1　　　　［大阪大・文］

(1) $0<a<1$ より，$n<n+a<n+1$ となり，

$$0<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n+a}<\frac{1}{n}<1$$

すると，$\log_2 6=m+\dfrac{1}{n+a}$ から, m は $\log_2 6$ の整数部分である。

ここで，$\log_2 2^2<\log_2 6<\log_2 2^3$ から $2<\log_2 6<3$ となることより，

$$m=2$$

このとき，$\log_2 6-2=\dfrac{1}{n+a}$ から，

$$\log_2\frac{3}{2}=\frac{1}{n+a},\quad n+a=\frac{1}{\log_2\frac{3}{2}}=\log_{\frac{3}{2}}2$$

すると, $0<a<1$ から, n は $\log_{\frac{3}{2}}2$ の整数部分である。

そこで，$\log_{\frac{3}{2}}\dfrac{3}{2}<\log_{\frac{3}{2}}2<\log_{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$ から $1<\log_{\frac{3}{2}}2<2$ となることより，

$$n=1$$

(2) (1)から，$a=\log_{\frac{3}{2}}2-1=\log_{\frac{3}{2}}\dfrac{4}{3}$ ………①

ここで，$2^2\cdot 4^3>3^5$ より，$\left(\dfrac{4}{3}\right)^3>\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$，$\dfrac{4}{3}>\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ ………②

①②より，$a>\log_{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}=\dfrac{2}{3}$ である。

［解 説］

対数の値を評価する問題です。結論を見据えながら式変形を行います。たとえば, 不等式 $2^2\cdot 4^3>3^5$ はその 1 例です。

2　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［京都大・理］

(i)　$n=2$ のとき

$n^2+2=6$ となり，n^2+2 は素数ではない。

(ii)　$n=3$ のとき

$n^2+2=11$ となり，n と n^2+2 はともに素数である。

(iii)　$n \geqq 5$ のとき

n は素数なので，2 の倍数でなく，しかも 3 の倍数でもないことより，k を自然数として，$n=6k\pm1$ と表すことができる。このとき，

$$n^2+2=(6k\pm1)^2+2=36k^2\pm12k+3=3(12k^2\pm4k+1)$$

すると，$12k^2\pm4k+1$ は整数なので，n^2+2 は 3 の倍数となり，素数ではない。

(i)～(iii)より，n と n^2+2 がともに素数になるのは，$n=3$ の場合のみである。

［解 説］

まず，$n=2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13$ として n^2+2 を計算したところ，n が 5 以上のとき，n^2+2 は 3 の倍数になると推測できました。これを，式を用いて確認した解です。

3　　　　［一橋大］

(1)　三平方の定理より，$p^2=q^2+r^2$ ………①

また，条件(b)より，$p+q+r=132$ ………②

②より $p=132-q-r$ として，①に代入すると，

$$(132-q-r)^2=(q+r)^2-2qr\,,\ 66\times132-132(q+r)=-qr$$

よって，qr は偶数となることより, q, r のどちらかは偶数である。

(2)　まず, q が偶数のときを考える。

(i)　$q=2$ のとき　①より，$p^2-r^2=4$，$(p+r)(p-r)=4$

②から $p+r=130$ より，$130(p-r)=4$ となる。

これを満たす自然数 p, r は存在しない。

(ii)　$q\neq2$ のとき　条件(a)より p, r はともに素数になる。

①より，$r^2=(p+q)(p-q)$

r は素数で，しかも①から $p>r$，$p>q$ なので，$p-q=1$ ……③となり，

$$r^2=p+q\ \text{………④}$$

条件(b)より，$p+q=132-r$ ………⑤

④⑤より，$r^2+r-132=0$，$(r-11)(r+12)=0$

したがって，$r=11$ となり，④より $p+q=121$ から，③と合わせて，

$$p=61\,,\ q=60$$

次に, r が偶数のときを考えると，同様にして，

$$q=11\,,\ p=61\,,\ r=60$$

以上より，$(p,\ q,\ r)=(61,\ 60,\ 11)$，$(61,\ 11,\ 60)$

［解 説］

(1)では，いろいろな解法が考えられますが，不要な文字 p を消去する方法を採りました。また，(2)では，素数が絡む問題でよく利用する「2 以外の素数は奇数」という事実を用いています。

4　　［東京大・理］

(1)　$x^2+y^2+z^2=xyz$　$(1\leqq x\leqq y\leqq z)$ ……①において, $y\leqq 3$ より, $y=1,\ 2,\ 3$

(i)　$y=1$ のとき　$x=1$ より, $1+1+z^2=z$, $z^2-z+2=0$

$D=1-8=-7<0$ より解なし。

(ii)　$y=2$ のとき　$x^2+4+z^2=2xz$, $z^2-2xz+x^2+4=0$

$x=1,\ 2$ のいずれの場合も, $D/4=x^2-(x^2+4)=-4<0$ より解なし。

(iii)　$y=3$ のとき　$x^2+9+z^2=3xz$, $z^2-3xz+x^2+9=0$

このとき, $1\leqq x\leqq 3$ かつ $D=9x^2-4(x^2+9)=5x^2-36\geqq 0$ から, $x=3$ となり,

$$z^2-9z+18=0,\ (z-3)(z-6)=0,\ z=3,\ 6$$

(i)〜(iii)より, $(x,\ y,\ z)=(3,\ 3,\ 3)$, $(3,\ 3,\ 6)$

(2)　$(x,\ y,\ z)=(a,\ b,\ c)$ が①を満たすので,

$$a^2+b^2+c^2=abc\quad(1\leqq a\leqq b\leqq c)\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで, $z=-a+bc$ とすると, z は整数で,

$$b^2+c^2+z^2-bcz=b^2+c^2+(-a+bc)^2-bc(-a+bc)$$
$$=a^2+b^2+c^2-abc=0$$

(1)より, $b\geqq 3$ であり,

$$z-c=-a+bc-c=c(b-1)-a\geqq 2c-a=c+(c-a)>0$$

よって, $b^2+c^2+z^2=bcz$　$(1\leqq b\leqq c\leqq z)$ となる整数 z が存在する。

(3)　数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ を, 次の漸化式で定義する。

$$a_1=3,\ b_1=3,\ c_1=3$$
$$a_{n+1}=b_n,\ b_{n+1}=c_n,\ c_{n+1}=-a_n+b_nc_n\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

すると, (2)より, すべての自然数 n に対して,

$$a_n{}^2+b_n{}^2+c_n{}^2=a_nb_nc_n\quad(1\leqq a_n\leqq b_n\leqq c_n)$$

さらに, $c_{n+1}-c_n=-a_n+b_nc_n-c_n\geqq 2c_n-a_n>0$ から, すべての $(a_n,\ b_n,\ c_n)$ は異なるので, ①を満たす組 $(x,\ y,\ z)$ は, 無数に存在する。

