$\boxed{1}$ ［金沢大・文］

(1)　まず，$\angle A_1A_2A_3=120°$ より，

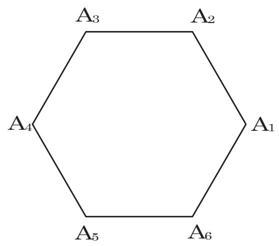
$$\triangle A_1A_2A_3=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sin 120°=\sqrt{3}$$

$A_1A_3=2\times 2\cos 30°=2\sqrt{3}$，$\angle A_1A_3A_4=90°$ から，

$$\triangle A_1A_3A_4=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2=2\sqrt{3}$$

また，$\triangle A_1A_3A_5$ は正三角形なので，

$$\triangle A_1A_3A_5=\frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{3})^2\sin 60°=3\sqrt{3}$$



(2)　さいころを 3 回投げたとき，三角形ができるのは，出た目がすべて異なる場合である。すると，この確率は，

$$\frac{{}_6P_3}{6^3}=\frac{5}{9}$$

これより，三角形ができない確率は，$1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$ である。

(3)　$\triangle A_1A_2A_3$ と合同な三角形は 6 個存在し，それぞれの三角形について，目の出る順序が $3!$ 通りずつある。

よって，この確率は，$\frac{6\times 3!}{6^3}=\frac{1}{6}$ である。

(4)　(3)と同様すると，$\triangle A_1A_3A_4$ と合同な直角三角形は $4\times 3=12$ 個存在し，それぞれの三角形について，目の出る順序が $3!$ 通りずつある。

よって，この確率は，$\frac{12\times 3!}{6^3}=\frac{1}{3}$ である。

また，$\triangle A_1A_3A_5$ と合同な正三角形は 2 個存在し，それぞれの三角形について，目の出る順序が $3!$ 通りずつある。

よって，この確率は，$\frac{2\times 3!}{6^3}=\frac{1}{18}$ である。

さいころを 3 回投げたとき，この 3 種類の三角形以外は図形の面積が 0 なので，図形の面積の期待値は，

$$\sqrt{3}\times\frac{1}{6}+2\sqrt{3}\times\frac{1}{3}+3\sqrt{3}\times\frac{1}{18}=\sqrt{3}$$

［解 説］

有名な問題です。期待値の計算への誘導も丁寧です。

2　　［東京大・文］

(1)　×が 3 個出る前に○が 2 個出る場合は，×○○，××○○，×○×○のいずれかなので，その確率P_2は，

$$P_2=(1-p)p+p(1-p)p+(1-p)^3=(1-p)(p+p^2+1-2p+p^2)$$
$$=(1-p)(1-p+2p^2)$$

(2)　×が 3 個出る前に○が 3 個出る場合は，×○○○，××○○○，×○×○○，×○○×○のいずれかなので，その確率P_3は，

$$P_3=(1-p)p^2+p(1-p)p^2+(1-p)^3p+(1-p)p(1-p)^2$$
$$=p(1-p)(p+p^2+1-2p+p^2+1-2p+p^2)$$
$$=p(1-p)(2-3p+3p^2)$$

(3)　×が 3 個出る前に○が n 個出る場合は，

(i)　最初の×の後，○が続けて n 個出るとき
　このときの確率は，$(1-p)p^{n-1}$ である。

(ii)　最初×が 2 個出た後，○が続けて n 個出るとき
　このときの確率は，$p(1-p)p^{n-1}=(1-p)p^n$ である。

(iii)　最初の×の後，○が続けて k 個，次に×さらに○が続けて $n-k$ 個出るとき
　このときの確率は，$1\leqq k\leqq n-1$ として，

$$(1-p)p^{k-1}(1-p)^2p^{n-k-1}=(1-p)^3p^{n-2}$$

(i)～(iii)より，×が 3 個出る前に○が n 個出る確率P_nは，

$$P_n=(1-p)p^{n-1}+(1-p)p^n+\sum_{k=1}^{n-1}(1-p)^3p^{n-2}$$
$$=(1-p)p^{n-1}(1+p)+(n-1)(1-p)^3p^{n-2}$$
$$=(1-p)p^{n-2}\{p(1+p)+(n-1)(1-p)^2\}$$
$$=(1-p)p^{n-2}\{np^2-(2n-3)p+n-1\}$$

［解 説］

(1)と(2)で具体例を練習し，(3)で一般化する問題です。注意深く考えていけば，完答できます。

$\boxed{3}$ ［千葉大］

(1)　$X=3$ となるのは，取り出された 3 枚のカードが，1 と 2，および 3 以上が 1 枚の場合なので，その確率は，

$$\frac{10-2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{8}{120}=\frac{1}{15}$$

(2)　3 枚のカードに書かれた 3 つの整数を a，b，c（$a<b<c$）とおき，$b=k$ のときの $a+b$ の期待値を E_k とすると，

$$E_k=\{(1+k)+(2+k)+\cdots+(k-1+k)\}\cdot\frac{10-k}{{}_{10}\mathrm{C}_3}$$

$$=\frac{(1+k+k-1+k)(k-1)}{2}\cdot\frac{10-k}{120}=\frac{1}{80}k(k-1)(10-k)$$

すると, X の期待値 E は, $2\leqq k\leqq 9$ から,

$$E=\frac{1}{80}\sum_{k=2}^{9}k(k-1)(10-k)=\frac{1}{80}\sum_{k=1}^{9}k(k-1)(10-k)$$

$$=\frac{1}{80}\sum_{k=1}^{9}(-k^3+11k^2-10k)$$

$$=\frac{1}{80}\left(-\frac{1}{4}\cdot 9^2\cdot 10^2+11\cdot\frac{1}{6}\cdot 9\cdot 10\cdot 19-10\cdot\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 10\right)$$

$$=\frac{33}{4}$$

［解 説］

(2)を(1)の続きとして考え，$X=4$，5，…，17 の確率を順に求めていくという見方もできます。しかし，これは大変なので，アプローチの方法を変更しました。

4　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[名古屋大・文]

(1)　まず，試行後の新しい底面の数字と，その数値になる確率を表にまとめる。

(i)　底面の数字が 1 または 6 のとき

新しい底面の数字は 2, 3, 4, 5 のいずれかとなる。

新しい底面	2	3	4	5
確　率	$\frac{2}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{5}{14}$

(ii)　底面の数字が 2 または 5 のとき

新しい底面の数字は 1, 3, 4, 6 のいずれかとなる。

新しい底面	1	3	4	6
確　率	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{6}{14}$

(iii) 底面の数字が 3 または 4 のとき

新しい底面の数字は 1, 2, 5, 6 のいずれかとなる。

新しい底面	1	2	5	6
確　率	$\frac{1}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{6}{14}$

さて，底面の数字が 1 であるとき，試行を 1 回行うと，新しい底面の数字は 2, 3, 4, 5 のいずれかであるので，

$$q_1 = p_1(1) + p_1(6) = 0$$

次に，試行を 2 回行ったとき，底面が 1 となるのは，$1 \to 2 \to 1$，$1 \to 3 \to 1$，$1 \to 4 \to 1$，$1 \to 5 \to 1$ の場合，底面が 6 となるのは，$1 \to 2 \to 6$，$1 \to 3 \to 6$，$1 \to 4 \to 6$，$1 \to 5 \to 6$ の場合で，それぞれの確率は，

$$p_2(1) = \frac{2}{14}\times\frac{1}{14} + \frac{3}{14}\times\frac{1}{14} + \frac{4}{14}\times\frac{1}{14} + \frac{5}{14}\times\frac{1}{14} = \frac{1}{14}$$

$$p_2(6) = \frac{2}{14}\times\frac{6}{14} + \frac{3}{14}\times\frac{6}{14} + \frac{4}{14}\times\frac{6}{14} + \frac{5}{14}\times\frac{6}{14} = \frac{6}{14}$$

よって，$q_2 = p_2(1) + p_2(6) = \frac{1}{14} + \frac{6}{14} = \frac{1}{2}$

(2)　n 回の試行の後，底面の数字が 1 または 6 となるのは，$n-1$ 回の試行後，底面の数字が 1 または 6 でないときである。

$n-1$ 回の試行後，底面の数字が 2 または 5 のときも，3 または 4 のときも，n 回の試行後，底面の数字が 1 または 6 となる確率は，$\frac{1}{14} + \frac{6}{14} = \frac{1}{2}$ なので，

$$q_n = \frac{1}{2}(1 - q_{n-1})，\ q_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(q_{n-1} - \frac{1}{3}\right)\ (n \geqq 2)$$

$q_1 = 0$ より，$q_n - \frac{1}{3} = \left(q_1 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ となり，

$$q_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$に $n=1$ をあてはめると $q_1 = 0$ となり，$n=1$ のときも満たしている。

(3)　n 回の試行の後，底面の数字が 1 となるのは，$n-1$ 回の試行後，底面の数字が 1 または 6 でないときである。$n-1$ 回の試行後，底面の数字が 2 または 5 のときも，3 または 4 のときも，n 回の試行後，底面の数字が 1 になる確率は $\frac{1}{14}$ なので，

$$p_n(1)=\frac{1}{14}(1-q_{n-1})\quad(n\geqq 2)$$

すると, (2)より，$p_n(1)=\dfrac{1}{14}\cdot 2q_n=\dfrac{1}{21}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$………(＊＊)

(＊＊) に$n=1$をあてはめると$p_1(1)=0$となり，$n=1$のときも満たしている。

［解 説］

一見，難しそうな題意を把握するために，(1)では，考えた順にやや詳しく書きました。なお，漸化式の威力が発揮されるこの手の問題は頻出です。名大では 1995 年に類題が出ています。

$\boxed{5}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［北海道大・文］

(1) (i)　$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = 1$ となるのは，$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ の場合だけより，

$$A_n(1) = 1$$

また，$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = 2$ となるのは，$a_1 = 1$ のとき ${}_{n-1}\mathrm{C}_1 = n-1$ 通り，$a_1 = 2$ のとき 1 通りより，

$$A_n(2) = (n-1) + 1 = n$$

(ii)　$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = 3$ のとき，a_{n-1} は，$a_{n-1} = 1$，$a_{n-1} = 2$，$a_{n-1} = 3$ のいずれかであり，その場合の数はそれぞれ $A_{n-1}(1)$，$A_{n-1}(2)$，$A_{n-1}(3)$ より，

$$A_n(3) = A_{n-1}(1) + A_{n-1}(2) + A_{n-1}(3)$$

(i)より，$A_n(3) = 1 + (n-1) + A_{n-1}(3) = A_{n-1}(3) + n$

よって，$n \geqq 2$ のとき，$A_n(3) = A_1(3) + \sum_{k=2}^{n} k = 1 + \sum_{k=2}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$

(2)　$a_{n-1} > a_n$ より，$a_{n-1} = 2,\ 3$ である。

(i)　$a_{n-1} = 2$ のとき

$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ を満たす数列が $A_{n-1}(2)$ 通り，また $a_n = 1$ より，この場合は，$A_{n-1}(2) \times 1 = n-1$ 通りある。

(ii)　$a_{n-1} = 3$ のとき

$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ を満たす数列が $A_{n-1}(3)$ 通り，また $a_n = 1,\ 2$ より，この場合は，$A_{n-1}(3) \times 2 = \frac{1}{2}(n-1)n \times 2 = (n-1)n$ 通りある。

(i)(ii)より，条件を満たす数列の数は，

$$(n-1) + (n-1)n = (n-1)(n+1)$$

［解 説］

漸化式を立てるという誘導がついていますが，場合の数の有名問題です。不等号に等号のついていないタイプが，2002 年に神戸大で出題されています。

$\boxed{6}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大］

(1)　n 回硬貨を投げたとき，最後にブロックの高さが m となるのは，最初 $n-m-1$ 回は任意，次の 1 回が裏で，その後 m 回続けて表が出る場合より，その確率 p_m は，

$$p_m=(1-p)p^m\quad(0\leqq m<n)$$

ただし，$m=n$ のとき，$p_m=p^m$ である。

(2)　最後にブロックの高さが m 以下となる確率 q_m は, (1)より,

(i)　$0\leqq m<n$ のとき

$$q_m=\sum_{k=0}^{m}(1-p)p^k=(1-p)\cdot\frac{1-p^{m+1}}{1-p}=1-p^{m+1}$$

(ii)　$m=n$ のとき

$$q_m=\sum_{k=0}^{m-1}(1-p)p^k+p^m=(1-p)\cdot\frac{1-p^m}{1-p}+p^m=1$$

(3)　2 度のゲームにおいて，高い方のブロックの高さが m であるのは，1 度目 m で 2 度目 $m-1$ 以下，または 1 度目 $m-1$ 以下で 2 度目 m，または 1 度目 2 度目とも m のいずれかである。その確率 r_m は, (1)(2)より,

(i)　$0\leqq m<n$ のとき

$$\begin{aligned}r_m&=p_mq_{m-1}+q_{m-1}p_m+{p_m}^2=p_m(2q_{m-1}+p_m)\\&=(1-p)p^m(2-2p^m+p^m-p^{m+1})=(1-p)p^m(2-p^m-p^{m+1})\end{aligned}$$

(ii)　$m=n$ のとき

$$r_m=p_mq_{m-1}+q_{m-1}p_m+{p_m}^2=2p^m(1-p^m)+p^{2m}=2p^m-p^{2m}$$

［解　説］

裏がでれば，過去を清算できるタイプのゲームです。ただ，$m=n$ の場合を特別に考えなくてはいけない点が要注意です。

7　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［大阪大・文］

(1)　$G=k\ (1\leqq k\leqq 6)$ となる確率を p_k とおく。

さて，$G=3$ となるのは，3 または 6 だけが n 回出て，しかも 6 が続けて n 回出ない場合より，その確率は，

$$p_3=\left(\frac{2}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

(2)　(i)　$G=6$ のとき　6 が n 回出る場合より，その確率は $p_6=\left(\frac{1}{6}\right)^n$ である。

(ii)　$G=5$ のとき　5 が n 回出る場合より，その確率は $p_5=\left(\frac{1}{6}\right)^n$ である。

(iii)　$G=4$ のとき　4 が n 回出る場合より，その確率は $p_4=\left(\frac{1}{6}\right)^n$ である。

(iv)　$G=3$ のとき　(1)より，$p_3=\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n$ である。

