の解のように折り返しを利用するのが常套手段です。なお，平行四辺形 PQRT の面積は，まわりの三角形を除く方針で計算しています。

5 ［九州大・文］

(1)　まず，$x^2-2x>0$ かつ $4-x>0$ から，$x<0$，$2<x<4$ ……①となり，条件より，

$$\sqrt{x^2-2x} \geqq 4-x \cdots\cdots\text{②},\quad \sqrt{x^2-2x} \geqq 2 \cdots\cdots\text{③}$$

$4-x>0$ なので，②より $x^2-2x \geqq (4-x)^2$ となり，$x \geqq \dfrac{8}{3}$ ………②′

③から，$x^2-2x \geqq 4$ となり，$x \leqq 1-\sqrt{5}$，$1+\sqrt{5} \leqq x$ ………③′

①②′③′をまとめると，$1+\sqrt{5} \leqq x<4$ ………④

さらに，三角形の形成条件から，$\sqrt{x^2-2x}<(4-x)+2$

$$x^2-2x<(6-x)^2,\quad x<\frac{18}{5} \cdots\cdots\text{⑤}$$

④⑤より，$1+\sqrt{5} \leqq x<\dfrac{18}{5}$

(2)　(1)より，$\dfrac{2}{5}<4-x \leqq 3-\sqrt{5}$ となるので，$4-x<2$ である。

よって，最短の辺の長さは $4-x$ であり，余弦定理より，

$$\cos\theta=\frac{2^2+(x^2-2x)-(4-x)^2}{2\cdot 2\cdot\sqrt{x^2-2x}}=\frac{6x-12}{4\sqrt{x^2-2x}}=\frac{3(x-2)}{2\sqrt{x^2-2x}}$$

(3)　(1)より，$x>2$ なので，

$$\cos\theta=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{(x-2)^2}{x(x-2)}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x-2}{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{2}{x}}$$

$1+\sqrt{5} \leqq x<\dfrac{18}{5}$ より，$x=1+\sqrt{5}$ のとき $\cos\theta$ は最小となり，最小値は，

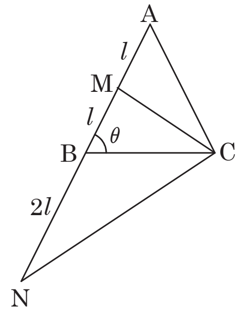
$$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{(-1+\sqrt{5})^2}{-1+5}}=\frac{3}{4}(-1+\sqrt{5})$$

［解 説］

(1)では，不等式が多量に現れるので，いったん中締めをしています。なお，両辺を2乗すると，一般的に同値関係が崩れるので注意が必要です。

6

［京都大・文］



まず，$AB=AC=2l$，$\angle ABC=\theta$ とおくと，

$$BC=2\times 2l\cos\theta=4l\cos\theta$$

$\triangle BCM$ に余弦定理を適用すると，

$$CM^2=l^2+(4l\cos\theta)^2-2l\cdot 4l\cos\theta\cdot\cos\theta$$
$$=l^2+8l^2\cos^2\theta=l^2(1+8\cos^2\theta)$$

次に，$\triangle BCN$ に余弦定理を適用すると，

$$CN^2=(2l)^2+(4l\cos\theta)^2-2\cdot 2l\cdot 4l\cos\theta\cdot\cos(\pi-\theta)$$
$$=4l^2+32l^2\cos^2\theta=4l^2(1+8\cos^2\theta)$$