［解　説］

(1)と(2)の誘導によって, (3)の証明がスムーズに行えます。なお, (1)については, 最初, すべての場合をチェックしましたが, 解なしのケースがほとんどなので, 作り直した解です。また, (2)では, z を $z=-a+bc$ として設定していますが, これは②と $b^2+c^2+z^2=bcz$ の両辺の差をとって見つけています。

5　　［大阪大・理］

(1) 条件より，$n+1=a(y+n+1)+by$，$n+1=(a+b)y+a(n+1)$

任意の y に対して成立する条件は，$a+b=0$，$a(n+1)=n+1$ となり，

$a=1$，$b=-1$

(2) $\dfrac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}=\displaystyle\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\dfrac{{}_n\mathrm{C}_r}{x+r}$ ……①の成立を数学的帰納法で証明する。

(i) $n=1$ のとき

①の左辺$=\dfrac{1}{x(x+1)}$，①の右辺$=\dfrac{{}_1\mathrm{C}_0}{x}-\dfrac{{}_1\mathrm{C}_1}{x+1}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{x(x+1)}$

よって，$n=1$ のとき成立する。

(ii) $n=k$ のとき

$\dfrac{k!}{x(x+1)\cdots(x+k)}=\displaystyle\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\dfrac{{}_k\mathrm{C}_r}{x+r}$ ……②の成立を仮定する。

ここで，$(k+1)!=(k+1)k!$ を用いると，(1)および②より，

$$\begin{aligned}\frac{(k+1)!}{x(x+1)\cdots(x+k+1)}&=\frac{k!}{x(x+1)\cdots(x+k)}-\frac{k!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+k+1)}\\&=\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\frac{{}_k\mathrm{C}_r}{x+r}-\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\frac{{}_k\mathrm{C}_r}{x+1+r}\ \cdots\cdots\cdots③\end{aligned}$$

さて，いったん $r+1=s$ とおきかえると，

$$\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\frac{{}_k\mathrm{C}_r}{x+1+r}=\sum_{s=1}^{k+1}(-1)^{s-1}\frac{{}_k\mathrm{C}_{s-1}}{x+s}=-\sum_{r=1}^{k+1}(-1)^r\frac{{}_k\mathrm{C}_{r-1}}{x+r}\ \cdots\cdots\cdots④$$

③④より，

$$\begin{aligned}\frac{(k+1)!}{x(x+1)\cdots(x+k+1)}&=\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\frac{{}_k\mathrm{C}_r}{x+r}+\sum_{r=1}^{k+1}(-1)^r\frac{{}_k\mathrm{C}_{r-1}}{x+r}\\&=\frac{{}_k\mathrm{C}_0}{x}+\sum_{r=1}^{k}(-1)^r\frac{{}_k\mathrm{C}_r+{}_k\mathrm{C}_{r-1}}{x+r}+(-1)^{k+1}\frac{{}_k\mathrm{C}_k}{x+k+1}\\&=\frac{1}{x}+\sum_{r=1}^{k}(-1)^r\frac{{}_{k+1}\mathrm{C}_r}{x+r}+(-1)^{k+1}\frac{1}{x+k+1}\\&=\sum_{r=0}^{k+1}(-1)^r\frac{{}_{k+1}\mathrm{C}_r}{x+r}\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のとき，①は成立する。

(i)(ii)より，すべての自然数 n について，①は成立する。

［解 説］

数学的帰納法による証明において，式変形を進めると，(1)の恒等式だけでなく，二項係数の関係 ${}_k\mathrm{C}_r+{}_k\mathrm{C}_{r-1}={}_{k+1}\mathrm{C}_r$ を利用するという方針が見えてきます。

$\boxed{6}$ ［千葉大］

(1)　$n^2-1=(n-1)(n+1)$ より, n が奇数のとき，$n-1$，$n+1$ は連続する偶数となり，一方は 4 の倍数，もう一方は 4 の倍数でない偶数である。

よって，n^2-1 は 8 の倍数である。

(2)　$n^5-n=(n-1)n(n+1)(n^2+1)$ より，$n-1$，n，$n+1$ は連続する 3 つの整数なので，いずれか 1 つは 3 の倍数である。

よって，n^5-n は 3 の倍数である。

(3)　$n^5-n=(n-1)n(n+1)(n^2+1)=(n-1)n(n+1)(n^2-4+5)$

$$=(n-1)n(n+1)\{(n+2)(n-2)+5\}$$

$$=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)+5(n-1)n(n+1)$$

これより，$n-2$，$n-1$，n，$n+1$，$n+2$ は連続する 5 つの整数なので，いずれか 1 つは 5 の倍数である。また，$5(n-1)n(n+1)$ は 5 の倍数である。

よって，n^5-n は 5 の倍数となる。

そこで, (1)から $n^5-n=(n^2-1)n(n^2+1)$ は 8 の倍数, (2)から n^5-n は 3 の倍数であることを考え合わせると, 8, 3, 5 が互いに素より，n^5-n は $8\times3\times5=120$ の倍数となる。

［解 説］

(3)では, n を 5 で割った余りで場合分けをする解法もあります。しかし，記述量が多くなるため, (2)をヒントに式変形を考えたのが上の解です。

7　　[東京大・文]

a を 0 以上の整数, b を 0 以上 9 以下の整数とし，$m=10a+b$ とおくと，

$$\begin{aligned}5m^4 &= 5(10a+b)^4\\ &= 5(10^4a^4+4\cdot10^3a^3b+6\cdot10^2a^2b^2+4\cdot10ab^3+b^4)\\ &= 10^2(500a^4+200a^3b+30a^2b^2+2ab^3)+5b^4\end{aligned}$$

これより，$5m^4$ の下 2 桁の数は $5b^4$ の下 2 桁の数と一致する。

そこで，b のそれぞれの値に対して，$5b^4$ の下 2 桁の数を計算すると，右表のようになる。

b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b^4 の下 2 桁	0	1	16	81	56	25	96	1	96	61
$5b^4$ の下 2 桁	0	5	80	5	80	25	80	5	80	5

以上より，$5m^4$ の下 2 桁は 0, 5, 25, 80 である。

[解 説]