(v)　$G=2$ のとき

2, 4, 6 だけが n 回出て，しかも 4 が続けて n 回出ない，さらに 6 が続けて n 回出ない場合より，その確率は，

$$p_2=\left(\frac{3}{6}\right)^n-2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

(vi)　$G=1$ のとき

(i)～(v)の余事象を考えると，その確率は，

$$p_1=1-\left\{3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

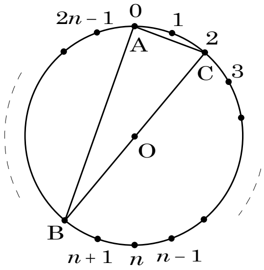
(i)～(vi)より, G の期待値は,

$$\begin{aligned}&6p_6+5p_5+4p_4+3p_3+2p_2+p_1\\&=(6+5+4)\times\left(\frac{1}{6}\right)^n+3\times\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}+2\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}+1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\\&=8\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n+2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n+1\end{aligned}$$

［解 説］

具体的に考えないとミスをしそうな問題です。特に $G=2$ のときが，注意力を要求されます。

8　　　　［広島大・理］



(1)　辺 BC 上に点 O がある場合は，

$$(B,\ C)=(n+1,\ 1),\ (n+2,\ 2),\ \cdots,\ (2n-1,\ n-1)$$

よって，$n-1$ 通りの場合がある。

(2)　辺 AB 上に点 O がある場合は，

$$(B,\ C)=(n,\ 1),\ (n,\ 2),\ \cdots,\ (n,\ n-1)$$

よって，$n-1$ 通りの場合がある。

また，辺 AC 上に点 O がある場合は，

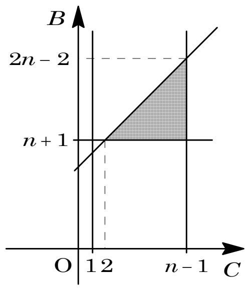
$$(B,\ C)=(n+1,\ n),\ (n+2,\ n),\ \cdots,\ (2n-1,\ n)$$

よって，$n-1$ 通りの場合がある。

以上より，(1)の場合も考え合わせて，△ABC の辺上に点 O がある確率は，

$$\frac{3(n-1)}{{}_{2n-1}\mathrm{C}_2}=\frac{6(n-1)}{(2n-1)(2n-2)}=\frac{3}{2n-1}$$

(3)　△ABC の内部に点 O がある場合は，



$$1\leqq C\leqq n-1,\ \ n+1\leqq B\leqq n+C-1$$

この不等式を CB 平面上に図示すると，右図の網点部となる。この領域内にある格子点$(C,\ B)$の個数は，

$$1+2+3+\cdots+(n-2)=\frac{1}{2}(n-2)(n-1)$$

よって，この場合の確率は，$\dfrac{(n-2)(n-1)}{2\times{}_{2n-1}\mathrm{C}_2}=\dfrac{n-2}{2(2n-1)}$

(4)　X の期待値を E とすると，

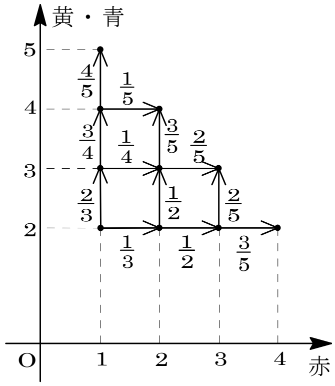
$$E=1\times\frac{3}{2n-1}+2\times\frac{n-2}{2(2n-1)}+0\times\left\{1-\frac{3}{2n-1}-\frac{n-2}{2(2n-1)}\right\}=\frac{n+1}{2n-1}$$

［解　説］

たびたび出題されている確率の有名問題です。(3)では，格子点の個数を対応させて数えています。

9　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[名古屋大・理]

(1)　赤玉，黄玉または青玉の個数を，(赤，黄・青)の順に記し，座標平面上の格子点を対応させると，右図のようになり，



$$p_3(1)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{2}{5}$$

$$p_3(2)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}+\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$$

$$p_3(3)=\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$$

$$p_3(4)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{10}$$

したがって，

$$p_3(1):p_3(2):p_3(3):p_3(4)=4:3:2:1$$

(2)　$p_N(1):p_N(2):\cdots:p_N(m):\cdots:p_N(N+1)=N+1:N:\cdots:N-m+2:\cdots:1$

と，(1)より推測できるので，$1\leqq m\leqq N+1$のとき，

$$p_N(m)=\frac{N-m+2}{1+2+\cdots+(N+1)}=\frac{2(N-m+2)}{(N+1)(N+2)}$$

以下，この推測の正しいことを，数学的帰納法を用いて証明する。

(i)　$N=1$のとき　$p_1(1)=\frac{2}{3}$，$p_1(2)=\frac{1}{3}$より，成立している。

(ii)　$N=k$のとき　$p_k(m)=\frac{2(k-m+2)}{(k+1)(k+2)}$　$(1\leqq m\leqq k+1)$と仮定する。

$N=k+1$のとき$m=1$となるのは，(赤，黄・青)$=(1,\ k+2)$で黄または青を取り出す場合より，

$$p_{k+1}(1)=\frac{k+2}{k+3}p_k(1)=\frac{k+2}{k+3}\cdot\frac{2(k+1)}{(k+1)(k+2)}=\frac{2(k+2)}{(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{2\{(k+1)-1+2\}}{(k+2)(k+3)}$$

$N=k+1$のとき$m=l$ $(2\leqq l\leqq k+1)$となるのは，(赤，黄・青)$=(l,\ k+3-l)$で黄または青を取り出すか，(赤，黄・青)$=(l-1,\ k+4-l)$で赤を取り出す場合より，

$$p_{k+1}(l)=\frac{k+3-l}{k+3}p_k(l)+\frac{l-1}{k+3}p_k(l-1)$$

$$=\frac{k+3-l}{k+3}\cdot\frac{2(k-l+2)}{(k+1)(k+2)}+\frac{l-1}{k+3}\cdot\frac{2(k-l+3)}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{2(k-l+3)}{k+3}\cdot\frac{k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{2(k-l+3)}{(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{2\{(k+1)-l+2\}}{(k+2)(k+3)}$$

$N=k+1$ のとき $m=k+2$ となるのは，(赤，黄・青)$=(k+1,\ 2)$ で赤を取り出す場合より，

$$p_{k+1}(k+2)=\frac{k+1}{k+3}p_k(k+1)=\frac{k+1}{k+3}\cdot\frac{2}{(k+1)(k+2)}=\frac{2}{(k+2)(k+3)}$$
$$=\frac{2\{(k+1)-(k+2)+2\}}{(k+2)(k+3)}$$

以上より，$p_{k+1}(m)=\dfrac{2\{(k+1)-m+2\}}{(k+2)(k+3)}$ $(1\leqq m\leqq k+2)$ である。

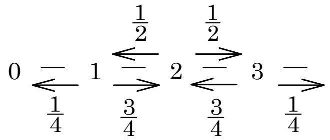
(i)(ii)より，$p_N(m)=\dfrac{2(N-m+2)}{(N+1)(N+2)}$ $(1\leqq m\leqq N+1)$

［解 説］

状態の推移を座標平面上の点を対応させて考え，(2)の証明も図を見ながら行いました。しかし，それでも注意力がかなり要求される難問です。

$\boxed{10}$ ［東京大・文］

(1)　まず操作(A)を 4 回繰り返した後, 4 回目に初めて白が 4 枚になるのは, 白の枚数に注目して場合分けをすると, その確率は,



(i)　2→1→2→3→4 のとき　$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{64}$

(ii)　2→3→2→3→4 のとき　$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{64}$

(i)(ii)より, $\frac{3}{64}+\frac{3}{64}=\frac{3}{32}$

(A)を 4 回繰り返した後, 4 回目に初めて黒が 4 枚となる確率も同じく $\frac{3}{32}$ より, 4 枚とも同じ色のカードになる確率は,

$$\frac{3}{32}+\frac{3}{32}=\frac{3}{16}$$

(2)　まず, 操作(A)を n 回繰り返した後, 白が 1 枚または 3 枚の確率を a_n, 白が 2 枚の確率を b_n とおくと,

$$a_{n+1}=b_n \cdots\cdots\cdots①,\quad b_{n+1}=\frac{3}{4}a_n \cdots\cdots\cdots②$$

①②より, $b_{n+1}=\frac{3}{4}b_{n-1}$

ここで, 条件より, $b_0=1$, $b_1=0$ なので,

(i)　n が奇数のとき, $b_n=0$

(ii)　n が偶数のとき, $b_n=b_0\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}}=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}}$

さて, 操作(A)を n 回繰り返した後, n 回目に初めて 4 枚とも同じ色になる確率は, $\frac{1}{4}a_{n-1}=\frac{1}{4}b_{n-2}$ から,

(i)　n が奇数のとき, $\frac{1}{4}b_{n-2}=0$（$n=1$ のときも成立している）

(ii)　n が偶数のとき, $\frac{1}{4}b_{n-2}=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-2}{2}}$

［解　説］

状態の推移の対称性を利用して, (2)では漸化式を立てました。

11　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［千葉大・理］

(1) 題意の値 X について, $X \leqq k$ となる場合は次の 2 通りである。

(i)　記録した値がすべて k 以下のとき

このとき，k^3 通りの場合がある。

(ii) 記録した値の 1 つが k より大, 他の 2 つが k 以下のとき

このとき，${}_3\mathrm{C}_1(n-k)k^2 = 3(n-k)k^2$ 通りの場合がある。

(i)(ii)より，$P(X \leqq k) = \dfrac{k^3+3(n-k)k^2}{n^3} = \dfrac{k^2(-2k+3n)}{n^3}$ （$k=n$ のときも成立）

(2) (i)　$k=1$ のとき

$$P(X=1) = P(X \leqq 1) = \frac{3n-2}{n^3}$$

(ii)　$k \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} P(X=k) &= P(X \leqq k) - P(X \leqq k-1) \\ &= \frac{k^2(-2k+3n)}{n^3} - \frac{(k-1)^2\{-2(k-1)+3n\}}{n^3} \\ &= \frac{-6k^2+6(n+1)k-3n-2}{n^3} \cdots\cdots\cdots(*) \end{aligned}$$

なお, $(*)$に $k=1$ を代入すると，$\dfrac{3n-2}{n^3}$ となり，成立する。

(i)(ii)より，$P(X=k) = \dfrac{-6k^2+6(n+1)k-3n-2}{n^3}$

(3) (2)より，$P(X=k) = \left\{-6\left(k-\dfrac{n+1}{2}\right)^2 + \dfrac{3n^2-1}{2}\right\}\left(\dfrac{1}{n}\right)^3$

(i)　n が奇数のとき

$P(X=k)$ が最大となるのは，$k=\dfrac{n+1}{2}$ のときである。

(ii) n が偶数のとき

$P(X=k)$ が最大となるのは，$k=\dfrac{n}{2}$，$\dfrac{n}{2}+1$ のときである。

［解 説］

(1)は，問題文の流れに沿って立式すること可能ですが，出題者の意図は上の解のように，題意を読み替えることでしょう。

12　　［名古屋大・文］

(1)　赤玉 3 個，白玉 2 個が入っている袋 B から 2 個の玉を取り出すとき，${}_5C_2$ 通りが同様に確からしいとする。

すると，取り出された玉が，赤 0 個，白 2 個の確率は $\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$，赤 1 個，白 1 個の確率は $\frac{{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_5C_2}=\frac{6}{10}$，赤 2 個，白 0 個の確率は $\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$ となり，赤玉の個数の期待値は,

$$0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$$

(2)　赤玉 2 個，白玉 2 個が入っている袋 A から 1 個の玉を取り出し，そのあと袋 B から 2 個の玉を取り出す。このとき，赤 2 個となる確率は,

(i)　袋 A から赤玉を取り出したとき　$\frac{2}{4}\times\frac{6}{10}=\frac{3}{10}$

(ii)　袋 A から白玉を取り出したとき　$\frac{2}{4}\times\frac{3}{10}=\frac{3}{20}$

(i)(ii)より，$\frac{3}{10}+\frac{3}{20}=\frac{9}{20}$

(3)　最初に袋 A から取り出した玉の色で場合分けをする。

(i)　最初に袋 A から赤玉を取り出したとき

(a)　次も袋 A（赤 1 個，白 2 個）から 2 個取り出すとき，赤玉の個数の期待値は,

$$0\times\frac{{}_2C_2}{{}_3C_2}+1\times\frac{{}_1C_1\times{}_2C_1}{{}_3C_2}=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

(b)　次に袋 B から 2 個取り出すとき，赤玉の個数の期待値は, (1)より $\frac{6}{5}$ である。

(a) (b)より，$\frac{2}{3}<\frac{6}{5}$ なので，次は袋 B から 2 個取り出すことを選択する。

このときの赤玉の個数の期待値は,

$$1\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{10}+2\times\frac{2}{4}\times\frac{6}{10}+3\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{10}=\frac{11}{10}$$

(ii)　最初に袋 A から白玉を取り出したとき

(a)　次も袋 A（赤 2 個，白 1 個）から 2 個取り出すとき，赤玉の個数の期待値は,

$$1\times\frac{{}_2C_1\times{}_1C_1}{{}_3C_2}+2\times\frac{{}_2C_2}{{}_3C_2}=1\times\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

(b)　次に袋 B から 2 個取り出すとき，赤玉の個数の期待値は, (1)より $\frac{6}{5}$ である。

(a) (b)より，$\frac{4}{3}>\frac{6}{5}$ なので，次は袋 A から 2 個取り出すことを選択する。

このときの赤玉の個数の期待値は,

$$1\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}+2\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

