1　［大阪大・文］

自然数 m, n と $0<a<1$ を満たす実数 a を，等式

$$\log_2 6 = m + \frac{1}{n+a}$$

が成り立つようにとる。以下の問いに答えよ。

(1)　自然数 m, n を求めよ。

(2)　不等式 $a>\dfrac{2}{3}$ が成り立つことを示せ。

2　　[京都大・理]

2以上の自然数 n に対し，n と n^2+2 がともに素数になるのは $n=3$ の場合に限ることを示せ。

$\boxed{3}$ ［一橋大］

次の条件(a), (b)をともに満たす直角三角形を考える。ただし，斜辺の長さを p, その他の 2 辺の長さを q, r とする。

(a)　p, q, r は自然数で，そのうちの少なくとも 2 つは素数である。

(b)　$p+q+r=132$

(1)　q, r のどちらかは偶数であることを示せ。

(2)　p, q, r の組をすべて求めよ。

$\boxed{4}$ ［東京大・理］

次の条件を満たす組$(x,\ y,\ z)$を考える。

条件(A)：x, y, zは正の整数で，$x^2+y^2+z^2=xyz$および$x \leqq y \leqq z$を満たす。

以下の問いに答えよ。

(1) 条件(A)を満たす組$(x,\ y,\ z)$で，$y \leqq 3$となるものをすべて求めよ。

(2) 組$(a,\ b,\ c)$が条件(A)を満たすとする。このとき，組$(b,\ c,\ z)$が条件(A)を満たすようなzが存在することを示せ。

(3) 条件(A)を満たす組$(x,\ y,\ z)$は，無数に存在することを示せ。

$\boxed{5}$ ［大阪大・理］

x, y を変数とする。

(1) n を自然数とする。次の等式が成り立つように定数 a, b を定めよ。

$$\frac{n+1}{y(y+1)\cdots(y+n)(y+n+1)}=\frac{a}{y(y+1)\cdots(y+n)}+\frac{b}{(y+1)(y+2)\cdots(y+n+1)}$$

(2) すべての自然数 n について，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{{}_n\mathrm{C}_r}{x+r}$$

$\boxed{6}$ ［千葉大］

n を奇数とする。

(1)　n^2-1 は 8 の倍数であることを証明せよ。

(2)　n^5-n は 3 の倍数であることを証明せよ。

(3)　n^5-n は 120 の倍数であることを証明せよ。

$\boxed{7}$ ［東京大・文］

正の整数の下 2 桁とは，100 の位以上を無視した数をいう。たとえば，2000，12345 の下 2 桁はそれぞれ 0，45 である。m が正の整数全体を動くとき，$5m^4$ の下 2 桁として現れる数をすべて求めよ。

$\boxed{8}$ ［京都大・文］

n を 1 以上の整数とするとき，次の 2 つの命題はそれぞれ正しいか。正しいときは証明し，正しくないときはその理由を述べよ。

命題 p：ある n に対して，$\sqrt{n}$ と $\sqrt{n+1}$ はともに有理数である。

命題 q：すべての n に対して，$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ は無理数である。

$\boxed{9}$　　　［京都大］

p を 3 以上の素数とする。4 個の整数 a, b, c, d が次の 3 条件

$$a+b+c+d=0,\quad ad-bc+p=0,\quad a \geqq b \geqq c \geqq d$$

を満たすとき, a, b, c, d を p を用いて表せ。

10 ［一橋大］

数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$を

$$a_1=2,\quad a_{n+1}=4a_n$$

$$b_1=3,\quad b_{n+1}=b_n+2a_n$$

$$c_1=4,\quad c_{n+1}=\frac{c_n}{4}+a_n+b_n$$

と順に定める。放物線$y=a_nx^2+2b_nx+c_n$をH_nとする。

(1)　H_nはx軸と2点で交わることを示せ。

(2)　H_nとx軸の交点をP_n，Q_nとする。$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k$を求めよ。

11　　［東北大］

n を 2 以上の自然数とし，整式 x^n を $x^2-6x-12$ で割った余りを a_nx+b_n とする。

(1)　a_2，b_2 を求めよ。

(2)　a_{n+1}，b_{n+1} を a_n と b_n を用いて表せ。

(3)　各 n に対して，a_n と b_n の公約数で素数となるものをすべて求めよ。

$\boxed{12}$ ［東京大・理］

n と k を正の整数とし，$P(x)$ を次数が n 以上の整式とする。整式 $(1+x)^k P(x)$ の n 次以下の項の係数がすべて整数ならば，$P(x)$ の n 次以下の項の係数は，すべて整数であることを示せ。ただし，定数項については，項それ自身を係数とみなす。