整数 m を $m=10a+b$ とおくことがすべてといっても，過言ではありません。

8　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［京都大・文］

[1]　命題 p について

自然数 n に対し，$\sqrt{n}$ が有理数のとき, p, q を互いに素である自然数として,

$$\sqrt{n}=\frac{q}{p},\ \ n=\frac{q^2}{p^2}$$

p^2，q^2 も互いに素であるので，$p^2=1$，すなわち $p=1$ である。

よって，$\sqrt{n}$ が有理数のとき，$\sqrt{n}$ は自然数である。

さて，$\sqrt{n}$ と $\sqrt{n+1}$ がともに有理数，すなわち整数と仮定すると,

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<1$$

これは，$\sqrt{n}$ と $\sqrt{n+1}$ がともに整数であることに反する。

よって，命題 p は正しくない。

[2]　命題 q について

[1]から，すべての n に対して，$\sqrt{n}$ と $\sqrt{n+1}$ の少なくとも一方は無理数である。

(i)　$\sqrt{n}$，$\sqrt{n+1}$ の一方が有理数，もう一方が無理数のとき

このとき，$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ は無理数となる。

(ii)　$\sqrt{n}$，$\sqrt{n+1}$ のともに無理数のとき

$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ が有理数と仮定すると, r, s を互いに素である自然数として,

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{s}{r},\ \ \sqrt{n+1}=\sqrt{n}+\frac{s}{r}$$

両辺を 2 乗して,

$$n+1=n+\frac{2s}{r}\sqrt{n}+\frac{s^2}{r^2},\ \ \sqrt{n}=\frac{s}{2r}-\frac{r}{2s}$$

すると，左辺は無理数，右辺は有理数となり成立しない。

よって，$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ は無理数である。

(i)(ii)より，命題 q は正しい。

［解 説］

どこかで出合ったことがあると感じる問題です。結論の予測が正しければ，背理法を利用するだけで，その根拠が説明できます。

$\boxed{9}$　　［京都大］

まず，$a+b+c+d=0$ ……①，$ad-bc+p=0$ ……②より，

$$a(-a-b-c)-bc+p=0,\quad a^2+ab+ac+bc=p$$

変形して，$(a+b)(a+c)=p$ ………③

ここで，$a \geqq b \geqq c \geqq d$ ……④より，$a+b \geqq a+c$

①④より，$0=a+b+c+d \leqq a+b+a+b=2(a+b)$ から，$a+b \geqq 0$

よって, p は素数なので，③から，

$$a+b=p \text{ ………⑤},\quad a+c=1 \text{ ………⑥}$$

⑤より $b=p-a$ ……⑤′，⑥より $c=1-a$ ……⑥′

①から，$d=-a-(p-a)-(1-a)=-p-1+a$ ………⑦

⑤′⑥′⑦を④に代入すると，$a \geqq p-a \geqq 1-a \geqq -p-1+a$ となり，

$$a \geqq p-a \text{ ………⑧},\quad p-a \geqq 1-a \text{ ………⑨},\quad 1-a \geqq -p-1+a \text{ ………⑩}$$

⑧より $a \geqq \dfrac{p}{2}$，⑩より $a \leqq \dfrac{p}{2}+1$ となり，$\dfrac{p}{2} \leqq a \leqq \dfrac{p}{2}+1$ ………⑪

また，⑨は $p \geqq 1$ となり成立する。

そこで, p は 3 以上の素数，すなわち奇数であることを用いると，⑪から，

$$a=\frac{p+1}{2}$$

すると，⑤′⑥′⑦から，

$$b=p-\frac{p+1}{2}=\frac{p-1}{2},\quad c=1-\frac{p+1}{2}=\frac{-p+1}{2},\quad d=-p-1+\frac{p+1}{2}=\frac{-p-1}{2}$$

［解 説］

京大らしい味わい深い整数問題です。不等式によって値が定まりますが，そのポイントは, 2 以外の素数は奇数という事実です。

10　　　　［一橋大］

(1) 放物線 $H_n : y = a_n x^2 + 2b_n x + c_n$ と x 軸との共有点は,

$$a_n x^2 + 2b_n x + c_n = 0 \cdots\cdots\cdots ①$$

①の判別式を D_n とし，さらに $\dfrac{D_n}{4} = D_n'$ とおく。

条件から，$a_{n+1} = 4a_n \cdots\cdots ②$，$b_{n+1} = b_n + 2a_n \cdots\cdots ③$，$c_{n+1} = \dfrac{c_n}{4} + a_n + b_n \cdots\cdots ④$

ここで，②③④より，

$$\begin{aligned} D_n' &= {b_n}^2 - a_n c_n = (b_{n-1} + 2a_{n-1})^2 - 4a_{n-1}\left(\frac{c_{n-1}}{4} + a_{n-1} + b_{n-1}\right) \\ &= {b_{n-1}}^2 + 4a_{n-1}b_{n-1} + 4{a_{n-1}}^2 - a_{n-1}c_{n-1} - 4{a_{n-1}}^2 - 4a_{n-1}b_{n-1} \\ &= {b_{n-1}}^2 - a_{n-1}c_{n-1} = D_{n-1}' \end{aligned}$$

すると，$a_1 = 2$，$b_1 = 3$，$c_1 = 4$ から，

$$D_n' = D_1' = {b_1}^2 - a_1 c_1 = 3^2 - 2\times 4 = 1 > 0$$

よって，H_n は x 軸と 2 点で交わる。

(2) ①の解は，$x = \dfrac{-b_n \pm \sqrt{D_n'}}{a_n} = \dfrac{-b_n \pm 1}{a_n}$ なので，

$$\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n = \frac{-b_n + 1}{a_n} - \frac{-b_n - 1}{a_n} = \frac{2}{a_n}$$

②より，$a_n = 2\cdot 4^{n-1}$ となり，

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{2\cdot 4^{k-1}} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} = \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$$

［解 説］

まず，一般項 a_n，b_n は簡単に求まりますが，c_n を求めるには，計算に時間がかかりそうです。そこで，方向転換をしたのが上記の解です。

11　　　　［東北大］

(1)　x^2 を $x^2-6x-12$ で割ると，$x^2=(x^2-6x-12)\cdot 1+(6x+12)$ より，

$$a_2=6,\ b_2=12$$

(2)　x^n を $x^2-6x-12$ で割った商を $q_n(x)$ とおくと，条件より，

$$x^n=(x^2-6x-12)q_n(x)+(a_nx+b_n)$$

すると，
$$\begin{aligned}x^{n+1}&=x(x^2-6x-12)q_n(x)+(a_nx^2+b_nx)\\&=x(x^2-6x-12)q_n(x)+a_n\left\{(x^2-6x-12)+(6x+12)\right\}+b_nx\\&=(x^2-6x-12)\{xq_n(x)+a_n\}+(6a_n+b_n)x+12a_n\end{aligned}$$