(i)(ii)より，できるだけ多くの赤玉を取り出そうと選択したとき，最終的に取り出される赤玉の個数の期待値は，

$$\frac{11}{10}+\frac{2}{3}=\frac{53}{30}$$

［解　説］

期待値をもとに有利・不利を判断する問題です。誘導はていねいですが，焦ると混乱してしまいます。

13　　　　［東京工大］

(1)　題意のサイコロを振ったとき, k の目が出る確率を p_k とおくと,

$$p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1\cdots\cdots\cdots(*)$$

サイコロを 2 回振ったとき, 同じ目の出る確率 P は, (＊)より,

$$\begin{aligned}P&={p_1}^2+{p_2}^2+{p_3}^2+{p_4}^2+{p_5}^2+{p_6}^2\\&=\left(p_1-\frac{1}{6}\right)^2+\left(p_2-\frac{1}{6}\right)^2+\cdots+\left(p_6-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{3}(p_1+p_2+\cdots+p_6)-\frac{1}{6}\\&=\left(p_1-\frac{1}{6}\right)^2+\left(p_2-\frac{1}{6}\right)^2+\cdots+\left(p_6-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{6}\end{aligned}$$

よって, $P\geqq\frac{1}{6}$ となる。

また, 等号が成立するのは, $p_1=p_2=p_3=p_4=p_5=p_6=\frac{1}{6}$ のときである。

(2)　サイコロを 2 回振ったとき, 1 回目に奇数, 2 回目に偶数の出る確率 Q は,

$$Q=(p_1+p_3+p_5)(p_2+p_4+p_6)$$

相加平均と相乗平均の関係を利用すると, (＊)より,

$$(p_1+p_3+p_5)(p_2+p_4+p_6)\leqq\left(\frac{p_1+p_3+p_5+p_2+p_4+p_6}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

よって, $Q\leqq\frac{1}{4}$ となる。

また, $3P+2Q-1=3({p_1}^2+{p_2}^2+\cdots+{p_6}^2)+2(p_1+p_3+p_5)(p_2+p_4+p_6)-1$

ここで, (＊)から, $1=(p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6)^2$ に注目すると,

$$\begin{aligned}&3({p_1}^2+{p_2}^2+\cdots+{p_6}^2)+2(p_1+p_3+p_5)(p_2+p_4+p_6)-1\\&=2({p_1}^2+{p_2}^2+\cdots+{p_6}^2)-2(p_1p_3+p_3p_5+p_5p_1+p_2p_4+p_4p_6+p_6p_2)\\&=(p_1-p_3)^2+(p_3-p_5)^2+(p_5-p_1)^2+(p_2-p_4)^2+(p_4-p_6)^2+(p_6-p_2)^2\end{aligned}$$

よって, $3P+2Q-1\geqq0$ より, $Q\geqq\frac{1}{2}-\frac{3}{2}P$ となる。

以上より, $\frac{1}{4}\geqq Q\geqq\frac{1}{2}-\frac{3}{2}P$ が成立する。

［解 説］

(1)は, 有名なコーシー・シュワルツの不等式を利用するという手もありますが, ここでは結論を予測して平方完成をしました。(2)の右側の不等式の証明は難ですが, 式を変形しているうちに気付いた方法で記しています。

14

［千葉大・理］

(1)　まず，9 枚のカードから 4 枚のカードを取り出す${}_9C_4$通りが同様に確からしいとし，事象Eの起こる確率を$P(E)$とおく。

さて，Xが 5 の倍数になる事象をAとすると，$P(\overline{A})=\dfrac{{}_8C_4}{{}_9C_4}=\dfrac{5}{9}$から，

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$$

(2)　Xが 3 の倍数になる事象をB，4 の倍数になる事象をCとすると，Xが 12 の倍数になる事象は$B\cap C$となり，まず$P(\overline{B})=\dfrac{{}_6C_4}{{}_9C_4}=\dfrac{5}{42}$である。

また，Xが 4 の倍数にならないのは，奇数のカード 4 枚を取り出す場合か，2 または 6 のカードと奇数のカード 3 枚を取り出す場合のいずれかより，

$$P(\overline{C})=\frac{{}_5C_4}{{}_9C_4}+\frac{{}_2C_1\times{}_5C_3}{{}_9C_4}=\frac{25}{126}$$

さらに，Xが 3 の倍数にも 4 の倍数にもならないのは，1，2，5，7 のカードを取り出す場合のみより，$P(\overline{B}\cap\overline{C})=\dfrac{1}{{}_9C_4}=\dfrac{1}{126}$となり，

$$P(B\cap C)=1-P(\overline{B\cap C})=1-P(\overline{B}\cup\overline{C})=1-P(\overline{B})-P(\overline{C})+P(\overline{B}\cap\overline{C})$$
$$=1-\frac{5}{42}-\frac{25}{126}+\frac{1}{126}=\frac{29}{42}$$

(3)　5 と 7 については，平方数Xの約数となる可能性がないので，それ以外の数について，次のようにカードの数の集合を設定する。

$$S=\{1,\ 4,\ 9\},\ T=\{2,\ 3,\ 6,\ 8\}$$

まず，集合Sから 3 枚，集合Tから 1 枚取り出す場合，集合Tのみから 4 枚取り出す場合は，Xは平方数にはならない。そこで，Xが平方数になるのは，

(i)　集合Sから 1 枚，集合Tから 3 枚取り出す場合
集合Tからは，(2，3，6)，(3，6，8) を取り出す 2 通りの場合がある。

(ii)　集合Sから 2 枚，集合Tから 2 枚取り出す場合
集合Tからは，(2，8) を取り出す 1 通りのみである。

(i)(ii)より，Xが平方数になる確率は，

$$\frac{{}_3C_1\times 2}{{}_9C_4}+\frac{{}_3C_2\times 1}{{}_9C_4}=\frac{1}{14}$$

［解 説］

確率の頻出問題です。(1)と(2)は文系に類題が出ています。(3)は，闇雲に列挙しようとすると，数えもれが発生しそうです。

$\boxed{15}$　　［京都大・理］

n 回の試行後，番号 n のカードが山の一番上にあるためには，$n-1$ 回の試行後，番号 n のカードが一番上または上から二番目でなくていはいけない。

(i)　$n-1$ 回の試行後，番号 n のカードが一番上にあるとき

$n-1$ 回目までの試行では，一番上のカードを番号 n のカードより下にもどし，n 回目の試行では，番号 n のカードを山の一番上にもどすことより，その確率は，

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{(n-1)!}{n^n}$$

(ii)　$n-1$ 回の試行後，番号 n のカードが上から二番目にあるとき

$1\leqq k\leqq n-1$ として，k 回目の試行で，一番上のカードを番号 n のカードより上にもどし，それ以外の試行では，一番上のカードを番号 n のカードより下にもどす。このときの確率は，

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{k-1}{n}\cdot\frac{n-k}{n}\cdot\frac{k}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{(n-k)(n-1)!}{n^n}$$

(i)(ii)より，n 回の試行後，番号 n のカードが山の一番上にある確率 P は，

$$P=\frac{(n-1)!}{n^n}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n-k)(n-1)!}{n^n}=\frac{(n-1)!}{n^n}\left\{1+\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\right\}$$

$$=\frac{(n-1)!}{n^n}\left\{1+\sum_{l=1}^{n-1}l\right\}=\frac{(n-1)!}{n^n}\left\{1+\frac{1}{2}(n-1)n\right\}=\frac{(n^2-n+2)(n-1)!}{2n^n}$$

［解 説］

題意を把握するために，$n=5$ の場合を具体的に考えました。その部分は，上の解からは省いていますが。

16　　［名古屋大・文］

(1)　さいころを 2 回投げるとき，出る目と出る目の積の一の位の対応をまとめると，右表のようになる。

2回＼1回	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	0	2
3	3	6	9	2	5	8
4	4	8	2	6	0	4
5	5	0	5	0	5	0
6	6	2	8	4	0	6

これより，$p_2(0)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$，$p_2(1)=\dfrac{1}{36}$，$p_2(2)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$ である。

(2)　さいころを $n+1$ 回投げるとき，出る目の積の一の位が 1 となるのは，次の 2 つの場合である。

(i)　n 回までの積の一の位が 1 で，$n+1$ 回目が 1 のとき

(ii)　n 回までの積の一の位が 7 で，$n+1$ 回目が 3 のとき

(i)(ii)より，$p_{n+1}(1)=\dfrac{1}{6}p_n(1)+\dfrac{1}{6}p_n(7)$ ………①

(3)　$n+1$ 回投げるとき，出る目の積の一の位が 3 となるのは，n 回までの積の一の位が 1 で $n+1$ 回目が 3, n 回までの積の一の位が 3 で $n+1$ 回目が 1 のときであり，

$$p_{n+1}(3)=\frac{1}{6}p_n(1)+\frac{1}{6}p_n(3)\ \cdots\cdots\cdots②$$

$n+1$ 回投げるとき，出る目の積の一の位が 7 となるのは，n 回までの積の一の位が 7 で $n+1$ 回目が 1, n 回までの積の一の位が 9 で $n+1$ 回目が 3 のときであり，

$$p_{n+1}(7)=\frac{1}{6}p_n(7)+\frac{1}{6}p_n(9)\ \cdots\cdots\cdots③$$

$n+1$ 回投げるとき，出る目の積の一の位が 9 となるのは，n 回までの積の一の位が 3 で $n+1$ 回目が 3, n 回までの積の一の位が 9 で $n+1$ 回目が 1 のときであり，

$$p_{n+1}(9)=\frac{1}{6}p_n(3)+\frac{1}{6}p_n(9)\ \cdots\cdots\cdots④$$

①＋②＋③＋④より，

$$p_{n+1}(1)+p_{n+1}(3)+p_{n+1}(7)+p_{n+1}(9)=\frac{1}{3}\{p_n(1)+p_n(3)+p_n(7)+p_n(9)\}$$

ここで，$p_1(1)=p_1(3)=\dfrac{1}{6}$，$p_1(7)=p_1(9)=0$ より，

$$p_n(1)+p_n(3)+p_n(7)+p_n(9)=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+0+0\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

［解 説］

センター試験に向かうときと同様に，まず一覧表を作成した方がミスが少なくなります。なお, (3)は(2)と同様に考えた解法です。

$\boxed{17}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［九州大・理］

(1)　偶数の書かれたカードを取り出す確率は $\dfrac{M}{M+N}$，奇数の書かれたカードを取り出す確率は $\dfrac{N}{M+N}$ より，記録された 1 個の数が偶数となる確率 p_1 は,

$$p_1=\frac{M}{M+N}$$

また，記録された 2 個の数の和が偶数となるのは，偶数＋偶数または奇数＋奇数より，その確率 p_2 は,

$$p_2=\left(\frac{M}{M+N}\right)^2+\left(\frac{N}{M+N}\right)^2=\frac{M^2+N^2}{(M+N)^2}$$

(2)　記録された $n+1$ 個の数の和が偶数となるのは，n 個の数の和が偶数のとき $n+1$ 回目に偶数を取り出すか，n 個の数の和が奇数のとき $n+1$ 回目に奇数を取り出すかのいずれかより,

$$p_{n+1}=\frac{M}{M+N}p_n+\frac{N}{M+N}(1-p_n)=\frac{M-N}{M+N}p_n+\frac{N}{M+N}\cdots\cdots\cdots(*)$$

(3)　(i)　k が偶数のとき　$M=2+4+\cdots+k=\dfrac{2+k}{2}\cdot\dfrac{k}{2}=\dfrac{2k+k^2}{4}$

$$N=1+3+\cdots+(k-1)=\frac{1+k-1}{2}\cdot\frac{k}{2}=\frac{k^2}{4}$$

よって，$\dfrac{M-N}{M+N}=\dfrac{(2k+k^2)-k^2}{(2k+k^2)+k^2}=\dfrac{1}{k+1}$

(ii)　k が奇数のとき　$M=2+4+\cdots+(k-1)=\dfrac{2+k-1}{2}\cdot\dfrac{k-1}{2}=\dfrac{k^2-1}{4}$

$$N=1+3+\cdots+k=\frac{1+k}{2}\cdot\frac{k+1}{2}=\frac{k^2+2k+1}{4}$$

よって，$\dfrac{M-N}{M+N}=\dfrac{(k^2-1)-(k^2+2k+1)}{(k^2-1)+(k^2+2k+1)}=-\dfrac{1}{k}$

(4)　$(*)$より，$p_{n+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{M-N}{M+N}\left(p_n-\dfrac{1}{2}\right)$と変形すると,

$$p_n-\frac{1}{2}=\left(p_1-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^{n-1}=\left(\frac{M}{M+N}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^n$$

よって，$p_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{M-N}{M+N}\right)^n$

(i)　k が偶数のとき　$p_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k+1}\right)^n$

(ii)　k が奇数のとき　$p_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{k}\right)^n$

［解 説］

頻出の確率と漸化式の融合問題です。非常に細かい誘導がついています。

18　　［神戸大・理］

(1)　得点 X_3 の表は左側，X_4 の表は右側のようになる。

A＼B	1	2	3	4	5	6
1	$a+b$	2	3	4	5	6
2	1	$2a+b$	3	4	5	6
3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6

A＼B	1	2	3	4	5	6
1	$a+b$	2	3	4	5	6
2	1	$2a+b$	3	4	5	6
3	1	2	$3a+b$	4	5	6
4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6

(2)　X_3 の表と X_4 の表は，$A=3$ の行のみ値が異なっていることより，

$$E_4-E_3=\frac{1}{36}(1+2+3a+b+4+5+6)-\frac{1}{36}(3\times 6)=\frac{3a+b}{36}\cdots\cdots\cdots①$$

(3)　(2)と同様に，X_2 の表と X_3 の表は，$A=2$ の行のみ値が異なっていることより，

$$E_3-E_2=\frac{1}{36}(1+2a+b+3+4+5+6)-\frac{1}{36}(2\times 6)=\frac{2a+b+7}{36}\cdots\cdots\cdots②$$

X_1 の表と X_2 の表は，$A=1$ の行のみ値が異なっていることより，

$$E_2-E_1=\frac{1}{36}(a+b+2+3+4+5+6)-\frac{1}{36}(1\times 6)=\frac{a+b+14}{36}\cdots\cdots\cdots③$$