すると，$CM^2:CN^2=1:4$ となり，

$$CM:CN=1:2\cdots\cdots\cdots ①$$

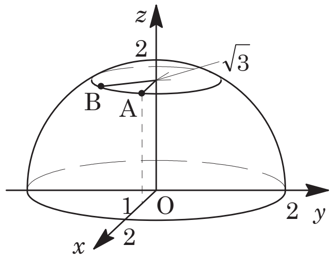
また，条件より，$MB:BN=1:2\cdots\cdots\cdots ②$

①②から，$MB:BN=CM:CN$ となることより，$\angle BCM=\angle BCN$ である。

［解 説］

内角の二等分線の定理を利用するという方針を立て，その方向に沿って解きました。他にもいろいろな解法が考えられます。

7　　　［京都大・理］



まず，地球の半径を 2，赤道面を xy 平面，北極を点 $(0,\ 0,\ 2)$ とし，東経135°を xz 平面上とする座標系を設定する。

すると，地点 A は北緯60°東経135°より，その座標は $\mathrm{A}(1,\ 0,\ \sqrt{3})$ となる。また，地点 B は北緯60°東経75°より，$\mathrm{B}(x,\ y,\ \sqrt{3})$ とおくと，

$$x = 2\cos 60^\circ \cos(-60^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$y = 2\cos 60^\circ \sin(-60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

さて，経路 R_1 は，平面 $z=\sqrt{3}$ 上での弧 AB より，その長さを l_1 とおくと，

$$l_1 = 2\pi \cdot 1 \times \frac{60}{360} = \frac{\pi}{3} = \frac{30}{90}\pi$$

また，経路 R_2 は，半径 2 の大円上での弧 AB であり，$\angle\mathrm{AOB} = \theta^\circ$ とおくと，

$$l_2 = 2\pi \cdot 2 \times \frac{\theta}{360} = \frac{\pi}{90}\theta$$

ここで，$\cos\theta^\circ = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|} = \dfrac{\frac{1}{2}+3}{2\cdot 2} = \dfrac{7}{8} = 0.875$ から，三角関数表を用いると，

$$28^\circ < \theta^\circ < 29^\circ$$

よって，$\dfrac{28}{90}\pi < l_2 < \dfrac{29}{90}\pi$ となり，$\dfrac{l_2}{l_1} < \dfrac{29}{30} < 0.97$ である。

すなわち，R_1 に比べて R_2 は飛行距離が3％以上短くなる。

［解 説］

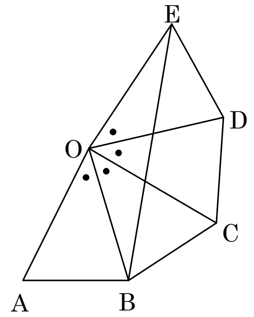
大圏航路を題材にした問題です。これは，メルカトル図法で書かれた世界地図で，最短の飛行経路が直線としては表されないことと関連しています。なお，与えられていた三角関数表は省略しました。

8　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［京都大・文］

$\angle \mathrm{AOB} = \theta \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$とおくと，$\triangle \mathrm{OAB} = \dfrac{1}{2}\mathrm{OA} \cdot \mathrm{OB}\sin\theta$

また，題意より，$\mathrm{OA} = \mathrm{OC} = \mathrm{OE}$，$\mathrm{OB} = \mathrm{OD}$

(i)　$0 < 3\theta \leqq \pi \left(0 < \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}\right)$のとき



$$\triangle \mathrm{OBE} = \frac{1}{2}\mathrm{OB} \cdot \mathrm{OE}\sin 3\theta = \frac{1}{2}\mathrm{OB} \cdot \mathrm{OA}\sin 3\theta$$

ここで，$\triangle \mathrm{OAB} : \triangle \mathrm{OBE} = 2 : 3$より，

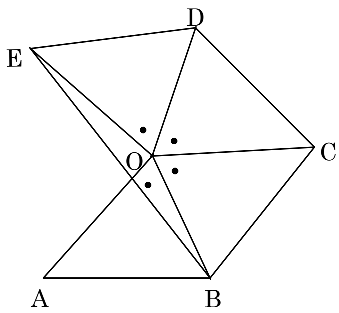
$$\sin\theta : \sin 3\theta = 2 : 3,\quad 2\sin 3\theta - 3\sin\theta = 0$$

$$2(3\sin\theta - 4\sin^3\theta) - 3\sin\theta = 0$$

$$8\sin^3\theta - 3\sin\theta = 0$$

$0 < \sin\theta \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$より，$\sin\theta = \sqrt{\dfrac{3}{8}} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$