13　　［神戸大・理］

1 から n までの自然数 $1, 2, 3, \cdots, n$ の和を S とするとき，次の問いに答えよ。

(1) n を 4 で割った余りが 0 または 3 ならば，S が偶数であることを示せ。

(2) S が偶数ならば，n を 4 で割った余りが 0 または 3 であることを示せ。

(3) S が 4 の倍数ならば，n を 8 で割った余りが 0 または 7 であることを示せ。

14　　［千葉大］

以下の問いに答えよ。

(1)　x を有理数とする。$7x^2$ が整数ならば, x は整数であることを示せ。

(2)　a, b を整数とする。a^2-7b^2 が 4 の倍数ならば, a と b はともに偶数であることを示せ。

(3)　r は整数, s は有理数とする。$\left(\frac{r}{2}\right)^2-7s^2$ が整数ならば, s は整数であることを示せ。

$\boxed{15}$ ［広島大・理］

平面上のベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$は，その大きさがともに$\sqrt{2}$であり，なす角が$120°$である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 内積$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$を求めよ。

(2) k, lを整数とするとき，$|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$は偶数であることを示せ。

(3) (2)で，kまたはlが奇数のとき，$|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$は4の倍数ではないことを示せ。

(4) m, nが整数であり，$m=n=0$ではないならば，$|m\vec{a}+n\vec{b}|$は整数ではないことを示せ。

$\boxed{16}$　［東京大・文］

p を自然数とする。次の関係式で定められる数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$を考える。

$$a_1 = p,\ b_1 = p+1$$
$$a_{n+1} = a_n + pb_n,\ b_{n+1} = pa_n + (p+1)b_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，次の 2 つの数がともに p^3 で割り切れることを示せ。

$$a_n - \frac{n(n-1)}{2}p^2 - np,\ b_n - n(n-1)p^2 - np - 1$$

(2)　p を 3 以上の奇数とする。このとき，a_p は p^2 で割り切れるが，p^3 では割り切れないことを示せ。

17　　　　　　　　　　　　　　　　［九州大・文］

放物線$C: y=x^2-1$と$a_1>1$を満たす実数a_1を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　C 上の点$(a_1,\ a_1{}^2-1)$における接線と x 軸との交点の x 座標をa_2とするとき，a_2をa_1を用いて表せ。

(2)　(1)で求めたa_2に対して，C 上の点$(a_2,\ a_2{}^2-1)$おける接線と x 軸との交点の x 座標をa_3とする。この操作を繰り返してできる数列をa_1，a_2，…，a_n，…とする。このとき，すべてのnに対して，$a_n>1$を示せ。

(3)　$b_n=\dfrac{1}{2}(a_n-1)$とおくとき，すべてのnに対して，$b_{n+1}<b_n{}^2$を示せ。

(4)　$a_1=2$のとき，$b_n<10^{-12}$となる n の値を 1 つ求めよ。ただし，必要があれば，$\log_{10}2$を 0.301 として計算してよい。

$\boxed{18}$ ［名古屋大・理］

次の問いに答えよ。

(1)　$3x+2y \leqq 2008$ を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

(2)　$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{6} \leqq 10$ を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数を求めよ。

19　　　　［京都大・文］

p を素数, n を正の整数とするとき, $(p^n)!$ は p で何回割り切れるか。

20　　［一橋大］

2 以上の整数 m, n は $m^3+1^3=n^3+10^3$ を満たす。m, n を求めよ。

21　　［名古屋大・理］

x, y を正の整数とする。

(1)　$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}$ を満たす組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

(2)　p を 3 以上の素数とする。$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{p}$ を満たす組 $(x,\ y)$ のうち，$2x+3y$ を最小にする $(x,\ y)$ を求めよ。

22　　［千葉大］

n を自然数とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　k を $1 \leqq k \leqq n$ を満たす自然数とするとき，

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leqq {}_n\mathrm{C}_k \leqq \frac{n^k}{2^{k-1}}$$

が成り立つことを示せ。ただし ${}_n\mathrm{C}_k$ は二項係数である。

(2)　不等式 $\displaystyle \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{k}\right)^k < 1$ が成り立つことを示せ。

(3)　不等式 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 3$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{23}$　　[東京大・文]