また，X_4 の表と X_5 の表は，$A=4$ の行のみ値が異なっていることより，

$$E_5-E_4=\frac{1}{36}(1+2+3+4a+b+5+6)-\frac{1}{36}(4\times 6)=\frac{4a+b-7}{36}\cdots\cdots\cdots④$$

X_5 の表と X_6 の表は，$A=5$ の行のみ値が異なっていることより，

$$E_6-E_5=\frac{1}{36}(1+2+3+4+5a+b+6)-\frac{1}{36}(5\times 6)=\frac{5a+b-14}{36}\cdots\cdots\cdots⑤$$

ここで，条件より，$E_1=E_2=E_3=E_4=E_5=E_6$ より，

$E_2-E_1=0$，$E_3-E_2=0$，$E_4-E_3=0$，$E_5-E_4=0$，$E_6-E_5=0$

①～⑤より，$3a+b=0$ ……⑥，$2a+b+7=0$ ……⑦

$a+b+14=0$ ……⑧，$4a+b-7=0$ ……⑨，$5a+b-14=0$ ……⑩

⑥⑦より，$a=7$，$b=-21$ となり，この値は⑧⑨⑩をすべて満たす。

よって，$E_1=E_2=\cdots=E_6$ となる a, b は存在し，$a=7$，$b=-21$ である。

［解　説］

(3)での a, b の値は，E_4-E_3 と E_3-E_2 だけから求まります。その後，十分性を確認する方法もありますが，残りが 3 つの場合しかないので，これらを調べるという直接的な方法を採用しました。

19　　［東京工大］

(1)　8 枚のカードから 2 枚のカードを引く ${}_8\mathrm{C}_2$ 通りの場合が同様に確からしいとする。

さて，引いたカードの数字の小さい方が 3 となる確率は $\dfrac{{}_5\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_2}=\dfrac{5}{28}$，小さい方が 6 となる確率は $\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_2}=\dfrac{2}{28}$ であるので，

$$p(8)=\frac{5}{28}+\frac{2}{28}=\frac{1}{4}$$

(2)　$3k+2$ 枚のカードから 2 枚のカードを引く ${}_{3k+2}\mathrm{C}_2$ 通りの場合が同様に確からしいとする。

さて，引いたカードの数字の小さい方が $3l$ $(l=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ となる確率は，

$$\frac{{}_{3k+2-3l}\mathrm{C}_1}{{}_{3k+2}\mathrm{C}_2}=\frac{2(3k+2-3l)}{(3k+2)(3k+1)}$$

$l=1,\ 2,\ \cdots,\ k$ の和をとると，

$$p(3k+2)=\sum_{l=1}^{k}\frac{2(3k+2-3l)}{(3k+2)(3k+1)}=\frac{2}{(3k+2)(3k+1)}\cdot\frac{(3k-1)+2}{2}\cdot k=\frac{k}{3k+2}$$

［解　説］

不思議なぐらい基本的な問題です。なお，(2)の和は，シグマの公式でなく，等差数列の和として計算しています。

20　　［一橋大］

(1)　A_2，A_3，…，A_nが 1 つも起こらないのは，$X_1 \neq X_2 \neq X_3 \neq \cdots \neq X_{n-1} \neq X_n$の場合より，その確率は，

$$1\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{5}{6}=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

これより，A_2，A_3，…，A_nのうち少なくとも 1 つが起こる確率p_nは，

$$p_n=1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

(2)　A_2，A_3，…，A_nのうち，1 つだけが起こるのは，$X_1 = X_2 \neq X_3 \neq \cdots \neq X_{n-1} \neq X_n$，$X_1 \neq X_2 = X_3 \neq \cdots \neq X_{n-1} \neq X_n$，…，$X_1 \neq X_2 \neq X_3 \neq \cdots \neq X_{n-1} = X_n$の場合より，その確率は，

$${}_{n-1}\mathrm{C}_1\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}=\frac{n-1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}=\frac{n-1}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

これより，A_2，A_3，…，A_nのうち少なくとも 2 つが起こる確率q_nは，(1)の結果を合わせて，

$$q_n=p_n-\frac{n-1}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}-\frac{n-1}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=1-\frac{n+4}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

［解 説］

余事象を考える確率の問題ですが, 2000 年に出された類似した設定の問題と比べると, かなり基本的です。

21

［広島大・理］

(1)　勝者が 3 人であるのは, 3 人とも同じ得点のときより，その確率 $P_n(3)$ は,

$$P_n(3)=\frac{n}{n^3}=\frac{1}{n^2}$$

(2)　$n=3$ の場合，勝者が 2 人であるのは，まず勝者の選び方が ${}_3\mathrm{C}_2=3$ 通り。次に，得点を 2 つ選び，大きい方を勝者の得点に対応させると，その対応は ${}_3\mathrm{C}_2=3$ 通りとなる。これより，勝者が 2 人である確率 $P_3(2)$ は,

$$P_3(2)=\frac{3\times3}{3^3}=\frac{1}{3}$$

(3)　勝者が 2 人である確率は, (2)と同様に考えると,

$$P_n(2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_n\mathrm{C}_2}{n^3}=\frac{3n(n-1)}{2n^3}=\frac{3(n-1)}{2n^2}$$

すると，勝者が 1 人である確率 $P_n(1)$ は，余事象を考えて,

$$P_n(1)=1-P_n(3)-P_n(2)=1-\frac{1}{n^2}-\frac{3(n-1)}{2n^2}=\frac{(2n-1)(n-1)}{2n^2}$$

(4)　条件より，$P_n(1)\geqq0.9$ から，$\dfrac{(2n-1)(n-1)}{2n^2}\geqq\dfrac{9}{10}$ となり,

$$5(2n-1)(n-1)\geqq9n^2,\ \ n^2-15n+5\geqq0\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$f(x)=x^2-15x+5=\left(x-\dfrac{15}{2}\right)^2+5-\left(\dfrac{15}{2}\right)^2$ とおくと,

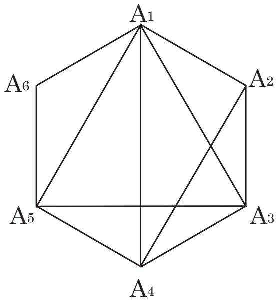
$$f(0)=5>0,\ \ f(1)=-9<0$$

よって，$f(14)<0$，$f(15)>0$ となり, $(*)$を満たす最小の n は $n=15$ である。

［解 説］

確率の基本問題です。(3)は(2)を誘導と考えて解いています。なお, (4)は 2 次関数のグラフをイメージして解いています。

22　　［千葉大・文］



(1)　さいころを 3 回投げて出た目 i, j, k の組は 6^3 通りあり，これらは同様に確からしい。

　さて，得点が 0 でないのは，$i,\ j,\ k$ がすべて異なるときであり，その確率は，

$$\frac{{}_6\mathrm{P}_3}{6^3}=\frac{5}{9}$$

　よって，得点が 0 となる確率は，$1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$ である。

(2)　得点を X とおき，$X=n$ のときの確率を $P(n)$ で表すと，$X\neq 0$ であるのは，次の 3 種類である。

(i)　$\triangle \mathrm{A}_i\mathrm{A}_j\mathrm{A}_k$ が 3 辺の長さ 2，2，$2\sqrt{3}$ の二等辺三角形の場合

　$\triangle \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$，$\triangle \mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4$，$\triangle \mathrm{A}_3\mathrm{A}_4\mathrm{A}_5$，$\triangle \mathrm{A}_4\mathrm{A}_5\mathrm{A}_6$，$\triangle \mathrm{A}_5\mathrm{A}_6\mathrm{A}_1$，$\triangle \mathrm{A}_6\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ の場合が対応し，

$$X=\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sin\frac{2}{3}\pi\right)^2=3,\ \ P(3)=\frac{6\times 3!}{6^3}=\frac{1}{6}$$

(ii)　$\triangle \mathrm{A}_i\mathrm{A}_j\mathrm{A}_k$ が 3 辺の長さ 2，$2\sqrt{3}$，4 の直角三角形の場合

　長さ 4 の斜辺は $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_4$，$\mathrm{A}_2\mathrm{A}_5$，$\mathrm{A}_3\mathrm{A}_6$ の 3 種類あり，それぞれに対して，もう 1 つの頂点は 4 通りずつ決まることより，

$$X=\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sqrt{3}\right)^2=12,\ \ P(12)=\frac{3\times 4\times 3!}{6^3}=\frac{1}{3}$$

(iii)　$\triangle \mathrm{A}_i\mathrm{A}_j\mathrm{A}_k$ が辺の長さ $2\sqrt{3}$ の正三角形の場合

　$\triangle \mathrm{A}_1\mathrm{A}_3\mathrm{A}_5$，$\triangle \mathrm{A}_2\mathrm{A}_4\mathrm{A}_6$ の場合が対応し，

$$X=\left(\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}\sin\frac{1}{3}\pi\right)^2=27,\ \ P(27)=\frac{2\times 3!}{6^3}=\frac{1}{18}$$

(i)～(iii)より，得点が 27 となる確率は，$\frac{1}{18}$ である。

(3)　X の期待値を $E(X)$ とおくと，(1)，(2)から，

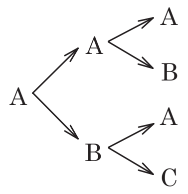
$$E(X)=0\times\frac{4}{9}+3\times\frac{1}{6}+12\times\frac{1}{3}+27\times\frac{1}{18}=6$$

［解 説］

　正六角形を題材とした確率の基本題です。ケアレスミスを防ぐために，すべての場合の確率の和が 1 となっていることの確認が必要です。

23　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［名古屋大・文］

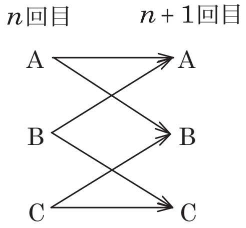
(1)　はじめに，A が赤玉を持っていて，題意の操作をしたところ，赤玉は右図のように移動する。その確率は，いずれも$\dfrac{1}{2}$なので，



$$a_1 = b_1 = \frac{1}{2},\ c_1 = 0$$

$$a_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2},\ b_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},\ c_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

(2)　n 回目の操作後から，$n+1$ 回目の操作後への赤玉の移動は右図のようになり，移動の確率は，いずれも$\dfrac{1}{2}$から，



$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n \cdots\cdots\cdots ①$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n \cdots\cdots\cdots ②$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \cdots\cdots\cdots ③$$

(3)　n が奇数ならば $a_n = b_n > c_n$，n が偶数ならば $a_n > b_n = c_n$ であることを数学的帰納法を用いて証明する。

(i)　$n=1$ のとき

(1)から，$a_1 = b_1 > c_1$，$a_2 > b_2 = c_2$ となり，成立する。

(ii)　$n=k$ のとき

$a_{2k-1} = b_{2k-1} > c_{2k-1}$，$a_{2k} > b_{2k} = c_{2k}$ であると仮定すると，①②③より，

$$a_{2k+1} = \frac{1}{2}a_{2k} + \frac{1}{2}b_{2k},\ b_{2k+1} = \frac{1}{2}a_{2k} + \frac{1}{2}c_{2k},\ c_{2k+1} = \frac{1}{2}b_{2k} + \frac{1}{2}c_{2k}$$

よって，$a_{2k+1} = b_{2k+1} > c_{2k+1}$ となり，さらに，

$$a_{2k+2} = \frac{1}{2}a_{2k+1} + \frac{1}{2}b_{2k+1},\ b_{2k+2} = \frac{1}{2}a_{2k+1} + \frac{1}{2}c_{2k+1},\ c_{2k+2} = \frac{1}{2}b_{2k+1} + \frac{1}{2}c_{2k+1}$$

よって，$a_{2k+2} > b_{2k+2} = c_{2k+2}$ である。

(i)(ii)より，n が奇数ならば $a_n = b_n > c_n$，n が偶数ならば $a_n > b_n = c_n$ である。

(4)　$a_n + b_n + c_n = 1$ なので，②から，$b_{n+1} = \dfrac{1}{2}(1 - b_n)$ となり，

$$b_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(b_n - \frac{1}{3}\right)$$

よって，$b_n - \dfrac{1}{3} = \left(b_0 - \dfrac{1}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = -\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ より，$b_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

［解 説］

確率と連立漸化式についての有名問題です。当たり前すぎて忘れがちなポイントは，$a_n + b_n + c_n = 1$ です。

24　　　　［岡山大・理］

(1)　$3n$ 枚のカードから 3 枚を取り出す ${}_{3n}\mathrm{C}_3$ 通りが同様に確からしいとする。

ここで, 3 枚のカードの数字がすべて 3 の倍数である取り出し方は ${}_n\mathrm{C}_3$ 通りより, その確率は,

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_3}{{}_{3n}\mathrm{C}_3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{3n(3n-1)(3n-2)}=\frac{(n-1)(n-2)}{3(3n-1)(3n-2)}$$

(2)　まず, $3n$ 枚のカードを, 書かれた数字によって, 次の 3 つのタイプに分類する。

すなわち, 書かれた数字が 3 の倍数の n 枚のカード, (3 の倍数＋1)の n 枚のカード, (3 の倍数＋2)の n 枚のカードである。

すると, 3 枚のカードの数字の和が 3 の倍数であるのは, 同じタイプから 3 枚を取り出す ${}_n\mathrm{C}_3\times 3$ 通り, 3 つのタイプから 1 枚ずつ取り出す $({}_n\mathrm{C}_1)^3=n^3$ 通りの場合がある。これより, その確率は,

$$\frac{3{}_n\mathrm{C}_3+n^3}{{}_{3n}\mathrm{C}_3}=\frac{3n(n-1)(n-2)+6n^3}{3n(3n-1)(3n-2)}=\frac{3n^2-3n+2}{(3n-1)(3n-2)}$$

(3)　3 枚のカードの数字の積が 3 の倍数である確率 p_1 は, 余事象を考えて,

$$p_1=1-\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_3}{{}_{3n}\mathrm{C}_3}$$