(ii)　$\pi < 3\theta \left(\dfrac{\pi}{3} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$のとき



$$\triangle \mathrm{OBE} = \frac{1}{2}\mathrm{OB} \cdot \mathrm{OE}\sin(2\pi - 3\theta)$$

$$= -\frac{1}{2}\mathrm{OB} \cdot \mathrm{OA}\sin 3\theta$$

ここで，$\triangle \mathrm{OAB} : \triangle \mathrm{OBE} = 2 : 3$より，

$$\sin\theta : (-\sin 3\theta) = 2 : 3$$

$$2\sin 3\theta + 3\sin\theta = 0,\quad 8\sin^3\theta - 9\sin\theta = 0$$

すると，$\dfrac{\sqrt{3}}{2} < \sin\theta < 1$より，適する$\sin\theta$の値は存在しない。

(i)(ii)より，$\sin\angle \mathrm{AOB} = \sin\theta = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$

［解　説］

図を描いて場合分けをしましたが，絶対値を用いると，場合分けが回避できます。

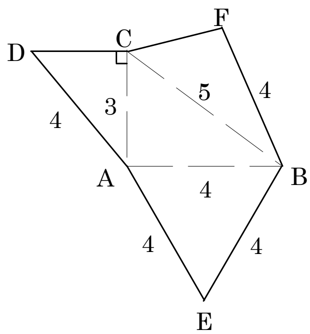
9　　　　［北海道大］

右図において，AB＝4，AC＝3，BC＝5より，

$$\angle \mathrm{BAC}=90^\circ$$

また，∠ACD＝90°より，

$$\mathrm{CD}=\mathrm{CF}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$$



さて，三角錐 V の底面△ABC を xy 平面上にとり，A(0, 0, 0)，B(4, 0, 0)，C(0, 3, 0) とする。さらに, V のもう 1 つの頂点を P(x, y, z) ($z>0$) とおく。

すると，PA＝PB＝4，PC＝$\sqrt{7}$ から，

$$x^2+y^2+z^2=16\cdots\cdots\cdots①,\ (x-4)^2+y^2+z^2=16\cdots\cdots\cdots②$$

$$x^2+(y-3)^2+z^2=7\cdots\cdots\cdots③$$

①②より，$8x-16=0$，$x=2\cdots\cdots\cdots④$

②③より，$-4x+3y=1$ となり，④を代入すると，$y=3\cdots\cdots\cdots⑤$

④⑤を①に代入すると，$z^2=3$ となり, $z>0$ から $z=\sqrt{3}$ である。

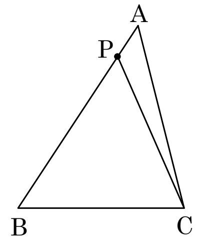
以上より，三角錐 V の体積は,

$$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\right)\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

［解　説］

底面が直角三角形であることに着目し，座標系を設定して処理しています。この解法がいちばん確実でしょう。

$\boxed{10}$ ［九州大］



(1)　余弦定理から，$\cos\angle\mathrm{A}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ となり，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{CP}^2 &= b^2+t^2c^2-2btc\cos\angle\mathrm{A}\\
&= b^2+t^2c^2-t(b^2+c^2-a^2)\\
&= ta^2+(1-t)b^2+(t^2-t)c^2
\end{aligned}
$$

(2)　$\mathrm{CP}=a$ のとき, (1)より，$ta^2+(1-t)b^2+(t^2-t)c^2=a^2$

$$(1-t)(-a^2+b^2-tc^2)=0$$

すると, $t\geqq 0$ から, $b\geqq a$ のとき $t=1,\ \dfrac{-a^2+b^2}{c^2}$，$b<a$ のとき $t=1$ である。