自然数 $m \geqq 2$ に対し，$m-1$ 個の二項係数 ${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ を考え，これらすべての最大公約数を d_m とする。すなわち d_m はこれらすべてを割り切る最大の自然数である。

(1)　m が素数ならば，$d_m = m$ であることを示せ。

(2)　すべての自然数 k に対し，$k^m - k$ が d_m で割り切れることを，k に関する数学的帰納法よって示せ。

$\boxed{24}$ ［金沢大・文］

次の問いに答えよ。

(1) $x>0$ のとき，不等式 $\dfrac{2}{3}\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)\geqq 2^{\frac{1}{3}}$ を示せ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(2) 数列 $\{a_n\}$ を，$a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{2}{3}\left(a_n+\dfrac{1}{{a_n}^2}\right)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定める。

(i) $n\geqq 1$ のとき，$a_n>a_{n+1}>2^{\frac{1}{3}}$ を示せ。

(ii) $n\geqq 2$ のとき，$a_{n+1}-\dfrac{2}{{a_n}^2}<\dfrac{2}{3}\left(a_n-\dfrac{2}{{a_{n-1}}^2}\right)$ を示せ。

(iii) $n\geqq 1$ のとき，$0<a_{n+1}-\dfrac{2}{{a_n}^2}\leqq\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$ を示せ。

$\boxed{25}$　　［神戸大・理］

t を実数として，数列 a_1，a_2，…を

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2t,\ a_{n+1} = 2ta_n - a_{n-1}\quad (n \geqq 2)$$

で定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$t \geqq 1$ ならば，$0 < a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ となることを示せ。

(2)　$t \leqq -1$ ならば，$0 < |a_1| < |a_2| < |a_3| < \cdots$ となることを示せ。

(3)　$-1 < t < 1$ ならば，$t = \cos\theta$ となる θ を用いて，

$$a_n = \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\quad (n \geqq 1)$$

となることを示せ。

26　　［神戸大・理］

p を 3 以上の素数, a, b を自然数とする。以下の問いに答えよ。ただし, 自然数 m, n に対し, mn が p の倍数ならば, m または n は p の倍数であることを用いてよい。

(1)　$a+b$ と ab がともに p の倍数であるとき, a と b はともに p の倍数であることを示せ。

(2)　$a+b$ と a^2+b^2 がともに p の倍数であるとき, a と b はともに p の倍数であることを示せ。

(3)　a^2+b^2 と a^3+b^3 がともに p の倍数であるとき, a と b はともに p の倍数であることを示せ。

27　　［広島大・理］

4 で割ると余りが 1 である自然数全体の集合を A とする。すなわち，

$$A=\{4k+1 \mid k\text{は}0\text{以上の整数}\}$$

とする。次の問いに答えよ。

(1)　x および y が A に属するならば，その積 xy も A に属することを証明せよ。

(2)　0 以上の偶数 m に対して，3^m は A に属することを証明せよ。

(3)　m，n を 0 以上の整数とする。$m+n$ が偶数ならば 3^m7^n は A に属し，$m+n$ が奇数ならば 3^m7^n は A に属さないことを証明せよ。

(4)　m，n を 0 以上の整数とする。$3^{2m+1}7^{2n+1}$ の正の約数のうち A に属する数全体の和を m と n を用いて表せ。

28　　　　［長崎大・医］

4 次方程式の解について，次の問いに答えよ。ただし，下のことは既知としてよい。

自然数 k, l, m が次の条件

(イ)　k と l は 1 以外の公約数をもたない　　(ロ)　k は lm の約数である

を満たすならば, k は m の約数である。

(1)　a, b, c, d は整数で，$d \neq 0$ とする。方程式 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ が有理数の解 r をもつとき，$|r|$ は自然数であり，かつ $|d|$ の約数に限ることを証明せよ。

(2)　方程式 $2x^4-2x-1=0$ の実数解はすべて無理数であることを証明せよ。

29　　［千葉大］

放物線 $y=x^2$ と直線 $y=ax+b$ によって囲まれる領域を

$$D=\{(x,\ y)\mid x^2\leqq y\leqq ax+b\}$$

とし，D の面積が $\frac{9}{2}$ であるとする。座標平面上で，x 座標，y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。

(1)　$a=0$ のとき，D に含まれる格子点の個数を求めよ。

(2)　$a,\ b$ がともに整数であるとき，D に含まれる格子点の個数は，$a,\ b$ の値によらず一定であることを示せ。

$\boxed{30}$ ［一橋大］

0 以上の整数 a_1，a_2 が与えられたとき，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n$$