また, 3 枚のカードの数字の和が 3 の倍数でない確率 p_2 は, (2)より,

$$p_2=1-\frac{3{}_n\mathrm{C}_3+n^3}{{}_{3n}\mathrm{C}_3}$$

これより, $p_1-p_2=-\dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_3}{{}_{3n}\mathrm{C}_3}+\dfrac{3{}_n\mathrm{C}_3+n^3}{{}_{3n}\mathrm{C}_3}$ となり,

$$\begin{aligned}(p_1-p_2)\,{}_{3n}\mathrm{C}_3&=-\frac{2n}{6}(2n-1)(2n-2)+\frac{3}{6}n(n-1)(n-2)+n^3\\&=\frac{n}{6}(n^2+3n+2)>0\end{aligned}$$

よって, $p_1>p_2$ から, 積が 3 の倍数である確率の方が大きい。

［解 説］

確率の基本問題です。なお, (2)の分類方法は必須事項です。

$\boxed{25}$ ［名古屋大・文］

(1)　玉を 2 度取り出すとき，数字の合計が 2 であるのは，$2+0$，$1+1$，$0+2$ の 3 通りより，その確率は，

$$\frac{1}{8}\times\frac{4}{7}+\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}+\frac{4}{8}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{4}$$

(2)　玉を 4 度取り出すとき，玉に書かれた数字の合計が 5 以上となるのは，2 を 1 度，1 を 3 度取り出す場合より，その確率は，

$$\left(\frac{1}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}\right)\times\frac{4!}{3!}=\frac{1}{70}$$

よって，玉を 4 度取り出すとき，玉に書かれた数字の合計が 4 以下である確率は，

$$1-\frac{1}{70}=\frac{69}{70}$$

(3)　まず，8 個の玉の数字の合計が 5 より，与えられた条件が満たされないのは，次の 4 つの場合である。

(i)　玉を 1 度取り出したとき，その数字が 2 以上

このときの確率は，$\frac{1}{8}$ である。

(ii)　玉を 2 度取り出したとき，1 度目の数字が 1 以下，2 度目までの合計が 3 以上

$1+2$ の場合より，このときの確率は，$\frac{3}{8}\times\frac{1}{7}=\frac{3}{56}$ である。

(iii) 玉を 3 度取り出したとき，1 度目の数字が 1 以下，2 度目までの合計が 2 以下，3 度目までの合計が 4 以上

$1+1+2$ の場合より，このときの確率は，$\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{56}$ である。

(iv) 玉を 4 度取り出したとき，1 度目の数字が 1 以下，2 度目までの合計が 2 以下，3 度目までの合計が 3 以下，4 度目までの合計が 5 以上

$1+1+1+2$ の場合より，このときの確率は，$\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{280}$ である。

(i)～(iv)より，与えられた条件が満たされる確率は，

$$1-\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{56}+\frac{1}{56}+\frac{1}{280}\right)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

［解 説］

(3)は読解力がポイントです。具体的に考えて，題意を言い換える力が必要です。

26 ［千葉大・理］

千葉君が部屋を n 回移動した後に部屋 A_1 にいる確率を p_n とおくと，最初，部屋 A_0 にいたので，$p_1=\dfrac{1}{k}$ である。

また，$n+1$ 回移動した後に部屋 A_1 にいるのは，n 回移動した後に部屋 A_1 以外にいて，A_1 を $\dfrac{1}{k}$ の確率で選んで移動する場合より，

$$p_{n+1}=\frac{1}{k}(1-p_n),\ \ p_{n+1}=-\frac{1}{k}p_n+\frac{1}{k}\cdots\cdots\cdots(*)$$

(＊)を変形すると，$p_{n+1}-\dfrac{1}{k+1}=-\dfrac{1}{k}\left(p_n-\dfrac{1}{k+1}\right)$ となり，

$$p_n-\frac{1}{k+1}=\left(p_1-\frac{1}{k+1}\right)\left(-\frac{1}{k}\right)^{n-1}=\frac{1}{k(k+1)}\left(-\frac{1}{k}\right)^{n-1}=-\frac{1}{k+1}\left(-\frac{1}{k}\right)^{n}$$

よって，$p_n=\dfrac{1}{k+1}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{k}\right)^n\right\}$ である。

［解 説］

最初の移動で場合分けをし，隣接 3 項間型の漸化式を立式して解いたところ，そのプロセスで(＊)が導かれ，考え直したのが，上の解答例です。

27　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［一橋大］

(1)　n 回目に A, B がサイコロを投げる確率を, それぞれ a_n, b_n とおくと, 条件より, $a_1=1$, $b_1=0$ である。

さて, $n+1$ 回目に A がサイコロを投げるのは, n 回目に A がサイコロを投げ 1, 2, 3 のいずれかの目が出るか, または n 回目に B がサイコロを投げ 4, 5 のいずれかの目が出るときなので,

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{3}b_n\cdots\cdots\cdots①$$

また, $n+1$ 回目に B がサイコロを投げるのは, n 回目に A がサイコロを投げ 4, 5 のいずれかの目が出るか, または n 回目に B がサイコロを投げ 1, 2, 3 のいずれかの目が出るときなので,

$$b_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{2}b_n\cdots\cdots\cdots②$$

①＋②より, $a_{n+1}+b_{n+1}=\frac{5}{6}(a_n+b_n)$ となり,

$$a_n+b_n=(a_1+b_1)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdots\cdots\cdots③$$

①－②より, $a_{n+1}-b_{n+1}=\frac{1}{6}(a_n-b_n)$ となり,

$$a_n-b_n=(a_1-b_1)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\cdots\cdots\cdots④$$

③④より, $a_n=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}$

(2)　n 回目のサイコロ投げで A が勝つのは, n 回目に A がサイコロを投げ, 6 の目を出すときより, その確率 p_n は, (1)より,

$$p_n=\frac{1}{6}a_n=\frac{1}{12}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}$$

(3)　n 回以内のサイコロ投げで A が勝つ確率 q_n は, (2)より,

$$q_n=\sum_{k=1}^{n}p_k=\frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}+\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}\right\}=\frac{1}{12}\left\{\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1-\frac{5}{6}}+\frac{1-\left(\frac{1}{6}\right)^n}{1-\frac{1}{6}}\right\}$$

$$=\frac{1}{12}\cdot 6\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}+\frac{1}{12}\cdot\frac{6}{5}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}=\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^n-\frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

［解 説］

確率を計算するときに, 漸化式を立てることが有効なタイプの問題です。なお, (2)は疑心暗鬼になってしまう不思議な設問です。

$\boxed{28}$　　［九州大・理］

(1)　4 個の球が入っている袋から同時に 2 個の球を取り出す ${}_4C_2 = 6$ 通りの場合が同様に確からしいとし，この操作を 2 回繰り返すとする。

さて，カードが左から順に 1，2，3，4 と並ぶのは，1 回目に i と j を取り出したとき，2 回目も i と j を取り出す場合より，その確率は，

$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 6=\frac{1}{6}$$

(2)　操作を 2 回繰り返すとき，カードが左から順に 4，3，2，1 と並ぶのは，1 回目に 1 と 4 を取り出し 2 回目に 2 と 3 を取り出す場合か，1 回目に 2 と 3 を取り出し 2 回目に 1 と 4 を取り出す場合のいずれかなので，その確率は，

$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 2=\frac{1}{18}$$

(3)　操作を 2 回繰り返すとき，左端のカードの数字が 1 になるのは，

(i)　2 と 3，2 と 4，3 と 4 のいずれかを 2 回取り出すとき

この場合の確率は，$\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}\times 3^2=\dfrac{9}{36}$

(ii)　1 と 2 を 2 回，または 1 と 3 を 2 回，または 1 と 4 を 2 回取り出すとき

この場合の確率は，$\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}\times 3=\dfrac{3}{36}$

(i)(ii)より，求める確率は，$\dfrac{9}{36}+\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{3}$

(4)　操作を 3 回繰り返すとき，左端のカードの数字が 1 になるのは，(3)と同様に，

(i)　2 回の操作の後，左端が 1 の場合

3 回目に 1 以外の 2 つの数を取り出すことより，その確率は，$\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{6}\times 3\right)=\dfrac{1}{6}$

(ii)　2 回の操作の後，左端が 1 でない場合

3 回目に左端の数と 1 を取り出すことより，その確率は，$\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{9}$

(i)(ii)より，左端のカードの数字が 1 の確率は，$\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{9}=\dfrac{5}{18}$

また，操作を 3 回繰り返すとき，左端のカードの数字が 2，3，4 になることは対等なので，その確率はそれぞれ，$\dfrac{1}{3}\times\left(1-\dfrac{5}{18}\right)=\dfrac{13}{54}$ である。

よって，操作を 3 回繰り返すとき，左端のカードの数字の期待値 E は，

$$E=1\times\frac{5}{18}+2\times\frac{13}{54}+3\times\frac{13}{54}+4\times\frac{13}{54}=\frac{22}{9}$$

［解 説］

(3)と(4)は，1 のカードが動かないときと動くときに場合を分けています。

29　　［千葉大・医］

(1)　積 X_1X_2 が 18 より大となるのは，$X_1=X_2$ のとき $(X_1,\ X_2)=(5,\ 5),\ (6,\ 6)$ である。また，$X_1<X_2$ のとき $(X_1,\ X_2)=(4,\ 5),\ (4,\ 6),\ (5,\ 6)$，$X_1>X_2$ のときも同様になる。

よって，積 X_1X_2 が 18 以下である確率は，$1-\dfrac{2+3\cdot 2}{6^2}=\dfrac{7}{9}$ である。

(2)　積 $X_1X_2\cdots X_n$ が奇数である確率は $\left(\dfrac{3}{6}\right)^n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ から，偶数である確率は，

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(3)　積 $X_1X_2\cdots X_n$ が 4 の倍数でない偶数であるのは，$X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ のうちの 1 つが 2 または 6, 残りが奇数の場合より，その確率は，${}_n\mathrm{C}_1\dfrac{2}{6}\left(\dfrac{3}{6}\right)^{n-1}=\dfrac{n}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ である。よって，積 $X_1X_2\cdots X_n$ が 4 の倍数である確率は, (2)より,

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=1-\left(1+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(4)　さいころの出る目を 3 で割った余りが 0, 1, 2 の場合をそれぞれ $R_0,\ R_1,\ R_2$ とおくと，いずれの場合も起こる確率は $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$ である。

ここで，自然数を 3 で割った余りについて，2 数とその積の関係をまとめると右表のようになる。

	R_0	R_1	R_2
R_0	R_0	R_0	R_0
R_1	R_0	R_1	R_2
R_2	R_0	R_2	R_1

すると，積 $X_1X_2\cdots X_n$ を 3 で割ったときの余りが 1 であるのは，$X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ のうち，R_1 が n 回，または R_1 が $n-2$ 回で R_2 が 2 回，または R_1 が $n-4$ 回で R_2 が 4 回，……という場合がある。その確率は, n を偶奇で分けると,

(i)　n が偶数のとき

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n+{}_n\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{3}\right)^2+{}_n\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^{n-4}\left(\frac{1}{3}\right)^4+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$=({}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_4+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n)\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(ii)　n が奇数のとき

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n+{}_n\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{3}\right)^2+{}_n\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^{n-4}\left(\frac{1}{3}\right)^4+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$
$$=({}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_4+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1})\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

さて，二項定理を用いて,

$${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_3+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=(1+1)^n=2^n\ \cdots\cdots\cdots①$$
$${}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-{}_n\mathrm{C}_3+\cdots+(-1)^n\,{}_n\mathrm{C}_n=(1-1)^n=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

(i)　n が偶数のとき

①+②より，$2({}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n)=2^n$，${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=2^{n-1}$

(ii)　n が奇数のとき

①+②より，$2({}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1})=2^n$，${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}=2^{n-1}$

(i)(ii)より，n の偶奇にかかわらず，求める確率は，$2^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ である。

[解 説]

確率の頻出問題です。(4)は，積が R_1 となるのは，R_0 が 0 回で，R_2 が 0 または偶数回という意味です。

30　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［広島大・文］

(1)　$N \geqq 4$ より，さいころを投げる回数が最大となるのは，偶数 2 回，奇数 $N-1$ 回出た後，もう 1 回投げる場合より，$2+(N-1)+1=N+2$ 回である。

(2)　さいころを 3 回投げて操作を終了する場合は，偶数が 3 回出たときより，その確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$ である。

(3)　さいころを N 回投げて操作を終了する場合は，奇数が N 回出たか，$N-1$ 回目までに偶数 2 回奇数 $N-3$ 回出て N 回目に偶数が出たときより，その確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^N+{}_{N-1}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^{N-3}\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\left\{1+\frac{(N-1)(N-2)}{2}\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^N$$

$$=(N^2-3N+4)\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}$$

(4)　最後に奇数の目が出て操作を終了する場合は,

(i)　奇数が N 回出たとき

(ii)　N 回目までに偶数 1 回奇数 $N-1$ 回出て，$N+1$ 回目に奇数が出たとき

(iii)　$N+1$ 回目までに偶数 2 回奇数 $N-1$ 回出て，$N+2$ 回目に奇数が出たとき

(i)～(iii)より，その確率は,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^N+{}_N\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+{}_{N+1}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\left\{1+\frac{N}{2}+\frac{(N+1)N}{8}\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^N=(N^2+5N+8)\left(\frac{1}{2}\right)^{N+3}$$

(5)　$N=4$ のとき, (1)より，さいころを投げる回数は最大 6 回となる。

(i)　3 回投げて操作を終了する場合　その確率は, (2)より $\dfrac{1}{8}$

(ii)　4 回投げて操作を終了する場合　その確率は, (3)より $(16-12+4)\left(\dfrac{1}{2}\right)^5=\dfrac{1}{4}$

(iii)　5 回投げて操作を終了する場合

4 回目までに偶数 1 回奇数 3 回出て 5 回目に奇数が出たか，4 回目までに偶数 2 回奇数 2 回出て 5 回目に偶数が出たときより，その確率は,

$${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{16}$$

(iv)　6 回投げて操作を終了する場合　その確率は, (1)より，${}_5\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\cdot 1=\dfrac{5}{16}$