ここで，x^{n+1} を $x^2-6x-12$ で割った余りが $a_{n+1}x+b_{n+1}$ より，

$$a_{n+1}=6a_n+b_n,\ b_{n+1}=12a_n\cdots\cdots\cdots(*)$$

(3)　(1)より $a_2=6$，$b_2=12$ なので，(＊)から，帰納的に a_n と b_n はともに 6 の倍数であり，素数の公約数として, 2 と 3 をもつ。

さて，a_n と b_n が 5 以上の素数 m を公約数としてもつとき, k, l を整数として，

$$a_n=m\cdot k,\ b_n=m\cdot l$$

(＊)から，$6a_{n-1}+b_{n-1}=m\cdot k$，$12a_{n-1}=m\cdot l$

$$2^2\cdot 3a_{n-1}=m\cdot l,\ 2b_{n-1}=m(2k-l)$$

$m\geqq 5$ より，a_{n-1} と b_{n-1} は素数 m を公約数としてもつ。

すると，帰納的に，a_2 と b_2 は素数 m を公約数としてもつことになるが，これは $a_2=6$，$b_2=12$ に反する。

以上より，a_n と b_n の公約数で素数となるものは 2 と 3 のみである。

［解 説］

(3)では，記述はしていませんが，a_3 と b_3 も計算をして結論を推測しています。その後，簡略に書きましたが，帰納法を用いて証明をしています。

$\boxed{12}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大・理］

まず，$(1+x)^k$ を二項展開すると，

$$(1+x)^k = {}_k\mathrm{C}_0 + {}_k\mathrm{C}_1 x + {}_k\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + {}_k\mathrm{C}_k x^k = 1 + {}_k\mathrm{C}_1 x + {}_k\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + x^k$$

また, $m \geqq n$ として，整式 $P(x)$ の次数を m とおき，

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots + a_m x^m$$

これより，$(1+x)^k P(x)$ は, $m+k$ 次の整式となり，

$$(1+x)^k P(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots + b_{m+k} x^{m+k}$$

係数を比べると，

$$b_0 = a_0,\ b_1 = a_1 + a_0\,{}_k\mathrm{C}_1,\ b_2 = a_2 + a_1\,{}_k\mathrm{C}_1 + a_0\,{}_k\mathrm{C}_2,\ \cdots\cdots,$$

$$b_n = a_n + a_{n-1}\,{}_k\mathrm{C}_1 + a_{n-2}\,{}_k\mathrm{C}_2 + \cdots + a_0\,{}_k\mathrm{C}_n \cdots\cdots\cdots(*)$$

ただし, $k < i$ のとき ${}_k\mathrm{C}_i = 0$ とする。

ここで，$(1+x)^k P(x)$ の n 次以下の項の係数 b_0，b_1，b_2，…，b_n がすべて整数であるとき, (*)より，

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1 - a_0\,{}_k\mathrm{C}_1,\ a_2 = b_2 - a_1\,{}_k\mathrm{C}_1 - a_0\,{}_k\mathrm{C}_2,\ \cdots\cdots,$$

$$a_n = b_n - a_{n-1}\,{}_k\mathrm{C}_1 - a_{n-2}\,{}_k\mathrm{C}_2 - \cdots - a_0\,{}_k\mathrm{C}_n$$

これより，a_0，a_1，a_2，…，a_n はすべて整数となる。

よって，$P(x)$ の n 次以下の項の係数はすべて整数である。

［解 説］

上の解では簡単に記していますが，証明の構図は「a_0 が整数→a_1 が整数→a_2 が整数→ … →a_n が整数」です。

13　　　　［神戸大・理］

(1)　まず，$S=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$である。

さて，kを0以上の整数として，nを4で割った余りで分類する。

(i)　nを4で割った余りが0のとき　$n=4k+4$と表すと，

$$S=\frac{1}{2}(4k+4)(4k+5)=2(k+1)(4k+5)$$

(ii)　nを4で割った余りが3のとき　$n=4k+3$と表すと，

$$S=\frac{1}{2}(4k+3)(4k+4)=2(k+1)(4k+3)$$

(i)(ii)より，Sは偶数である。

(2)　(iii)　nを4で割った余りが1のとき　$n=4k+1$と表すと，

$$S=\frac{1}{2}(4k+1)(4k+2)=(4k+1)(2k+1)$$

(iv)　nを4で割った余りが2のとき　$n=4k+2$と表すと，

$$S=\frac{1}{2}(4k+2)(4k+3)=(2k+1)(4k+3)$$

(iii)(iv)より，Sはいずれも奇数である。

よって，(1)と合わせ，Sが偶数ならば，nを4で割った余りは0または3である。

(3)　Sが4の倍数ならば，(2)より，nを4で割った余りは0または3となるので，nを8で割った余りは0, 3, 4, 7のいずれかである。

(i)　nを8で割った余りが0のとき　$n=8k+8$と表すと，

$$S=\frac{1}{2}(8k+8)(8k+9)=4(k+1)(8k+9)$$

(ii)　nを8で割った余りが3のとき　$n=8k+3$と表すと，

$$S=\frac{1}{2}(8k+3)(8k+4)=2(8k+3)(2k+1)$$

$(8k+3)(2k+1)$は奇数より，Sは4の倍数ではない。

(iii)　nを8で割った余りが4のとき　$n=8k+4$と表すと，

$$S=\frac{1}{2}(8k+4)(8k+5)=2(8k+5)(2k+1)$$

$(8k+5)(2k+1)$は奇数より，Sは4の倍数ではない。

(iv)　nを8で割った余りが7のとき　$n=8k+7$と表すと，

$$S=\frac{1}{2}(8k+7)(8k+8)=4(k+1)(8k+7)$$

(i)～(iv)より，Sが4の倍数ならば，nを8で割った余りが0または7である。

［解　説］

余りで整数を分類するタイプの証明問題です。(2)は，(1)の逆の証明ですが，転換法を意識して記述しています。(3)は(2)が誘導です。

14　　　　［千葉大］

(1)　x は有理数より, $p(>0)$, q を互いに素な整数として, $x=\dfrac{q}{p}$ とおくことができ,

$$7x^2=\frac{7q^2}{p^2}$$

条件より, $7x^2$ は整数なので, p^2 は $7q^2$ の約数である。

ところが, p と q は互いに素なので, p^2 と q^2 も互いに素であり, p^2 は素数 7 の約数, すなわち $p^2=1$ または $p^2=7$ である。