により定める。

(1)　$a_1=1$，$a_2=2$ のとき，a_{2010} を 10 で割った余りを求めよ。

(2)　$a_2=3a_1$ のとき，$a_{n+4}-a_n$ は 10 の倍数であることを示せ。

31　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［京都大・文］

0 以上の整数を 10 進法で表すとき，次の問いに答えよ。ただし，0 は 0 桁の数と考えることにする。また n は正の整数とする。

(1)　各桁の数が 1 または 2 である n 桁の整数を考える。それらすべての整数の総和を T_n とする。T_n を n を用いて表せ。

(2)　各桁の数が 0，1，2 のいずれかである n 桁以下の整数を考える。それらすべての整数の総和を S_n とする。S_n が T_n の 15 倍以上になるのは，n がいくつ以上のときか。必要があれば，$0.301<\log_{10}2<0.302$ および $0.477<\log_{10}3<0.478$ を用いてもよい。

32　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［名古屋大・理］

a, b は $a \geqq b > 0$ を満たす整数とし，x と y の 2 次方程式

$$x^2 + ax + b = 0, \quad y^2 + by + a = 0$$

がそれぞれ整数解をもつとする。

(1)　$a = b$ とするとき，条件を満たす整数 a をすべて求めよ。

(2)　$a > b$ とするとき，条件を満たす整数の組 (a, b) をすべて求めよ。

33　　［神戸大・理］

$i=\sqrt{-1}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　実数 α，β について，等式

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$$

が成り立つことを示せ。

(2)　自然数 n に対して，$z=\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$ とおくとき，等式

$$z\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)=z$$

が成り立つことを示せ。

(3)　2 以上の自然数 n について，等式

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{n}=\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k\pi}{n}=0$$

が成り立つことを示せ。

$\boxed{34}$ ［岡山大・文］

数列$\{a_n\}$が次のように帰納的に定められている。

$$a_1=0,\ a_{n+1}=\begin{cases}2a_n & (n\text{が奇数のとき})\\ a_n+1 & (n\text{が偶数のとき})\end{cases}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　a_{10} を求めよ。

(2)　n が奇数の場合と偶数の場合それぞれについて，a_{n+4} を a_n で表せ。

(3)　a_n を 3 で割ったときの余りを求めよ。

35　［京都大・理］

n は 2 以上の整数であり，$\dfrac{1}{2}<a_j<1$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ であるとき，不等式

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)>1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{2^{n-1}}\right)$$

が成立することを示せ。

36　［東京大・理］

実数 x の小数部分を，$0 \leqq y < 1$ かつ $x-y$ が整数となる実数 y のこととし，これを記号 $\langle x \rangle$ で表す。実数 a に対して，無限数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を次のように順次定める。

(i)　$a_1 = \langle a \rangle$

(ii)　$\begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = \left\langle \dfrac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n = 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = 0 \end{cases}$

(1)　$a=\sqrt{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ を求めよ。

(2)　任意の自然数 n に対して $a_n = a$ となるような $\dfrac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ。

(3)　a が有理数であるとする。a を整数 p と自然数 q を用いて $a=\dfrac{p}{q}$ と表すとき，q 以上のすべての自然数 n に対して，$a_n = 0$ であることを示せ。

37　　　　［東京工大］

実数 a に対して，a を超えない最大の整数を $[\,a\,]$ で表す。10000 以下の正の整数 n で $[\,\sqrt{n}\,]$ が n の約数となるものは何個あるか。

38　　［一橋大］

1 つの角が120°の三角形がある。この三角形の 3 辺の長さ x, y, z は $x<y<z$ を満たす整数である。

(1)　$x+y-z=2$ を満たす x, y, z の組をすべて求めよ。

(2)　$x+y-z=3$ を満たす x, y, z の組をすべて求めよ。

(3)　a, b を 0 以上の整数とする。$x+y-z=2^a3^b$ を満たす x, y, z の組の個数を a と b の式で表せ。

39　［千葉大・医］

すべての項が整数である数列を整数列という。p, q, r, s を実数とし，正の整数 n に対し，

$$a_n = p + qn + rn^2,\quad b_n = p + qn + rn^2 + sn^3$$

とおく。このとき以下の命題を示せ。

(1)　数列 $\{a_n\}$ が整数列ならば，$2r$ は整数である。

(2)　数列 $\{b_n\}$ が整数列であるための必要十分条件は，p と $q+r+s$ と $2r$ と $6s$ がいずれも整数となることである。

$\boxed{40}$ ［京都大・理］

(1)　$\sqrt[3]{2}$ が無理数であることを証明せよ。

(2)　$P(x)$ は有理数を係数とする x の多項式で，$P(\sqrt[3]{2})=0$ を満たしているとする。このとき $P(x)$ は x^3-2 で割り切れることを証明せよ。