(i)～(iv)より，さいころを投げる回数の期待値は,

$$3\times\frac{1}{8}+4\times\frac{1}{4}+5\times\frac{5}{16}+6\times\frac{5}{16}=\frac{77}{16}$$

［解 説］

題意を数式化するのときに細心の注意が要求される確率の問題です。

31　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［名古屋大］

(1)　n 枚のカードをもとに戻しながら 1 枚ずつ取り出す試行を 3 回繰り返すとき，n^3 通りの場合が同様に確からしい。

さて，書かれた整数の最小値を X，最大値を Y とするとき，$j \leqq X$ かつ $Y \leqq j+k$ であるのは，j 以上 $j+k$ 以下の $k+1$ 枚のカードを 3 回取り出すことより，その確率 $P(j \leqq X \text{かつ} Y \leqq j+k)$ は，

$$P(j \leqq X \text{かつ} Y \leqq j+k) = \frac{(k+1)^3}{n^3}$$

(2)　「$X=j$ かつ $Y=j+k$」となるのは，「$j \leqq X$ かつ $Y \leqq j+k$」の場合から「$j+1 \leqq X$ または $Y \leqq j+k-1$」の場合を除いたものになる。

ここで，(1)と同様に考えると，$P(j+1 \leqq X \text{かつ} Y \leqq j+k) = \dfrac{k^3}{n^3}$

$$P(j \leqq X \text{かつ} Y \leqq j+k-1) = \frac{k^3}{n^3},\ P(j+1 \leqq X \text{かつ} Y \leqq j+k-1) = \frac{(k-1)^3}{n^3}$$

すると，求める確率 $P(j=X \text{かつ} Y=j+k)$ は，

$$P(j \leqq X \text{かつ} Y \leqq j+k) - P(j+1 \leqq X \text{または} Y \leqq j+k-1)$$
$$= \frac{(k+1)^3}{n^3} - \left\{ \frac{k^3}{n^3} + \frac{k^3}{n^3} - \frac{(k-1)^3}{n^3} \right\} = \frac{(k+1)^3}{n^3} - \frac{2k^3}{n^3} + \frac{(k-1)^3}{n^3} = \frac{6k}{n^3}$$

(3)　(2)より，$X=j$ かつ $Y=j+s$　$(1 \leqq j \leqq n-s)$ となる確率は，それぞれ $\dfrac{6s}{n^3}$ であり，$Y-X=s$ となる確率 $P(s)$ は，

$$P(s) = \frac{6s}{n^3} \times (n-s) = -\frac{6}{n^3}(s^2-ns)$$

(4)　(3)より，$P(s) = -\dfrac{6}{n^3}\left(s-\dfrac{n}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{2n}$

すると，n は偶数より，$s=\dfrac{n}{2}$ のとき $P(s)$ は最大となる。

［解 説］

最大，最小の確率を問う有名問題です。(2)の考え方はオーソドックスなものです。

$\boxed{32}$ ［東北大］

(1) 与えられた試行に対して，A から取り出した数字と，B から取り出した数字が一致する回数を X とし，$X=i$ である確率を $P(i)$ とおく。

$X=4$ となるのは，A からの取り出し方に対する B からの取り出し方が 1 通りのときより，$P(4)=\dfrac{1}{4!}=\dfrac{1}{24}$ である。

$X=3$ となる場合はないので，$P(3)=0$ である。

$X=2$ となるのは，A からの取り出し方に対する B からの取り出し方が，一致する数字の対応が ${}_4\mathrm{C}_2$ 通り，それぞれに対し，一致しない数字の対応が 1 通りずつのときである。これより，$P(2)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2\cdot 1}{4!}=\dfrac{1}{4}$ である。

$X=1$ となるのは，A からの取り出し方に対する B からの取り出し方が，一致する数字の対応が ${}_4\mathrm{C}_1$ 通り，それぞれに対し，一致しない数字の対応が 2 通りずつのときである。これより，$P(1)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot 2}{4!}=\dfrac{1}{3}$ である。

したがって，X の期待値は，$4\times\dfrac{1}{24}+2\times\dfrac{1}{4}+1\times\dfrac{1}{3}=1$ である。

(2) 与えられた試行に対して，カードの数字が一致する確率は $\dfrac{1}{3}$，一致しない確率は $\dfrac{2}{3}$ なので，n 回目でカードが初めて取り除かれる確率 p_n は，$n\geqq 2$ のとき，

$$p_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

これは，$n=1$ のときも成立している。

また，n 回目の操作ですべてのカードが取り除かれる確率 q_n は，$q_1=q_2=0$

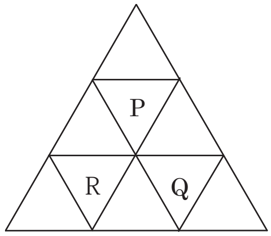
$n\geqq 3$ のときは，k 回目 $(1\leqq k\leqq n-2)$ で初めてカードが 1 枚取り除かれ，$n-1$ 回目と n 回目に 1 枚ずつ取り除かれる場合である。カードが 2 枚のとき，数字が一致する確率は $\dfrac{1}{2}$，一致しない確率は $\dfrac{1}{2}$ なので，

$$\begin{aligned}q_n&=\sum_{k=1}^{n-2}p_k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2-k}\cdot\frac{1}{2}=\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-k}=\sum_{k=1}^{n-2}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\sum_{k=1}^{n-2}\left(\frac{4}{3}\right)^{k}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot\frac{\frac{4}{3}\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^{n-2}-1\right\}}{\frac{4}{3}-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^{n-2}-1\right\}\\&=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\end{aligned}$$

［解 説］

頻出ですが，(2)は不注意によるミスをやってしまいがちな問題です。

$\boxed{33}$　　　　［東京大］



まず，部屋 R を右図のように決め，球が n 秒後に P, Q, R にある確率を，それぞれ p_n，q_n，r_n とおく。

さて，球は P より出発し，1 秒ごとに辺を共有する隣の部屋に移動することより，奇数秒後には P，Q，R 以外の部屋，偶数秒後には P, Q, R のいずれかの部屋にある。

これより，k を 1 以上の整数として，

$$p_{2k-1}=q_{2k-1}=r_{2k-1}=0\cdots\cdots\cdots①,\quad p_{2k}+q_{2k}+r_{2k}=1\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，球が $2k$ 秒後に部屋 P, Q, R のいずれかにあり，$2k+2$ 秒後に部屋 Q に移動する確率は，

(i)　部屋 P にあるとき　P→Q と移動する確率は，$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

(ii)　部屋 Q にあるとき　Q→Q と移動する確率は，$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times1=\frac{2}{3}$

(iii) 部屋 R にあるとき　R→Q と移動する確率は，$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

(i)(ii)(iii)より，$q_{2k+2}=\frac{1}{6}p_{2k}+\frac{2}{3}q_{2k}+\frac{1}{6}r_{2k}\cdots\cdots\cdots③$

また，Q, R の対称性より，$q_{2k}=r_{2k}$ なので，②③に代入すると，

$$p_{2k}+2q_{2k}=1\cdots\cdots\cdots④,\quad q_{2k+2}=\frac{1}{6}p_{2k}+\frac{5}{6}q_{2k}\cdots\cdots\cdots⑤$$

④⑤より，$q_{2k+2}=\frac{1}{6}(1-2q_{2k})+\frac{5}{6}q_{2k}=\frac{1}{2}q_{2k}+\frac{1}{6}$ となり，$q_0=0$ に注意して，

$$q_{2k+2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\left(q_{2k}-\frac{1}{3}\right),\quad q_{2k}-\frac{1}{3}=\left(q_0-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^k=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

よって，$q_{2k}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdots\cdots\cdots⑥$

①⑥から，n が奇数のとき $q_n=0$，n が偶数のとき $q_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$ となる。

［解 説］

確率と漸化式の融合問題です。最初は，すべての部屋に名称をつけましたが，そうするまでもありませんでした。

34　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［京都大・理］

まず，$Y_1=X_1$，$Y_n=X_n+\dfrac{1}{Y_{n-1}}$ から，帰納的に $Y_n\geqq 1$ である。

そこで，$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\leqq Y_n\leqq 1+\sqrt{3}$ である条件は，$\dfrac{5}{4}<\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}<\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{5}{2}<1+\sqrt{3}<3$ に注目すると，$X_n=1$ または $X_n=2$ の場合についてだけ考えればよい。

(i)　$X_n=1$ のとき

$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\leqq 1+\dfrac{1}{Y_{n-1}}\leqq 1+\sqrt{3}$ から，右側の不等式は成立し，$\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\leqq\dfrac{1}{Y_{n-1}}$ から，

$$Y_{n-1}\leqq\frac{2}{-1+\sqrt{3}}=1+\sqrt{3}$$

(ii)　$X_n=2$ のとき

$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\leqq 2+\dfrac{1}{Y_{n-1}}\leqq 1+\sqrt{3}$ から，左側の不等式は成立し，$\dfrac{1}{Y_{n-1}}\leqq -1+\sqrt{3}$ から，

$$Y_{n-1}\geqq\frac{1}{-1+\sqrt{3}}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

(i)(ii)より，$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\leqq Y_n\leqq 1+\sqrt{3}$ となるのは，$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\leqq Y_{n-1}\leqq 1+\sqrt{3}$ では $X_n=1$ または $X_n=2$，$Y_{n-1}<\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ では $X_n=1$ だけ，$Y_{n-1}>1+\sqrt{3}$ では $X_n=2$ だけである。

そこで，$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\leqq Y_n\leqq 1+\sqrt{3}$，$Y_n<\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$，$Y_n>1+\sqrt{3}$ となる確率を，それぞれ p_n，q_n，r_n とおくと，

$$p_n=\frac{2}{6}p_{n-1}+\frac{1}{6}q_{n-1}+\frac{1}{6}r_{n-1}=\frac{1}{3}p_{n-1}+\frac{1}{6}(q_{n-1}+r_{n-1})$$

$p_n+q_n+r_n=1$ から，$p_n=\dfrac{1}{3}p_{n-1}+\dfrac{1}{6}(1-p_{n-1})=\dfrac{1}{6}p_{n-1}+\dfrac{1}{6}$ となり，

$$p_n-\frac{1}{5}=\frac{1}{6}\Big(p_{n-1}-\frac{1}{5}\Big)=\Big(p_1-\frac{1}{5}\Big)\Big(\frac{1}{6}\Big)^{n-1}$$

ここで，$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\leqq Y_1\leqq 1+\sqrt{3}$ となるのは，$Y_1=X_1=2$ から $p_1=\dfrac{1}{6}$ であり，

$$p_n=\frac{1}{5}+\Big(\frac{1}{6}-\frac{1}{5}\Big)\Big(\frac{1}{6}\Big)^{n-1}=\frac{1}{5}-\frac{1}{30}\Big(\frac{1}{6}\Big)^{n-1}=\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\Big(\frac{1}{6}\Big)^{n}$$

［解 説］

上の解答例には記していませんが，最初，題意をつかむために実験をしています。もつれた糸を解きほぐすように計算をすすめたところ，予想を超える簡明な結論が導けました。おもしろい問題です。

35　［東北大・理］

(1)　右表は，一番左側の列が 1 回目の目，一番上側の行が 2 回目の目であり，それらの目とその和との関係を表したものである。

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

さて，A→B→A と投げて A が勝ちとなるのは，まず B は 5 以下の目を出す。A は 1 回目の目が 5 以下で 2 回目を投げ，1 回目との目の和が 6 以上を出すときになり，右表から 20 通りの場合がある。よって，この確率は，

$$\frac{5}{6}\times\frac{20}{36}=\frac{25}{54}$$

(2)　A→B→A→B と投げて B が勝ちとなるのは，まず A は 1 回目と 2 回目の目の和が 5 以下であり，右上表から 10 通りの場合がある。さらに，B は 1 回目の目が 5 以下で 2 回目を投げ，1 回目との目の和が 6 以上であり，これは右上表から 20 通りの場合がある。よって，この確率は，

$$\frac{10}{36}\times\frac{20}{36}=\frac{25}{162}$$

(3)　A→B→A→B→A→B と投げてゲームが終了しないのは，A，B とも 1 回目と 2 回目と 3 回目の目の和が 5 以下である。

(i)　1 回目の目が 1 のとき
(2 回目, 3 回目)＝(1, 1)，(1, 2)，(1, 3)，(2, 1)，(2, 2)，(3, 1)

(ii)　1 回目の目が 2 のとき
(2 回目, 3 回目)＝(1, 1)，(1, 2)，(2, 1)

(iii)　1 回目の目が 3 のとき
(2 回目, 3 回目)＝(1, 1)

(i)(ii)(iii)より，合わせて，$6+3+1=10$ 通りの場合がある。
したがって，求める確率は，

$$\frac{10}{216}\times\frac{10}{216}=\frac{25}{11664}$$

［解　説］

確率の基本題ですが，センター試験風に表を作ってしまえば，その後の計算はほとんど不要です。

36　　　　［九州大］

(1)　L を 2 回続けて行うとき，左端の硬貨は，必ず表→裏→表と反転する。これより，表が 1 枚となるのは，左端の硬貨が表，それ以外は裏という場合である。

このときは，出た目が，6→1 または 1→6 のいずれかより，その確率は，

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{18}$$

(2)　L, R の順に操作を行うとき，出た目と表の枚数の関係は右表のようになる。

なお，右表では，L の操作で 1 の目が出るのを L1，2 の目が出るのを L2，3 の目が出るのを L3，…，R の操作で 1 の目が出るのを R1，2 の目が出るのを R2，3 の目が出るのを R3，…と表している。

	R1	R2	R3	R4	R5	R6
L1	4	3	2	1	0	1
L2	3	2	1	0	1	2
L3	2	1	0	1	2	3
L4	1	0	1	2	3	4
L5	0	1	2	3	4	5
L6	1	2	3	4	5	6

これより，表の枚数の期待値は，

$$0\times\frac{5}{36}+1\times\frac{10}{36}+2\times\frac{8}{36}+3\times\frac{6}{36}+4\times\frac{4}{36}+5\times\frac{2}{36}+6\times\frac{1}{36}=\frac{19}{9}$$