すると, p は自然数より, $p=1$ となり, つまり x は整数である。

(2)　k, l を整数とし, a, b を偶数, 奇数に分けて考える。

(i)　$a=2k$, $b=2l$ のとき

$$a^2-7b^2=(2k)^2-7(2l)^2=4(k^2-7l^2)$$

(ii)　$a=2k$, $b=2l+1$ のとき

$$a^2-7b^2=(2k)^2-7(2l+1)^2=4(k^2-7l^2-7l-2)+1$$

(iii)　$a=2k+1$, $b=2l$ のとき

$$a^2-7b^2=(2k+1)^2-7(2l)^2=4(k^2+k-7l^2)+1$$

(iv)　$a=2k+1$, $b=2l+1$ のとき

$$a^2-7b^2=(2k+1)^2-7(2l+1)^2=4(k^2+k-7l^2-7l-2)+2$$

(i)～(iv)より, a^2-7b^2 が 4 の倍数ならば, a と b はともに偶数である。

(3)　$\left(\dfrac{r}{2}\right)^2-7s^2=\dfrac{r^2-7(2s)^2}{4}$ が整数のとき, $r^2-7(2s)^2$ は 4 の倍数となり, しかも r が整数より, $7(2s)^2$ は整数となる。

すると, s は有理数なので, (1)から, $2s$ は整数である。

そこで, (2)の結果を用いると, r と $2s$ はともに偶数となることより, s は整数である。

［解　説］

(1)と(2)が, (3)の巧みな誘導となっています。演習するに価値ある 1 題です。

$\boxed{15}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［広島大・理］

(1)　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=\sqrt{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cos 120^\circ=-1$ より，

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=2$$

(2)　$|k\vec{a}+l\vec{b}|^2=k^2|\vec{a}|^2+2kl\vec{a}\cdot\vec{b}+l^2|\vec{b}|^2=2(k^2-kl+l^2)$

よって, k, l は整数より，$|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$ は偶数である。

(3)　(i)　k が奇数, l が奇数のとき

k^2，kl，l^2 はすべて奇数より，k^2-kl+l^2 は奇数となるので，$|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$ は 4 の倍数ではない。

(ii)　k が奇数, l が偶数のとき

k^2 は奇数，kl，l^2 は偶数より，k^2-kl+l^2 は奇数となるので，$|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$ は 4 の倍数ではない。

(iii) k が偶数, l が奇数のとき

k^2，kl は偶数，l^2 は奇数より，k^2-kl+l^2 は奇数となるので，$|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$ は 4 の倍数ではない。

(i)～(iii)より, k または l が奇数のとき，$|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$ は 4 の倍数ではない。

(4)　まず，$|m\vec{a}+n\vec{b}|$ が整数ならば，$m=n=0$ を証明する。

$|m\vec{a}+n\vec{b}|=\sqrt{2(m^2-mn+n^2)}$ が整数となるためには, (3)より，m^2-mn+n^2 が偶数, すなわち m, n がともに偶数であることが必要である。

そこで，$m=2m_1$，$n=2n_1$ (m_1，n_1 は整数)とおくと，

$$|m\vec{a}+n\vec{b}|=2\sqrt{2({m_1}^2-m_1n_1+{n_1}^2)}$$

すると，$|m\vec{a}+n\vec{b}|$ が整数となるためには，m_1，n_1 がともに偶数であることが必要であり，$k=1,\ 2,\ \cdots$ として，$m_k=2m_{k+1}$，$n_k=2n_{k+1}$ (m_k，n_k は整数)とおくと，

$$|m\vec{a}+n\vec{b}|=2^k\sqrt{2({m_k}^2-m_kn_k+{n_k}^2)}$$

これより，m_k，n_k がともに偶数であるのは，$m=n=0$ の場合しかありえない。

よって，$|m\vec{a}+n\vec{b}|$ が整数ならば，$m=n=0$ である。

この命題の対偶をとると，$m=n=0$ ではないならば，$|m\vec{a}+n\vec{b}|$ は整数ではない。

［解　説］

(4)は, 0 以外の整数を 2 でドンドン割っていくと, いつかは奇数になるということを利用しています。もっと詳しく記述した方がよかったかもしれませんが。

16　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大・文］

(1)　$x_n = a_n - \dfrac{n(n-1)}{2}p^2 - np$，$y_n = b_n - n(n-1)p^2 - np - 1$ ……(＊)とおくと，

$$a_n = x_n + \frac{n(n-1)}{2}p^2 + np\,,\ \ b_n = y_n + n(n-1)p^2 + np + 1$$

(i)　$n=1$ のとき

$a_1 = p$，$b_1 = p+1$ より，$x_1 = a_1 - p = 0$，$y_1 = b_1 - p - 1 = 0$

よって，x_1，y_1 はともに p^3 で割り切れる。

(ii)　$n=k$ のとき

x_k，y_k がともに p^3 で割り切れると仮定する。

条件より，$a_{n+1} = a_n + pb_n$，$b_{n+1} = pa_n + (p+1)b_n$ から，

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= a_{k+1} - \frac{(k+1)k}{2}p^2 - (k+1)p\\
&= a_k + pb_k - \frac{(k+1)k}{2}p^2 - (k+1)p\\
&= x_k + \frac{k(k-1)}{2}p^2 + kp + p\{\,y_k + k(k-1)p^2 + kp + 1\,\}\\
&\quad - \frac{(k+1)k}{2}p^2 - (k+1)p\\
&= x_k + py_k + k(k-1)p^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{k+1} &= b_{k+1} - (k+1)kp^2 - (k+1)p - 1\\
&= pa_k + (p+1)b_k - (k+1)kp^2 - (k+1)p - 1\\
&= p\left\{x_k + \frac{k(k-1)}{2}p^2 + kp\right\} + (p+1)\{\,y_k + k(k-1)p^2 + kp + 1\,\}\\
&\quad - (k+1)kp^2 - (k+1)p - 1\\
&= px_k + (p+1)y_k + \frac{3k(k-1)}{2}p^3
\end{aligned}$$

$k(k-1)$ は偶数なので，x_{k+1}，y_{k+1} はともに p^3 で割り切れる。

(i)(ii)より，x_n，y_n はともに p^3 で割り切れる。

(2)　(＊)より，$a_p = x_p + \dfrac{p(p-1)}{2}p^2 + p^2 = x_p + \dfrac{p-1}{2}p^3 + p^2$

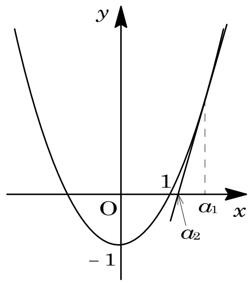
(1)より，x_p は p^3 で割り切れ，また p は奇数より $\dfrac{p-1}{2}$ は整数となり，a_p は p^2 で割り切れる。さらに，p は 3 以上なので，p^2 は p^3 で割り切れないことより，a_p は p^3 では割り切れない。