$\boxed{41}$　［東京大・理］

n を 2 以上の整数とする。自然数（1 以上の整数）の n 乗になる数を n 乗数と呼ぶことにする。以下の問いに答えよ。

(1)　連続する 2 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ。

(2)　連続する n 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ。

42　　［熊本大・医］

$n \geqq 4$ とする。$(n-4)$ 個の 1 と 4 個の -1 からなる数列 a_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　このような数列 $\{a_k\}$ は何通りあるか求めよ。

(2)　数列 $\{a_k\}$ の初項から第 k 項までの積を $b_k = a_1 a_2 \cdots a_k$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ とおく。$b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ がとり得る値の最大値および最小値を求めよ。

(3)　$b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ の最大値および最小値を与える数列 $\{a_k\}$ はそれぞれ何通りあるか求めよ。

43　　　　［岡山大・理］

$f(x)=4x(1-x)$ とする。このとき

$$f_1(x)=f(x),\quad f_{n+1}(x)=f_n(f(x))\quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

によって定まる多項式 $f_n(x)$ について以下の問いに答えよ。

(1)　方程式 $f_2(x)=0$ を解け。

(2)　$0 \leqq t < 1$ を満たす定数 t に対し，方程式 $f(x)=t$ の解を $\alpha(t)$，$\beta(t)$ とする。c が $0 \leqq c < 1$ かつ $f_n(c)=0$ を満たすとき，$\alpha(c)$，$\beta(c)$ は $f_{n+1}(x)=0$ の解であることを示せ。

(3)　$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲での方程式 $f_n(x)=0$ の異なる解の個数を S_n とする。このとき S_{n+1} を S_n で表し，一般項 S_n を求めよ。

$\boxed{44}$　　［大阪大・理］

4 個の整数 $n+1$，n^3+3，n^5+5，n^7+7 がすべて素数となるような正の整数 n は存在しない。これを証明せよ。

$\boxed{45}$ ［千葉大］

整数 p，q $(p \geqq q \geqq 0)$ に対して 2 項係数を ${}_p\mathrm{C}_q = \dfrac{p!}{q!(p-q)!}$ と定める。なお，$0!=1$ とする。

(1)　n，k が 0 以上の整数のとき，${}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1} \times \left(\dfrac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k} - \dfrac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k} \right)$ を計算し，n によらない値になることを示せ。

(2)　m が 3 以上の整数のとき，和 $\dfrac{1}{{}_3\mathrm{C}_3} + \dfrac{1}{{}_4\mathrm{C}_3} + \dfrac{1}{{}_5\mathrm{C}_3} + \cdots + \dfrac{1}{{}_m\mathrm{C}_3}$ を求めよ。

46　　［京都大・文］

n と k を自然数とし，整式 x^n を整式 $(x-k)(x-k-1)$ で割った余りを $ax+b$ とする。

(1)　a と b は整数であることを示せ。

(2)　a と b をともに割り切る素数は存在しないことを示せ。

47　　［京都大・理］

n を自然数とし，整式 x^n を整式 x^2-2x-1 で割った余りを $ax+b$ とする。このとき a と b は整数であり，さらにそれらをともに割り切る素数は存在しないことを示せ。

$\boxed{\mathbf{48}}$　［筑波大・理］

3つの数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$が

$$a_{n+1}=-b_n-c_n\,,\ b_{n+1}=-c_n-a_n\,,\ c_{n+1}=-a_n-b_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

および$a_1=a$，$b_1=b$，$c_1=c$を満たすとする。ただし，a, b, cは定数とする。

(1)　$p_n=a_n+b_n+c_n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$で与えられる数列$\{p_n\}$の初項から第 n 項までの和S_nを求めよ。

(2)　数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$の一般項を求めよ。

(3)　$q_n=(-1)^n\{(a_n)^2+(b_n)^2+(c_n)^2\}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$で与えられる数列$\{q_n\}$の初項から第 $2n$ 項までの和をT_nとする。$a+b+c$が奇数であれば，すべての自然数 n に対してT_nが正の奇数であることを数学的帰納法を用いて示せ。