(3)　t の値が $0\leqq t\leqq 1$ に 2 つ存在する条件は, $b\geqq a$ のとき $0\leqq\dfrac{-a^2+b^2}{c^2}<1$ より，

$b\geqq a\cdots\cdots\cdots$①，$b^2<a^2+c^2\cdots\cdots\cdots$②

①より $\angle\mathrm{B}\geqq\angle\mathrm{A}$, ②より $\angle\mathrm{B}<90°$

まとめると，$\angle\mathrm{A}\leqq\angle\mathrm{B}<90°$ となる。

［解　説］

三角比の応用についての基本問題です。

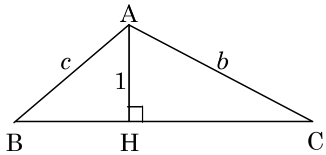
$\boxed{11}$　　［千葉大・文］

$a=\mathrm{BC}$，$b=\mathrm{CA}$，$c=\mathrm{AB}$とし，$\triangle\mathrm{ABC}$の面積をSとおくと，条件より，

$$S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot 1=\frac{a}{2}\cdots\cdots①,\ S=\frac{1}{2}\cdot b\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}b\cdots\cdots②,\ S=\frac{1}{2}\cdot c\cdot 2=c\cdots\cdots③$$

①②③より，$\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}b=c$となり，$a=2c\cdots\cdots④$，$b=\sqrt{2}c\cdots\cdots⑤$

④⑤より，$a>b>c$すなわち$\angle\mathrm{A}$が最大角となる。



すると，頂点Aから直線BCに下ろした垂線の足Hは，辺BC上にあるので，$\mathrm{BH}+\mathrm{CH}=a$から，

$$\sqrt{c^2-1}+\sqrt{b^2-1}=a$$

④⑤を代入して，$\sqrt{c^2-1}+\sqrt{2c^2-1}=2c$，$\sqrt{2c^2-1}=2c-\sqrt{c^2-1}$

ここで，$2c>c>\sqrt{c^2-1}$から，$2c-\sqrt{c^2-1}>0$となり，

$$2c^2-1=4c^2-4c\sqrt{c^2-1}+c^2-1,\ 4\sqrt{c^2-1}=3c$$

これより，$16(c^2-1)=9c^2$となり，$c=\frac{4}{\sqrt{7}}=\frac{4}{7}\sqrt{7}$である。

よって，③から，$S=\frac{4}{7}\sqrt{7}$

さて，$\triangle\mathrm{ABC}$の内接円の半径をrとおくと，③④⑤より，

$$\frac{1}{2}(2c+\sqrt{2}c+c)r=c,\ r=\frac{2}{3+\sqrt{2}}=\frac{2}{7}(3-\sqrt{2})$$

また，$\triangle\mathrm{ABC}$の外接円の半径をRとおき，$\sin B=\frac{1}{c}$から，⑤と合わせると，

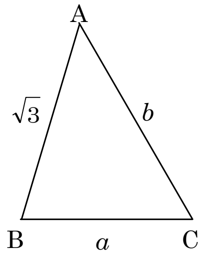
$$2R=\frac{\sqrt{2}c}{\sin B}=\sqrt{2}c^2=\frac{16}{7}\sqrt{2},\ R=\frac{8}{7}\sqrt{2}$$

［解 説］

いろいろな解法が考えられる三角比の応用問題です。上の解では，③に注目して，cの値を求めることを最優先としたものです。ただ，rの値を求めるときには不要でしたが。

$\boxed{12}$　　［京都大・理］

外接円の半径が 1 である鋭角三角形 ABC において，$\mathrm{AB}=\sqrt{3}$，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$ とおくと，正弦定理より，



$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}}{\sin C}=2\times 1$$

$$\sin A=\frac{a}{2}\cdots\cdots①,\ \ \sin B=\frac{b}{2}\cdots\cdots②,\ \ \sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdots\cdots③$$