［解　説］

整数と漸化式の融合という頻出タイプの 1 題です。数学的帰納法を利用すると，明快に証明することができます。

17　　　　［九州大・文］

(1)　$C: y=x^2-1$ に対して，$y'=2x$ より，点 $(a_1,\ a_1{}^2-1)$ における接線は,



$$y-(a_1{}^2-1)=2a_1(x-a_1)$$

点 $(a_2,\ 0)$ を通ることより,

$$-a_1{}^2+1=2a_1(a_2-a_1),\ 2a_1a_2=a_1{}^2+1$$

よって，$a_2=\dfrac{a_1{}^2+1}{2a_1}$

(2)　(1)と同様にすると，$a_{n+1}=\dfrac{a_n{}^2+1}{2a_n}$ となる。

ここで, すべての n に対して，$a_n>1$ であることを数学的帰納法によって示す。

(i)　$n=1$ のとき　条件より $a_1>1$ なので, 成立している。

(ii)　$n=k$ のとき　$a_k>1$ と仮定すると,

$$a_{k+1}-1=\frac{a_k{}^2+1}{2a_k}-1=\frac{(a_k-1)^2}{2a_k}>0$$

よって，$a_{k+1}>1$ となり，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，すべての n に対して $a_n>1$ である。

(3)　条件より，$b_n=\dfrac{1}{2}(a_n-1)$ なので,

$$b_n{}^2-b_{n+1}=\frac{1}{4}(a_n-1)^2-\frac{1}{2}(a_{n+1}-1)=\frac{1}{4}(a_n-1)^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{(a_n-1)^2}{2a_n}$$

$$=\frac{1}{4}(a_n-1)^2\cdot\frac{a_n-1}{a_n}=\frac{(a_n-1)^3}{4a_n}$$

$a_n>1$ より，$b_n{}^2-b_{n+1}>0$ すなわち $b_{n+1}<b_n{}^2$ ……(＊)である。

(4)　まず，$b_1=\dfrac{1}{2}(2-1)=\dfrac{1}{2}$ であり，$a_n>1$ から $b_n>0$ となるので, (＊)より,

$$\log_{10}b_{n+1}<2\log_{10}b_n$$

よって, $n\geqq 2$ において，$\log_{10}b_n<2^{n-1}\log_{10}b_1=-2^{n-1}\log_{10}2=-0.301\times 2^{n-1}$

ここで，$b_n<10^{-12}$，すなわち $\log_{10}b_n<\log_{10}10^{-12}=-12$ を満たすためには,

$$-0.301\times 2^{n-1}\leqq -12,\ 2^{n-1}\geqq\frac{12}{0.301}>39.8$$

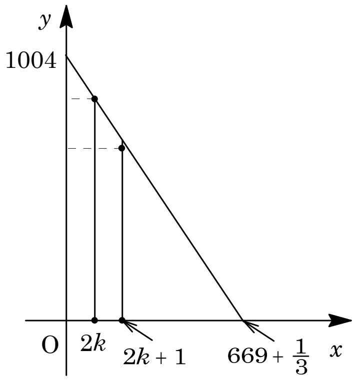
よって, $n\geqq 7$ であればよく, 求める n の値の 1 つは 7 である。

［解 説］

有名なニュートン法の理系風の問題です。

$\boxed{18}$　　［名古屋大・理］

(1)　$x \geqq 0$, $y \geqq 0$ で，不等式 $3x+2y \leqq 2008$ を満たす格子点の個数を, x を固定して数える。



(i)　$x=2k$ $(0 \leqq k \leqq 334)$ のとき

境界線 $3x+2y=2008$ との交点は,

$$y=\frac{1}{2}(2008-3\cdot 2k)=1004-3k$$

よって，直線 $x=2k$ 上で，$0 \leqq y \leqq 1004-3k$ より，格子点は $1005-3k$ 個ある。

(ii)　$x=2k+1$ $(0 \leqq k \leqq 334)$ のとき

境界線 $3x+2y=2008$ との交点は,

$$y=\frac{1}{2}\{2008-3(2k+1)\}=1004-3k-\frac{3}{2}$$

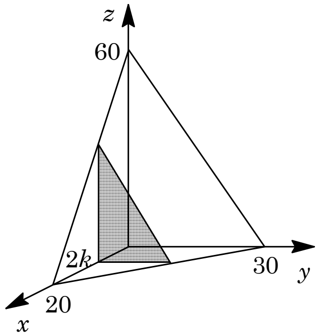
よって，直線 $x=2k+1$ 上で，$0 \leqq y \leqq 1004-3k-2=1002-3k$ より，格子点は $1003-3k$ 個ある。

(i)(ii)より，求める格子点の個数 N は,

$$N=\sum_{k=0}^{334}(1005-3k)+\sum_{k=0}^{334}(1003-3k)=\sum_{k=0}^{334}(2008-6k)$$

$$=2008\times 335-6\times\frac{1}{2}\cdot 334\cdot 335=337010$$

(2)　$x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$ で，不等式 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{6} \leqq 10$ すなわち $3x+2y+z \leqq 60$ を満たす格子点の個数 N を，まず x を固定して数える。

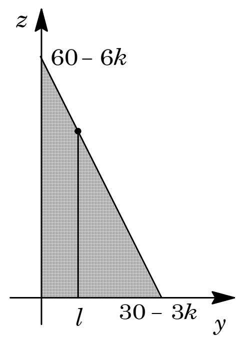


(i)　$x=2k$ $(0 \leqq k \leqq 10)$ のとき

平面 $x=2k$ 上の格子点の個数を N_{2k} とおくと，この平面上では,

$$0 \leqq z \leqq -2y+60-6k$$

(1)と同様に考えて，直線 $y=l$ $(0 \leqq l \leqq 30-3k)$ 上で，$0 \leqq z \leqq -2l+60-6k$ より，格子点は $-2l+61-6k$ 個あるので,



$$N_{2k}=\sum_{k=0}^{30-3k}(-2l+61-6k)$$

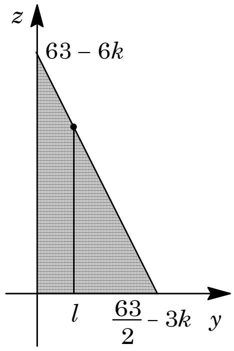
$$=-2\cdot\frac{1}{2}(30-3k)(31-3k)+(61-6k)(31-3k)$$

$$=(31-3k)^2$$

(ii)　$x=2k-1$ $(1 \leqq k \leqq 10)$ のとき

平面 $x=2k-1$ 上の格子点の個数を N_{2k-1} とおくと，この平面上では,

$$0 \leqq z \leqq -2y+60-3(2k-1) = -2y+63-6k$$



(1)と同様に考えて，直線 $y=l$ $(0 \leqq l \leqq 31-3k)$ 上では，

$0 \leqq z \leqq -2l+63-6k$ より，格子点は $-2l+64-6k$ 個あるので，

$$\begin{aligned} N_{2k-1} &= \sum_{k=0}^{31-3k}(-2l+64-6k) \\ &= -2\cdot\frac{1}{2}(31-3k)(32-3k)+(64-6k)(32-3k) \\ &= (33-3k)(32-3k) \end{aligned}$$