(3)　L, R, L の順に操作を行うとき，すべての硬貨が表となるのは次の場合である。

(i)　最初の操作が L6 以外のとき

L, R の順に操作を行ったとき表の枚数が 0 で，3 回目に 6 の目が出る場合より，

L1→R5→L6，L2→R4→L6，L3→R3→L6，L4→R2→L6，L5→R1→L6

この確率は，$\left(\frac{1}{6}\right)^3\times 5=\frac{5}{216}$ となる。

(ii)　最初の操作が L6 のとき

L, R の順に操作を行ったとき表の枚数が k のとき, 3 回目に $6-k$ の目が出る場合より，

L6→R1→L5，L6→R2→L4，L6→R3→L3，L6→R4→L2，L6→R5→L1

この確率は，$\left(\frac{1}{6}\right)^3\times 5=\frac{5}{216}$ となる。

(i)(ii)より，求める確率は，$\frac{5}{216}+\frac{5}{216}=\frac{5}{108}$ である。

［解　説］

パズルのような問題です。(2)では，期待値を求めるので，センター試験を解くときと同じように，すべての場合を表にまとめました。すると，これが次の(3)への誘導となっていました。

$\boxed{37}$ ［岡山大・文］

(1)　1 個のさいころを n 回投げ，出た目の最大値を X_n とおくとき，$X_n \leqq k$ となる確率 p_k は，$p_k = \left(\dfrac{k}{6}\right)^n$ である。

(2)　$X_n = k$ となる確率 q_k は，$k \geqq 2$ のとき，

$$q_k = p_k - p_{k-1} = \left(\frac{k}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n \cdots\cdots\cdots(*)$$

$k=1$ のとき，$q_1 = \left(\dfrac{1}{6}\right)^n$ となるが，$(*)$に $k=1$ をあてはめた値に一致する。

(3)　$n=2$ のとき，$q_k = \left(\dfrac{k}{6}\right)^2 - \left(\dfrac{k-1}{6}\right)^2 = \dfrac{2k-1}{36}$

X_n の期待値を E_n とおくと，

$$E_2 = \sum_{k=1}^{6} k\cdot\frac{2k-1}{36} = \frac{1}{36}\sum_{k=1}^{6}(2k^2-k) = \frac{1}{36}\left(2\cdot\frac{1}{6}\cdot 6\cdot 7\cdot 13 - \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 7\right) = \frac{161}{36}$$

(4)　$E_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{6} k\left\{\left(\frac{k}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n\right\} = \sum_{k=1}^{6}\left\{k\left(\frac{k}{6}\right)^n - (k-1)\left(\frac{k-1}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n\right\}$

$$= 6 - \sum_{k=1}^{6}\left(\frac{k-1}{6}\right)^n = 6 - \left(\frac{1}{6}\right)^n - \left(\frac{2}{6}\right)^n - \left(\frac{3}{6}\right)^n - \left(\frac{4}{6}\right)^n - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

これより，n の値が増加すると E_n の値は増加する。

ここで，(3)より，$E_2 = \dfrac{161}{36} < 4.5$ であり，

$$E_3 = 6 - \left(\frac{1}{6}\right)^3 - \left(\frac{2}{6}\right)^3 - \left(\frac{3}{6}\right)^3 - \left(\frac{4}{6}\right)^3 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 6 - \frac{25}{24} > 4.5$$

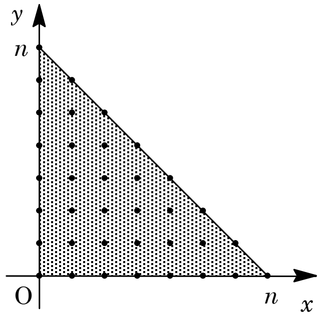
よって，E_n が 4.5 以上となる n の範囲は，$n \geqq 3$ である。

［解 説］

期待値についての標準的な問題です。(4)は(3)の値が誘導になっています。なお，シグマ計算において少し工夫をしていますが，そのまま計算しても構いません。

$\boxed{38}$ ［広島大・文］

(1) まず，連立不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+y \leqq n$ で表される領域 D は，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まれる。



さて，a, b, c, d が整数で，$|a-c|+|b-d|=1$ のとき，

$$(a-c,\ b-d)=(\pm 1,\ 0),\ (0,\ \pm 1)$$

これより，格子点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ に対して，その隣接点 $\mathrm{B}(c,\ d)$ は，領域 D 内にあり，

$$(c,\ d)=(a-1,\ b),\ (a+1,\ b),\ (a,\ b-1),\ (a,\ b+1)$$

すると，点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ の隣接点は，点 $(1,\ 0)$ と点 $(0,\ 1)$ である。

また，領域 D 内の格子点 P が直線 $x+y=n$ 上にあるとき，隣接点については，

(i) $\mathrm{P}(n,\ 0)$ のとき

隣接点は，点 $(n-1,\ 0)$ となり，個数は 1 である。

(ii) $\mathrm{P}(0,\ n)$ のとき

隣接点は，点 $(0,\ n-1)$ となり，個数は 1 である。

(iii) $\mathrm{P}(k,\ n-k)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ のとき

隣接点は，点 $(k-1,\ n-k)$ および点 $(k,\ n-k-1)$ となり，個数は 2 である。

(2) 領域 D 内の格子点のうち隣接点の個数が 4 であるものは，連立不等式 $x \geqq 1$，$y \geqq 1$，$x+y \leqq n-1$ で表される領域内の格子点である。その個数は，

$$1+2+\cdots+(n-2)=\frac{1}{2}(n-2)(n-1)$$

(3) 領域 D 内の格子点の総数 N は，$N=1+2+\cdots+(n+1)=\dfrac{1}{2}(n+1)(n+2)$

(i) 隣接点の個数が 1 のとき

(1)の(i)(ii)より 2 通りの場合があり，その確率は $\dfrac{2}{N}$ となる。

(ii) 隣接点の個数が 2 のとき

点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ および(1)の(iii)より，$1+(n-1)=n$ 通りの場合があり，その確率は $\dfrac{n}{N}$ となる。

(iii) 隣接点の個数が 3 のとき

格子点が $\mathrm{P}(k,\ 0)$，$\mathrm{P}(0,\ k)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ で，$2(n-1)$ 通りの場合があり，その確率は $\dfrac{2(n-2)}{N}$ となる。

(iv) 隣接点の個数が 4 のとき

(2)より $\dfrac{1}{2}(n-2)(n-1)$ 通りの場合があり，その確率は $\dfrac{(n-2)(n-1)}{2N}$ となる。

(i)～(iv)より，隣接点の個数の期待値 E は,

$$E=\frac{1}{N}\left\{1\cdot 2+2\cdot n+3\cdot 2(n-1)+4\cdot\frac{1}{2}(n-2)(n-1)\right\}$$
$$=\frac{2}{(n+1)(n+2)}2n(n+1)=\frac{4n}{n+2}$$

すると，$E=\dfrac{4n}{n+2}\geqq 3$ となるのは，$4n\geqq 3n+6$ から，$n\geqq 6$ である。

［解 説］

格子点の個数と確率の融合問題です。領域 D の図を見ながら，個数を数えています。

$\boxed{39}$ ［熊本大・医］

(1) A 君がさいころを投げて出た目が X に属するのを○，属さないのを●，B 君がさいころを投げて出た目が Y に属するのを□，属さないのを■で表す。すると，A 君が勝つ場合は，○，●■○，●■●■○，……となる。

さいころを投げたとき，X, Y に属する目が出る確率はそれぞれ p, q なので，A 君が勝つ確率 $P(A)$ は，$0<p<1$，$0<q<1$，$p+q \leqq 1$ ……①のもとで，

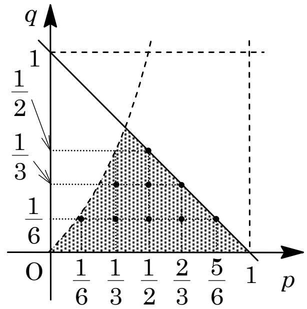
$$P(A) = p+(1-p)(1-q)p+(1-p)^2(1-q)^2p+\cdots+(1-p)^{n-1}(1-q)^{n-1}p$$
$$= p\cdot\frac{1-(1-p)^n(1-q)^n}{1-(1-p)(1-q)}$$

(2) B 君が勝つ場合は，●□，●■●□，●■●■●□，……となるので，その確率 $P(B)$ は，(1)と同様にして，

$$P(B) = (1-p)q+(1-p)^2(1-q)q+(1-p)^3(1-q)^2q+\cdots\cdots$$
$$+(1-p)^n(1-q)^{n-1}q = (1-p)q\cdot\frac{1-(1-p)^n(1-q)^n}{1-(1-p)(1-q)}$$

条件より $P(A)>P(B)$ なので，$p>(1-p)q$ となり，

$$q<\frac{p}{1-p} = -1-\frac{1}{p-1}\ \cdots\cdots\cdots ②$$



①②を満たす領域は右図の網点部となり，p, q のとり得る値は，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{5}{6}$ から，

(i) $(p,\ q) = \left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{6}\right)$ のとき

$(X,\ Y)$ の組の数は，${}_6\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_1 = 30$

(ii) $(p,\ q) = \left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{6}\right)$，$\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$ のとき

$(X,\ Y)$ の組の数は，${}_6\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1+{}_6\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2 = 150$

(iii) $(p,\ q) = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{6}\right)$，$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}\right)$，$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ のとき

$(X,\ Y)$ の組の数は，${}_6\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_1+{}_6\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_2+{}_6\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_3 = 140$

(iv) $(p,\ q) = \left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{6}\right)$，$\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$ のとき

$(X,\ Y)$ の組の数は，${}_6\mathrm{C}_4\times{}_2\mathrm{C}_1+{}_6\mathrm{C}_4\times{}_2\mathrm{C}_2 = 45$

(v) $(p,\ q) = \left(\frac{5}{6},\ \frac{1}{6}\right)$ のとき　$(X,\ Y)$ の組の数は，${}_6\mathrm{C}_5\times{}_1\mathrm{C}_1 = 6$

(i)～(v)より，$(X,\ Y)$ の組の総数は，$30+150+140+45+6 = 371$

［解 説］

プロセスは難しくないのですが，注意深さが求められる問題です。

40　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［一橋大］

(1)　$s_n=\sum_{k=1}^{n}10^{n-k}a_k=10^{n-1}a_1+\cdots+10^2a_{n-2}+10a_{n-1}+a_n$ に対して，

(i)　$n\geqq 2$ のとき

s_n が 4 で割り切れる条件は，下 2 桁が 4 の倍数であることなので，

$(a_{n-1},\ a_n)=(1,\ 2),\ (3,\ 2),\ (5,\ 2),\ (2,\ 4),\ (4,\ 4),\ (6,\ 4),\ (1,\ 6),$
$(3,\ 6),\ (5,\ 6)$

この確率は，$\dfrac{6^{n-2}\times 9}{6^n}=\dfrac{1}{4}$ である。

(ii)　$n=1$ のとき　s_n が 4 で割り切れる確率は，$\dfrac{1}{6}$ である。

(2)　$n\geqq 2$ のとき，$s_n=10(10^{n-2}a_1+\cdots+10a_{n-2}+a_{n-1})+a_n=10s_{n-1}+a_n$

ここで，s_{n-1} を 6 で割った余りが，それぞれ 0, 1, 2, 3, 4, 5 であるとき，s_n が 6 で割り切れるのは，a_n が順に 6, 2, 4, 6, 2, 4 である場合だけとなる。

s_n が 6 で割り切れる確率を p_n とおくと，

$$p_n=\frac{1}{6}p_{n-1}+\frac{1}{6}(1-p_{n-1})=\frac{1}{6}\ \cdots\cdots\cdots①$$

なお，$p_1=\dfrac{1}{6}$ より，①は $n=1$ のときも成立している。

(3)　まず，s_{n-1} を 7 で割った余りが 0 であるとき，a_n がどんな値でも s_n が 7 で割り切れる場合はない。

また，s_{n-1} を 7 で割った余りがそれぞれ 1, 2, 3, 4, 5, 6 であるとき，s_n が 7 で割り切れるのは，a_n が順に 4, 1, 5, 2, 6, 3 である場合だけとなる。

s_n が 7 で割り切れる確率を q_n とおくと，$q_1=0$ で，

$$q_n=0\times q_{n-1}+\frac{1}{6}(1-q_{n-1})=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}q_{n-1}$$

変形すると，$q_n-\dfrac{1}{7}=-\dfrac{1}{6}\left(q_{n-1}-\dfrac{1}{7}\right)$ となり，

$$q_n-\frac{1}{7}=\left(q_1-\frac{1}{7}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}=-\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

よって，$q_n=\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{7}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}\ \cdots\cdots\cdots②$

なお，$q_1=0$ より，②は $n=1$ のときも成立している。

［解　説］

(1)については，有名な知見をもとに解きましたが，それと同じ立脚点では，続く設問に対して難攻します。考え方の融通無碍な切り換えの要求されるところが，最大の難所となっています。

41　　［岡山大・理］

(1)　$1\leqq a<b<c\leqq n$ を満たす $a,\ b,\ c$ の組は,

$$ {}_n\mathrm{C}_3=\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)\ \text{（通り）}$$

(2)　$a'=a$，$b'=b+1$，$c'=c+2$ とおくとき，$1\leqq a\leqq b\leqq c\leqq n$ を満たす $a,\ b,\ c$ の組の数は，$1\leqq a'<b'<c'\leqq n+2$ を満たす a'，b'，c' の組の数に等しいので,

$$ {}_{n+2}\mathrm{C}_3=\frac{1}{6}(n+2)(n+1)n\ \text{（通り）}$$

(3)　$a<b$ かつ $a\leqq c$ となる場合の数は，次の通りである。

(i)　$1\leqq a<b<c\leqq n$ のとき　(1)より，$\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$（通り）