③より，∠C が鋭角から，$C=\frac{\pi}{3}$………④

①より，$1<a<2$ から $\frac{1}{2}<\sin A<1$ となり，∠A が鋭角から $\frac{\pi}{6}<A<\frac{\pi}{2}$………⑤

④⑤より，$B=\frac{2}{3}\pi-A$ から $\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$ となり，∠B が鋭角という条件は満たされる。

さて，①より，$\cos A=\sqrt{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$ となり，②から，

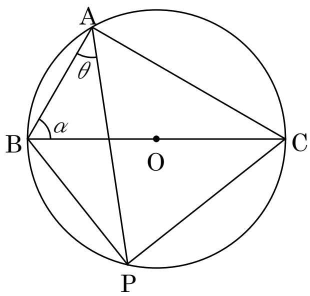
$$b=2\sin B=2\sin\left(\frac{2}{3}\pi-A\right)=2\sin\frac{2}{3}\pi\cos A-2\cos\frac{2}{3}\pi\sin A$$

$$=\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}+\frac{a}{2}=\frac{a+\sqrt{3(4-a^2)}}{2}$$

［解 説］

正弦定理の利用から始めるという点はすぐにわかるものの，その後の解法の選択に，運・不運が反映されます。

13　　［長崎大・理］



(1)　$\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{2}$ より，$\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の中心を O とすると，点 O は辺 BC の中点であり，$\mathrm{BC}=2R$ となる。

まず，$\angle\mathrm{ABC}=\alpha$ から，$\mathrm{AB}=2R\cos\alpha$

また，$\angle\mathrm{PBC}=\angle\mathrm{PAC}=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ から，

$$\mathrm{BP}=2R\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=2R\sin\theta$$

さらに，$\angle\mathrm{ABP}=\alpha+\dfrac{\pi}{2}-\theta$ から，

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABP}&=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BP}\sin\angle\mathrm{ABP}=\frac{1}{2}\cdot 2R\cos\alpha\cdot 2R\sin\theta\cdot\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\&=2R^2\cos\alpha\sin\theta\cos(\theta-\alpha)=2R^2\cos\alpha\cdot\frac{1}{2}\{\sin(2\theta-\alpha)+\sin\alpha\}\\&=R^2\cos\alpha\{\sin(2\theta-\alpha)+\sin\alpha\}\end{aligned}$$

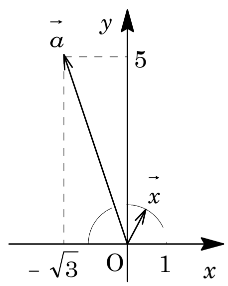
ここで，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $-\alpha<2\theta-\alpha<\pi-\alpha$ であり，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ から $2\theta-\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ となる θ が存在する。すると，この θ において $\sin(2\theta-\alpha)=1$ となり，$\triangle\mathrm{ABP}$ の面積は最大値 $R^2\cos\alpha(1+\sin\alpha)$ をとる。

(2)　$\mathrm{CP}=2R\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=2R\cos\theta$ より，

$$\triangle\mathrm{BPC}=\frac{1}{2}\mathrm{BP}\cdot\mathrm{CP}=\frac{1}{2}\cdot 2R\sin\theta\cdot 2R\cos\theta=2R^2\sin\theta\cos\theta=R^2\sin 2\theta$$

(3)　$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，(1)より，$\triangle\mathrm{ABP}=\dfrac{1}{2}R^2\left\{\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ となり，

$$\begin{aligned}S&=\triangle\mathrm{ABP}+\triangle\mathrm{BCP}=\frac{1}{2}R^2\left\{\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+2\sin 2\theta\right\}\\&=\frac{1}{4}R^2(\sin 2\theta-\sqrt{3}\cos 2\theta+\sqrt{3}+4\sin 2\theta)\\&=\frac{1}{4}R^2(-\sqrt{3}\cos 2\theta+5\sin 2\theta+\sqrt{3})\end{aligned}$$