49　　［京都大・理］

N を 2 以上の自然数とし，a_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を次の性質(i)，(ii)を満たす数列とする。

(i)　$a_1 = 2^N - 3$

(ii)　$n=1,\ 2,\ \cdots$ に対して，

a_n が偶数のとき $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2}$，a_n が奇数のとき $a_{n+1} = \dfrac{a_n - 1}{2}$

このとき，どのような自然数 M に対しても

$$\sum_{n=1}^{M} a_n \leqq 2^{N+1} - N - 5$$

が成り立つことを示せ。

50 ［名古屋大・理］

k, m, n は整数とし，$n \geqq 1$ とする。${}_m\mathrm{C}_k$ を二項係数として，$S_k(n)$，$T_m(n)$ を以下のように定める。

$$S_k(n)=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k,\ \ S_k(1)=1\ (k \geqq 0)$$

$$T_m(n)={}_m\mathrm{C}_1 S_1(n)+{}_m\mathrm{C}_2 S_2(n)+{}_m\mathrm{C}_3 S_3(n)+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1} S_{m-1}(n)$$

$$=\sum_{k=1}^{m-1} {}_m\mathrm{C}_k S_k(n)\quad (m \geqq 2)$$

(1)　$T_m(1)$ と $T_m(2)$ を求めよ。

(2)　一般の n に対して $T_m(n)$ を求めよ。

(3)　p が 3 以上の素数のとき，$S_k(p-1)$　$(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ p-2)$ は p の倍数であることを示せ。

51　　［神戸大］

$m, n\,(m<n)$ を自然数とし，$a=n^2-m^2$，$b=2mn$，$c=n^2+m^2$ とおく。3 辺の長さが a, b, c である三角形の内接円の半径を r とし，その三角形の面積を S とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$a^2+b^2=c^2$ を示せ。

(2)　r を m, n を用いて表せ。

(3)　r が素数のときに，S を r を用いて表せ。

(4)　r が素数のときに，S が 6 で割り切れることを示せ。

$\boxed{52}$ ［九州大］

次の問いに答えよ。

(1) 任意の自然数 a に対し，a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 であることを証明せよ。

(2) 自然数 a, b, c が $a^2+b^2=3c^2$ を満たすと仮定すると, a, b, c はすべて 3 で割り切れなければならないことを証明せよ。

(3) $a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 a, b, c は存在しないことを証明せよ。

$\boxed{53}$ ［一橋大］

$a-b-8$ と $b-c-8$ が素数となるような素数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。

54　　［京都大・理］

自然数 a, b はどちらも 3 で割り切れないが，a^3+b^3 は 81 で割り切れる。このような a, b の組 $(a,\ b)$ のうち，a^2+b^2 の値を最小にするものと，そのときの a^2+b^2 の値を求めよ。

$\boxed{55}$　［金沢大・理］

自然数が 1 つずつ書かれている玉が,

① ① ② ① ② ③ ① ② ③ ④ ① ② ③ ④ ⑤ ① ② ……

のように 1 列に並べられている。次の問いに答えよ。

(1) 数 100 が書かれた玉が最初に現れるのは何番目か。

(2) 自然数 n に対し，$2n^2$ 番目の玉に書かれている数は何か。

(3) 1 番目から $2n^2$ 番目までの玉をすべて袋に入れた。この袋から 2 つの玉を取り出すとき，同じ数が書かれた玉を取り出す確率を求めよ。

$\boxed{56}$ ［東京大・理］

r を 0 以上の整数とし，数列$\{a_n\}$を次のように定める。

$$a_1=r\,,\ a_2=r+1\,,\ a_{n+2}=a_{n+1}(a_n+1)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

また，素数 p を 1 つとり，a_n を p で割った余りを b_n とする。ただし，0 を p で割った余りは 0 とする。

(1)　自然数 n に対し，b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致することを示せ。

(2)　$r=2$，$p=17$ の場合に，10 以下のすべての自然数 n に対して，b_n を求めよ。

(3)　ある 2 つの相異なる自然数 n, m に対して，

$$b_{n+1}=b_{m+1}>0\,,\ b_{n+2}=b_{m+2}$$

が成り立ったとする。このとき，$b_n=b_m$ が成り立つことを示せ。

(4)　a_2，a_3，a_4，$\cdots$に p で割り切れる数が現れないとする。このとき，a_1 も p で割り切れないことを示せ。