(i)(ii)より，求める格子点の個数 N は,

$$\begin{aligned} N &= \sum_{k=0}^{10} N_{2k} + \sum_{k=1}^{10} N_{2k-1} = N_0 + \sum_{k=1}^{10}(N_{2k}+N_{2k-1}) \\ &= 31^2 + \sum_{k=1}^{10}\left\{(31-3k)^2+(33-3k)(32-3k)\right\} \\ &= 31^2 + \sum_{k=1}^{10}(2017-381k+18k^2) \\ &= 31\times 31+2017\times 10-381\times\frac{1}{2}\times 10\times 11+18\times\frac{1}{6}\times 10\times 11\times 21 \\ &= 7106 \end{aligned}$$

［解　説］

格子点の個数を数える有名問題です。平面と空間の 2 題が出されましたが，どちらも，かなりの量の計算が要求されます。

19　　［京都大・文］

p を素数, n を正の整数とするとき，$(p^n)!$ は,

$$(p^n)! = 1\times 2\times\cdots\times p\times\cdots\times p^2\times\cdots\times p^3\times\cdots\cdots\times p^n$$

さて，1 から p^n までの整数で，$p^k\ (1\leqq k\leqq n)$ の倍数は $\dfrac{p^n}{p^k}=p^{n-k}$ 個ある。すなわち, p の倍数は p^{n-1} 個，p^2 の倍数は p^{n-2} 個，…，p^{n-1} の倍数は p 個，p^n の倍数は 1 個となる。

すると，$(p^n)!$ を素因数分解したとき, p の個数は,

$$p^{n-1}+p^{n-2}+\cdots+p+1=\frac{p^n-1}{p-1}$$

したがって，$(p^n)!$ は p で $\dfrac{p^n-1}{p-1}$ 回割り切れる。

［解 説］

$p=3$，$n=4$ の場合を具体的に考え，実験をしました。その結果を一般化したのが，上の解です。

$\boxed{20}$　［一橋大］

$m^3+1^3=n^3+10^3$ より，$m^3-n^3=999$ となり，

$$(m-n)(m^2+mn+n^2)=3^3\times 37\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，$m\geqq 2$，$n\geqq 2$ から，$m^2+mn+n^2>0$ となり，$(*)$ から $m-n\geqq 1$ である。

さらに，$m^2+mn+n^2>m^2-2mn+n^2=(m-n)^2\geqq m-n$ から，

$$(m-n,\ m^2+mn+n^2)=(1,\ 999),\ (3,\ 333),\ (9,\ 111),\ (27,\ 37)$$

また，$m^2+mn+n^2-(m-n)^2=3mn$ から，$m^2+mn+n^2-(m-n)^2$ は 3 の倍数となるので，

$$(m-n,\ m^2+mn+n^2)=(3,\ 333),\ (9,\ 111)$$

(i)　$(m-n,\ m^2+mn+n^2)=(3,\ 333)$ のとき

この場合，$m-n=3$，$mn=\frac{1}{3}(333-3^2)=108$ となり，

$$(n+3)n=108,\ n^2+3n-108=0,\ (n-9)(n+12)=0$$

$n\geqq 2$ から，$n=9$ となり，$m=9+3=12$

(ii)　$(m-n,\ m^2+mn+n^2)=(9,\ 111)$ のとき

この場合，$m-n=9$，$mn=\frac{1}{3}(111-9^2)=10$ となり，

$$(n+9)n=10,\ n^2+9n-10=0,\ (n-1)(n+10)=0$$

$n\geqq 2$ から，解なしとなる。

(i)(ii)より，$m=12$，$n=9$

［解　説］

不定方程式の基本問題です。数の特性を活かして，解の候補を絞り込むことがポイントです。

21　　［名古屋大・理］

(1) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}$ より，$xy-4x-8y=0$ となり，

$$(x-8)(y-4)=32$$

ここで, x, y は整数であり，$x-8>-8$，$y-4>-4$ から, 32 の約数をとり,

$$(x-8,\ y-4)=(1,\ 32),\ (2,\ 16),\ (4,\ 8),\ (8,\ 4),\ (16,\ 2),\ (32,\ 1)$$

$$(x,\ y)=(9,\ 36),\ (10,\ 20),\ (12,\ 12),\ (16,\ 8),\ (24,\ 6),\ (40,\ 5)$$

(2) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{p}$ より，$xy-px-2py=0$ となり，

$$(x-2p)(y-p)=2p^2$$

ここで，$x-2p>-2p$，$y-p>-p$ であり, p が 3 以上の素数から,

$$(x-2p,\ y-p)=(1,\ 2p^2),\ (2,\ p^2),\ (p,\ 2p),\ (2p,\ p),$$
$$(p^2,\ 2),\ (2p^2,\ 1)$$

さて，$A=2x+3y-7p=2(x-2p)+3(y-p)$ とおくと, A の値は順に,

$$A=2+6p^2,\ 4+3p^2,\ 8p,\ 7p,\ 2p^2+6,\ 4p^2+3$$

ここで, $p\geqq 3$ を用いると,

$$(2+6p^2)-(4+3p^2)=-2+3p^2>0,\ 2+6p^2>4+3p^2$$

$$8p-7p=p>0,\ 8p>7p$$

$$(2p^2+6)-(4p^2+3)=-2p^2+3<0,\ 4p^2+3>2p^2+6$$

さらに，$(4+3p^2)-(2p^2+6)=p^2-2>0$，$4+3p^2>2p^2+6$ ………①

$$(2p^2+6)-7p=(2p-3)(p-2)>0,\ 2p^2+6>7p \text{………②}$$

①②より, A の最小値は $7p$ であり，このとき，$(x-2p,\ y-p)=(2p,\ p)$ となる。

すると，$2x+3y=A+7p$ から，$2x+3y$ を最小にする $(x,\ y)$ は,

$$(x-2p,\ y-p)=(2p,\ p),\ (x,\ y)=(4p,\ 2p)$$

［解 説］

有名な型の不定方程式です。なお, (2)の大小関係については, 初めはグラフということも考えましたが, 煩雑になりそうなので止めました。そこで, まず似た式どうしの大小を比べ, この予選を通過した式の大小を比べるという方法を採っています。