ここで，$\vec{a}=(-\sqrt{3},\ 5)$，$\vec{x}=(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$ とおくと，

$$S=\frac{1}{4}R^2(\vec{a}\cdot\vec{x}+\sqrt{3})$$

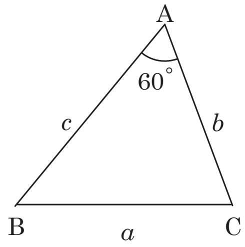
ここで，$0<2\theta<\pi$ から，$\vec{a}\cdot\vec{x}$ の値が最大となるのは，$\vec{x}$ が $\vec{a}$ と同じ向きになるときであり，このとき $\vec{a}\cdot\vec{x}$ の値は $|\vec{a}|\cdot|\vec{x}|=2\sqrt{7}$ である。

よって，S の最大値は，$\dfrac{1}{4}(2\sqrt{7}+\sqrt{3})R^2$ である。

［解 説］

(1)の結論は図からストレートに導けますが，(3)も考えて数式処理をしました。

14　　［千葉大・文］



まず，$AB=c$，$BC=a$，$CA=b$ とおく。

すると，$\triangle ABC$ の外接円の半径が 1 から，正弦定理より，

$$\frac{a}{\sin 60^\circ}=2\times 1,\ a=\sqrt{3}\cdots\cdots\cdots ①$$

$\triangle ABC$ の面積が $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$ より，$\dfrac{1}{2}bc\sin 60^\circ=\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$

$$bc=\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}+1\cdots\cdots\cdots ②$$

また，$\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると，①より，

$$3=b^2+c^2-2bc\cos 60^\circ,\ (b+c)^2-3bc=3$$

②より，$(b+c)^2=6+3\sqrt{3}$，$b+c=\sqrt{6+3\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{12+2\sqrt{27}}{2}}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdots\cdots\cdots ③$

②③より, b, c は, 2 次方程式 $\sqrt{2}x^2-(3+\sqrt{3})x+\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)=0$ の 2 つの解となり,

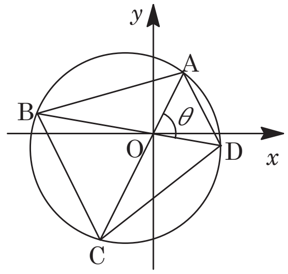
$$(\sqrt{2}x-\sqrt{3}-1)(x-\sqrt{2})=0,\ t=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{2}$$

条件より, $c>b$ なので，$b=\sqrt{2}$，$c=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ である。

［解 説］

三角比の三角形への応用についての基本問題です。

15　　［神戸大・文］



(1)　3 点 A, O, C は同一直線上にあり，点 A(1, 2) で，点 C の x 座標が a から，C$(a,\ 2a)$ とおくことができる。ただし，$a<0$ である。これより，

$$\mathrm{OC}=\sqrt{a^2+(2a)^2}=\sqrt{5}\,|a|=-\sqrt{5}a$$

また，方べきの定理から，$\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}=\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OD}$

すると，条件より $\mathrm{OA}=\mathrm{OD}$ なので，$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$

(2)　(1)より，$\mathrm{AC}=\mathrm{BD}=\sqrt{5}-\sqrt{5}a=\sqrt{5}(1-a)$ より，四角形 ABCD の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{5}(1-a)\right\}^2\sin\theta=\frac{5}{2}(1-a)^2\sin\theta$$

(3)　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，$S=\dfrac{5}{2}(1-a)^2\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{4}(1-a)^2$

条件より，$20\leqq S\leqq 40$ なので，$20\leqq\dfrac{5}{4}(1-a)^2\leqq 40$ となり，

$$16\leqq(1-a)^2\leqq 32,\quad 4\leqq 1-a\leqq 4\sqrt{2},\quad 1-4\sqrt{2}\leqq a\leqq -3$$