(ii)　$1\leqq a<b=c\leqq n$ のとき　${}_n\mathrm{C}_2=\frac{1}{2}n(n-1)$（通り）

(iii)　$1\leqq a<c<b\leqq n$ のとき　(i)と同様に，$\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$（通り）

(iv)　$1\leqq a=c<b\leqq n$ のとき　(ii)と同様に，$\frac{1}{2}n(n-1)$（通り）

(i)～(iv)より，求める場合の数は,

$$\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)\times2+\frac{1}{2}n(n-1)\times2=\frac{1}{3}n(n-1)(n+1)\ \text{（通り）}$$

［解　説］

場合の数の典型問題です。(3)は(1)を利用して場合分けをしました。

42　　［神戸大・理］

(1)　1から $2n$ までの番号をつけた $2n$ 枚のカードの数字の和は,

$$A+B=1+2+\cdots+2n=\frac{1}{2}\cdot 2n(2n+1)=n(2n+1)\cdots\cdots\cdots①$$

さて, n が奇数のとき，$A=B$ とすると，①より $2A=n(2n+1)\cdots\cdots\cdots②$

②の左辺は偶数, 右辺は奇数より成立しない。よって, A と B は等しくない。

(2)　n が偶数のとき，$A-B=k$ とおくと，①より，

$$2A=n(2n+1)+k\,,\ \ k=-n(2n+1)+2A$$

すると，$n(2n+1)$, $2A$ はともに偶数なので, A と B の差 k は偶数である。

(3)　まず，$n=4$ のとき，1から8までの番号をつけた8枚のカードから4枚を取り出す場合の数は，${}_8C_4=70$ である。

さて，①より $A+B=4\times9=36$ なので，$A=B$ となるのは $A=18$ のときであり，取り出す4枚のカードの数字を $p, q, r, s\,(1\leqq p<q<r<s\leqq 8)$ とおくと，

$$p+q+r+s=18\cdots\cdots\cdots③$$

すると，$18<s+s+s+s=4s$ から $s>\frac{9}{2}$ となり，$s=5,\ 6,\ 7,\ 8$

(i)　$s=5$ のとき　③より，$p+q+r=13\ (1\leqq p<q<r\leqq 4)$

このとき, 満たす $(p,\ q,\ r)$ は存在しない。

(ii)　$s=6$ のとき　③より，$p+q+r=12\ (1\leqq p<q<r\leqq 5)$

このとき，$(p,\ q,\ r)=(3,\ 4,\ 5)$

(iii)　$s=7$ のとき　③より，$p+q+r=11\ (1\leqq p<q<r\leqq 6)$

このとき，$(p,\ q,\ r)=(1,\ 4,\ 6),\ (2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 4,\ 5)$

(iv)　$s=8$ のとき　③より，$p+q+r=10\ (1\leqq p<q<r\leqq 7)$

このとき，$(p,\ q,\ r)=(1,\ 2,\ 7),\ (1,\ 3,\ 6),\ (1,\ 4,\ 5),\ (2,\ 3,\ 5)$

(i)～(iv)より，求める場合は $1+3+4=8$ 通りとなり，その確率は $\frac{8}{70}=\frac{4}{35}$ である。

［解 説］

場合の数と確率の基本問題です。(1)と(2)は，$A+B$ を考えるのがポイントです。(3)は，場合分けをして丁寧に数え上げましたが，いきなり網羅していってもよいでしょう。

$\boxed{43}$ [東北大]

(1)　10個の玉から2個を取り出す ${}_{10}\mathrm{C}_2=45$ 通りの場合が同様に確からしいとする。

さて，書かれている 2 つの数字の積が 10 となるのは，$10=2\times5$ より，${}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1=4$ 通りの場合があり，その確率は $\dfrac{4}{45}$ である。

(2)　10個の玉から4個を取り出す ${}_{10}\mathrm{C}_4=210$ 通りの場合が同様に確からしいとする。

さて，書かれている 4 つの数字の積が 100 となるのは，$100=2^2\times5^2$ より，次の2つの場合がある。

(i)　4つの数字が $(2,\ 2,\ 5,\ 5)$ の場合　1通り

(ii)　4つの数字が $(1,\ 4,\ 5,\ 5)$ の場合　${}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1=4$ 通り

(i)(ii)より，求める確率は，$\dfrac{1+4}{210}=\dfrac{1}{42}$ である。

(3)　10個の玉から6個を順に取り出す ${}_{10}\mathrm{P}_6$ 通りの場合が同様に確からしいとする。

さて，1個目から3個目，4個目から6個目に書かれている数字の組合せを，それぞれ $A,\ B$ とすると，A の3つの数字の積と B の3つの数字の積が等しい場合は，

(i)　$A=B$ のとき

数字の選び方が ${}_5\mathrm{C}_3$ 通り，$A,\ B$ への数字の振り分けが 2^3 通り，出る順序が $3!\times3!$ 通りより，${}_5\mathrm{C}_3\times2^3\times3!\times3!=5\times2^4\times(3!)^2$ 通りである。

(ii)　$A=(2,\ 2,\ 3),B=(1,\ 4,\ 3)$，または $A=(1,\ 4,\ 3),B=(2,\ 2,\ 3)$ のとき

$A,\ B$ への数字の振り分けが $2\times2^2=2^3$ 通り，出る順序が $3!\times3!$ 通りより，$(2^3\times3!\times3!)\times2=2^4\times(3!)^2$ 通りである。

(iii)　$A=(2,\ 2,\ 5),B=(1,\ 4,\ 5)$，または $A=(1,\ 4,\ 5),B=(2,\ 2,\ 5)$ のとき

(ii)と同様に，$(2^3\times3!\times3!)\times2=2^4\times(3!)^2$ 通りである。

(i)〜(iii)より，求める確率は，

$$\frac{(5+1+1)\times2^4\times(3!)^2}{{}_{10}\mathrm{P}_6}=\frac{7\times2^4\times(3!)^2}{10\times9\times8\times7\times6\times5}=\frac{2}{75}$$

［解 説］

$2\times2=1\times4$ に注目するために(2)の設問があり，それが(3)へとつながっています。注意深さの要求される問題です。

$\boxed{44}$　［大阪大・理］

(1)　$T_n = X_1X_2\cdots X_n$ とするとき，T_n が 5 で割り切れないのは，X_1，X_2，$\cdots$，X_n のいずれも 5 以外の場合である。

条件より，T_n を 5 で割った余りが 1 である確率を p_n，余りが 2, 3, 4 のいずれかである確率を q_n とするとき，$p_n + q_n$ は T_n が 5 で割り切れない確率になるので,

$$p_n + q_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n \cdots\cdots\cdots①$$

(2)　T_{n+1} を 5 で割った余りが 1 となる場合は, 次の通りである。

(i)　T_n を 5 で割った余りが 1 のとき

X_{n+1} が 1 または 6 であるときで, その確率は $\frac{1}{3}$ である。

(ii)　T_n を 5 で割った余りが, 2, 3, 4 のいずれかであるとき

X_{n+1} がそれぞれ 3, 2, 4 ときで, その確率はいずれも $\frac{1}{6}$ である。

(iii)　T_n を 5 で割った余りが 0 のとき

どんな X_{n+1} に対しても T_{n+1} を 5 で割った余りは 0 となり，成立しない。

(i)〜(iii)に，①を適用して,

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{6}q_n = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{6}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^n - p_n\right\} = \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^n \cdots\cdots\cdots②$$

(3)　$r_n = \left(\frac{6}{5}\right)^n p_n$ とおくと，$p_1 = \frac{1}{3}$ より $r_1 = \frac{6}{5}p_1 = \frac{2}{5}$ となり，②から,

$$\left(\frac{6}{5}\right)^{n+1} p_{n+1} = \frac{1}{5}\left(\frac{6}{5}\right)^n p_n + \frac{1}{5},\quad r_{n+1} = \frac{1}{5}r_n + \frac{1}{5}$$

これより，$r_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{5}\left(r_n - \frac{1}{4}\right)$ となり,

$$r_n - \frac{1}{4} = \left(r_1 - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

よって，$r_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$，$p_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n r_n = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{6}\right)^n + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^n$

［解 説］

確率と漸化式についての標準的な問題です。(3)で誘導が付いていたのは意外でしたが。

45　　［一橋大］

(1)　1 枚の硬貨を投げて表，裏が出る確率は，それぞれ$\frac{1}{2}$ずつとする。

$a_3=0$ となるのは，表→裏→表または裏→裏→裏のいずれかより，その確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3\times 2=\frac{1}{4}$$

(2)　$a_4=1$ となるのは，次の 2 つの場合がある。

(i)　$a_3=0$ で 4 回目に表が出る場合

この場合の確率は，(1)より，$\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$ となる。

(ii)　$a_3=-1$ で 4 回目に裏が出る場合

$a_3=-1$ となるのは裏→表→裏のときだけであり，これよりこの場合の確率は，$\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$ となる。

(i)(ii)より，$a_4=1$ となる確率は，$\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{3}{16}$ である。

(3)　$a_n=n-3$ $(n\geqq 3)$ となるのは，次の 2 つの場合があり，その確率 p_n について，

(i)　$a_{n-1}=n-4$ で n 回目に表が出る場合

この場合の確率は，$p_{n-1}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}p_{n-1}$ となる。

(ii)　$a_{n-1}=-n+3$ で n 回目に裏が出る場合

まず，$-n+3\leqq a_{n-2}\leqq n-2$ なので，$a_{n-1}=-n+3$ となるのは，$a_{n-2}=n-3$ で $n-1$ 回目に裏が出る場合だけ，すなわち裏→表→表→…→表→裏と 1 回目と $n-1$ 回目に裏が出て，それ以外は表が出る場合である。

n 回目は裏が出ることより，この場合の確率は，$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ となる。

(i)(ii)より，$p_n=\frac{1}{2}p_{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^n$　$(n\geqq 4)$………(＊)

すると，(＊)より，$2^n p_n=2^{n-1}p_{n-1}+1$ となり，$p_3=\frac{1}{4}$ から，

$$2^n p_n=2^3 p_3+(n-3)=8\cdot\frac{1}{4}+n-3=n-1$$

よって，$p_n=\frac{n-1}{2^n}$　$(n\geqq 3)$ である。

［解 説］

(1)と(2)が，(3)の漸化式を立式するための誘導となっています。特に，(ii)の場合に注意深さが要求されます。解答例では省きましたが，$a_5=2$ のときも考えて，一般化しています。

46　　　　［名古屋大・文］

(1)　2 個のサイコロを同時に投げたとき，出た目の差の絶対値についてまとめると，右表のようになる。

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

この期待値を E_1 とすると，

$$E_1=0\times\frac{6}{36}+1\times\frac{10}{36}+2\times\frac{8}{36}+3\times\frac{6}{36}+4\times\frac{4}{36}+5\times\frac{2}{36}=\frac{35}{18}$$

(2)　2 個のサイコロを同時に投げたとき，出た目の差の絶対値が 0 以外のときは終了し，(1)と同様に期待値を計算する。

また，出た目の差の絶対値が 0 のときはもう一度だけ投げて終了し，新たに出た目との差の絶対値を考える。この場合，(1)と同様に考えると，期待値は $\frac{1}{6}E_1$ となる。

よって，終了時の出た目の差の絶対値の期待値を E_2 とすると

$$E_2=\left(E_1-0\times\frac{6}{36}\right)+\frac{1}{6}E_1=\frac{7}{6}\cdot\frac{35}{18}=\frac{245}{108}$$

［解 説］

(1)の結果がうまく利用できるように，(2)が構成されています。同じことを繰り返してもよいのですが。

47　　　　［九州大］

(1)　A さんが 5 円硬貨を 3 枚投げたとき，表 3 枚の場合(合計金額 15 円)，表 2 枚で裏 1 枚の場合(合計金額 10 円)，表 1 枚で裏 2 枚の場合(合計金額 5 円)，裏 3 枚の場合(合計金額 0 円)について，その確率は，それぞれ $\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$，${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$，${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$，$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$ である。これをまとめると，右表のようになる。

合計金額	15 円	10 円	5 円	0 円
確率	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

B さんが 5 円硬貨 1 枚と 10 円硬貨を 1 枚を投げたとき，2 枚とも表の場合(合計金額 5 円)，10 円表で 5 円裏の場合(合計金額 10 円)，10 円裏で 5 円表の場合(合計金額 5 円)，2 枚とも裏の場合(合計金額 0 円)について，その確率は，それぞれ $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ ずつである。これをまとめると，右表のようになる。

合計金額	15 円	10 円	5 円	0 円
確率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

以上より，A さんが B さんに勝つ確率 p，引き分けとなる確率 q は，

$$p=\frac{1}{8}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{8}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$$

$$q=\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

(2)　ゲーム終了後，A さんの所持金とその各々の場合の確率は以下のようになる。

(i)　B さんの合計金額が 0 円で A さんが勝った場合（所持金 30 円）

$$\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{7}{32}$$

(ii)　B さんの合計金額が 5 円で A さんが勝った場合（所持金 25 円）

$$\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

(iii) B さんの合計金額が 10 円で A さんが勝った場合（所持金 20 円）

$$\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{32}$$

(iv) 引き分けの場合（所持金 15 円）で，確率は，(1)より $q=\frac{1}{4}$

(v)　A さんの合計金額が 10 円で A さんが負けた場合（所持金 10 円）

$$\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{32}$$

(vi) A さんの合計金額が 5 円で A さんが負けた場合（所持金 5 円）

$$\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$$

(vii) A さんの合計金額が 0 円で A さんが負けた場合（所持金 0 円）

$$\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{32}$$

(i)～(vii)より，ゲーム終了後のAさん所持金の期待値 E は,

$$E=0\times\frac{3}{32}+5\times\frac{3}{16}+10\times\frac{3}{32}+15\times\frac{1}{4}+20\times\frac{1}{32}+25\times\frac{1}{8}+30\times\frac{7}{32}=\frac{255}{16}$$

［解 説］

内容的にはセンターレベルですが，集中力がかなり要求される確率の問題です。また，(2)では，題意を取り違えないように注意しなくてはいけません。