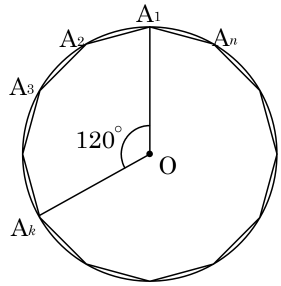
したがって，a のとりうる値の最大値は -3 である。

［解 説］

対角線の長さとその交角をもとに，四角形の面積を導く有名な問題です。注意しなくてはいけないのは，a が負ということです。

16　　　　［京都大・理］

(*p*)　正しい。



正 n 角形の外接円上に，頂点 A_1，A_2，…，A_k，…，A_n があるとする。

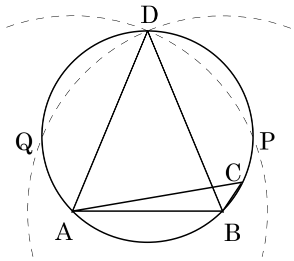
さて，中心を O とすると，条件より，$\angle A_1OA_k=120°$ となる $k(2\leqq k\leqq n-1)$ が存在する。

ここで，$\angle A_1OA_k=\dfrac{360°}{n}\times(k-1)$ より，

$$\frac{360°}{n}\times(k-1)=120°,\ \ 360°\times(k-1)=120°\times n$$

よって，$n=3(k-1)$ となり，n は 3 の倍数である。

(*q*)　正しくない。



DA＝DB＞AB である△ABD の外接円を O とする。

さて，点 A と中心とする半径 AD の円，点 B を中心とする半径 BD の円を描き，円 O との交点で D でないものをそれぞれ P, Q とする。

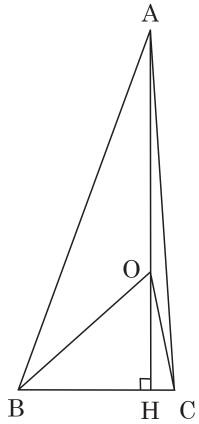
そして，弧 AQ または弧点 BP 上に点 C をとる。

すると，AC＜AD かつ BC＜BD であるが，∠C＝∠D である。すなわち，∠C＞∠D は成立しない。

［解 説］

どちらも図形がらみの証明問題です。(*q*)は，判断を間違いそうになりましたが。

17　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［一橋大］



$\mathrm{OB}=3$，$\mathrm{OC}=2$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3$ より，$\cos\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{3}{3\times 2}=\dfrac{1}{2}$ となり，$\angle\mathrm{BOC}=60°$ である。

すると，$\triangle\mathrm{OBC}=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\sin 60°=\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ となり，

$$\mathrm{BC}^2=3^2+2^2-2\cdot 3\cdot 2\cos 60°=7,\quad \mathrm{BC}=\sqrt{7}$$

ここで，点 O から直線 BC へ下ろした垂線の足を H とすると，

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot\mathrm{OH}=\frac{3}{2}\sqrt{3},\quad \mathrm{OH}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

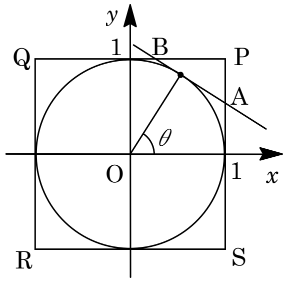
以上より，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積が最大となるのは，点 A が HO の延長線上にあるときで，$\mathrm{OA}=4$ から，その値は，

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot\left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}+4\right)=\frac{3}{2}\sqrt{3}+2\sqrt{7}$$

［解 説］

$\triangle\mathrm{OBC}$ は決定されるので，点 A が辺 BC からいちばん離れたところに位置する場合を求めればよいことになります。なお，OH の長さは勢いで求めてしまいましたが，必要ありませんでした。

18　　［千葉大］



原点を中心とする半径 1 の円周上の点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ における接線の方程式は，

$$x\cos\theta+y\sin\theta=1$$

直線 $x=1$ と連立して，$y\sin\theta=1-\cos\theta$，$y=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

そこで，$L=\mathrm{AP}+\mathrm{PB}+\mathrm{BA}$ とすると，$\angle\mathrm{PAB}=\theta$ となることを用いて，

$$L=\left(1-\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)\left(1+\tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}\right)=\frac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta+\sin\theta+1}{\cos\theta}$$

$$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1+2\sin\theta\cos\theta-1}{\sin\theta\cos\theta}=2$$

また，$\triangle\mathrm{APB}$ の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2\tan\theta=\frac{(\sin\theta+\cos\theta-1)^2}{2\sin^2\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta-1)^2}{2\sin\theta\cos\theta}=\frac{(\sin\theta+\cos\theta-1)^2}{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ とおくと，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $1<t\leqq\sqrt{2}$ となり，$(*)$から，

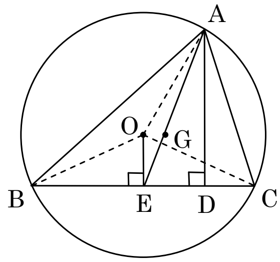
$$S=\frac{(t-1)^2}{t^2-1}=\frac{t-1}{t+1}=1-\frac{2}{t+1}$$

よって，S が最大となるのは，$t=\sqrt{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のときである。

［解　説］

三角関数の図形への応用問題です。問題文を丁寧に読まないと，円と正方形の位置関係について，ミスをしてしまいそうです。

19　　［九州大・文］



(1)　△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理より，

$$\mathrm{AB}=2R\sin C,\ \mathrm{BC}=2R\sin A,\ \mathrm{CA}=2R\sin B$$

ここで，△ABC の面積を S とおくと，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin A=2R^2\sin A\sin B\sin C\cdots\cdots\cdots①$$

A から辺 BC に下ろした垂線が AD より，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AD}=\mathrm{AD}\cdot R\sin A\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\mathrm{AD}\cdot R\sin A=2R^2\sin A\sin B\sin C$，$\mathrm{AD}=2R\sin B\sin C$

また，O から辺 BC に下ろした垂線が OE で，$\angle\mathrm{BOE}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{BOC}=\frac{1}{2}\cdot 2\angle\mathrm{A}=A$

よって，$\mathrm{OE}=R\cos\angle\mathrm{BOE}=R\cos A$

(2)　直線 AG と辺 BC は BC の中点，すなわち点 E で交わり，G と O が一致するならば，$\mathrm{GE}\perp\mathrm{BC}$ すなわち $\mathrm{AE}\perp\mathrm{BC}$ となる。これより $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ である。

同様に考えると，$\mathrm{BG}\perp\mathrm{AC}$ となり，$\mathrm{BA}=\mathrm{BC}$ である。

したがって，$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$ となり，△ABC は正三角形である。

(3)　OG が BC と平行であるとき，$\triangle\mathrm{OGE}\backsim\triangle\mathrm{DEA}$ となり，$\mathrm{OE}:\mathrm{DA}=\mathrm{GE}:\mathrm{EA}$

ここで，点 G は△ABC の重心より，$\mathrm{GE}:\mathrm{EA}=1:3$ となり，

$$\mathrm{OE}:\mathrm{DA}=1:3,\ \mathrm{AD}=3\mathrm{OE}$$

(1)の結果から，$2R\sin B\sin C=3R\cos A$，$2\sin B\sin C=-3\cos(B+C)$ となり，

$$2\sin B\sin C=-3(\cos B\cos C-\sin B\sin C),\ 3\cos B\cos C=\sin B\sin C$$

よって，$\tan B\tan C=\dfrac{\sin B\sin C}{\cos B\cos C}=3$ となる。

［解　説］

図形の計量についての標準的な問題です。誘導に従えば，一見，難しそうな(3)の関係式が証明できます。