22　　［千葉大］

(1)　$1 \leqq k \leqq n$ に対して,

$$ {}_n\mathrm{C}_k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\frac{n-2}{k-2}\cdot\cdots\cdot\frac{n-k+2}{2}\cdot\frac{n-k+1}{1} $$

ここで，$0 \leqq l \leqq k-1$ とすると，$n(k-l) \leqq k(n-l)$ より，$\dfrac{n-l}{k-l} \geqq \dfrac{n}{k}$ となり，

$$ \frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\frac{n-2}{k-2}\cdot\cdots\cdot\frac{n-k+2}{2}\cdot\frac{n-k+1}{1} \geqq \frac{n}{k}\cdot\frac{n}{k}\cdot\frac{n}{k}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{k}\cdot\frac{n}{k} = \left(\frac{n}{k}\right)^k $$

さらに，$\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \leqq \dfrac{n^k}{k!} \leqq \dfrac{n^k}{2^{k-1}}$ から，

$$ \left(\frac{n}{k}\right)^k \leqq {}_n\mathrm{C}_k \leqq \frac{n^k}{2^{k-1}} $$

(2)　(1)より，$\left(\dfrac{n}{k}\right)^k \leqq {}_n\mathrm{C}_k$ なので，二項定理を利用すると，

$$ \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{k}\right)^k \leqq \sum_{k=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k < \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k = (1+1)^n = 2^n $$

よって，$\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{k}\right)^k < 1$

(3)　(1)より，${}_n\mathrm{C}_k \leqq \dfrac{n^k}{2^{k-1}}$ なので，二項定理を利用すると，

$$ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{n}\right)^k \leqq 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{n^k}{2^{k-1}}\left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} $$

ここで，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n < 2$ となるので，

$$ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + 2 = 3 $$

［解　説］

3 題構成の並列型の設問の場合，(1)と(2)が独立で，ともに(3)への誘導というのが一般的です。ところが，本問では，(1)が，独立な(2)と(3)への誘導となっており，変わった構図です。なお，内容は二項定理の応用として，著名なものです。

23　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大・文］

(1)　$m \geqq 2$ のとき，${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ は，すべて自然数であり，$m \geqq 3$ では，$2 \leqq k \leqq m-1$ において，

$${}_m\mathrm{C}_k = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!}$$

ここで，m が素数のとき，m は $k!\ (k=2,\ 3,\ \cdots,\ m-1)$ では割り切れないので，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ は，すべて m の倍数となる。

すると，${}_m\mathrm{C}_1 = m$ であることから，${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ の最大公約数 d_m は，$d_m = m$ である。

なお，$m=2$ のときは，${}_2\mathrm{C}_1 = 2$ となり，$d_m = m$ を満たしている。

(2)　すべての自然数 k に対し，$k^m - k$ が d_m で割り切れることを，数学的帰納法よって示す。

(i)　$k=1$ のとき

$k^1 - k = 0$ は，明らかに d_m で割り切れる。

(ii)　$k=l$ のとき

$l^m - l$ が d_m で割り切れると仮定すると，

$$\begin{aligned}(l+1)^m-(l+1) &= l^m + {}_m\mathrm{C}_1\, l^{m-1} + {}_m\mathrm{C}_2\, l^{m-2} + \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-2}\, l^2 + ({}_m\mathrm{C}_{m-1}-1)\,l \\ &= (l^m - l) + {}_m\mathrm{C}_1\, l^{m-1} + {}_m\mathrm{C}_2\, l^{m-2} + \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-2}\, l^2 + {}_m\mathrm{C}_{m-1}\, l\end{aligned}$$

(1)より，${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ は d_m で割り切れるので，$(l+1)^m - (l+1)$ は d_m で割り切れる。

(i)(ii)より，すべての自然数 k に対し，$k^m - k$ が d_m で割り切れる。

［解　説］

1999 年に理系で出された二項係数の問題を思い出しました。この過去問に比べると，内容は基本的です。

$\boxed{24}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［金沢大・文］

(1)　$x>0$ から，相加平均と相乗平均の関係を用いて，

$$\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{x^2}\right)\geqq 2\times\sqrt[3]{\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{x^2}}=2\sqrt[3]{2^{-2}}=2^{\frac{1}{3}}$$

等号は $\frac{1}{2}x=\frac{1}{x^2}$，すなわち $x=\sqrt[3]{2}$ のときに成立する。

(2)　(i)　まず，$a_n>2^{\frac{1}{3}}$ を数学的帰納法で証明する。

(a)　$n=1$ のとき　$a_1=2$ より成立する。

(b)　$n=k$ のとき　$a_k>2^{\frac{1}{3}}$ の成立を仮定すると，(1)より，

$$a_{k+1}=\frac{2}{3}\left(a_k+\frac{1}{{a_k}^2}\right)\geqq 2^{\frac{1}{3}}$$

等号成立は $a_k=\sqrt[3]{2}$ のときなので仮定に反し，よって $a_{k+1}>2^{\frac{1}{3}}$ となる。

(a)(b)より，$a_n>2^{\frac{1}{3}}$ である。

また，$a_n-a_{n+1}=a_n-\frac{2}{3}\left(a_n+\frac{1}{{a_n}^2}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{{a_n}^3-2}{{a_n}^2}$ となり，$a_n>2^{\frac{1}{3}}$ から，

$$a_n-a_{n+1}>0,\quad a_n>a_{n+1}$$

以上より，$a_n>a_{n+1}>2^{\frac{1}{3}}$ が成り立つ。

(ii)　$$\frac{2}{3}\left(a_n-\frac{2}{{a_{n-1}}^2}\right)-\left(a_{n+1}-\frac{2}{{a_n}^2}\right)=\frac{2}{3}\left(a_n-\frac{2}{{a_{n-1}}^2}\right)-\frac{2}{3}\left(a_n+\frac{1}{{a_n}^2}\right)+\frac{2}{{a_n}^2}$$
$$=-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{{a_{n-1}}^2}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{{a_n}^2}=\frac{4}{3}\cdot\frac{{a_{n-1}}^2-{a_n}^2}{{a_{n-1}}^2{a_n}^2}$$

$n\geqq 2$ のとき，(i)より $a_{n-1}>a_n>2^{\frac{1}{3}}$ から，$\frac{4}{3}\cdot\frac{{a_{n-1}}^2-{a_n}^2}{{a_{n-1}}^2{a_n}^2}>0$ となり，

$$a_{n+1}-\frac{2}{{a_n}^2}<\frac{2}{3}\left(a_n-\frac{2}{{a_{n-1}}^2}\right)$$

(iii)　(i)より，$a_n>a_{n+1}>2^{\frac{1}{3}}$ なので，$a_{n+1}-\frac{2}{{a_n}^2}=\frac{a_{n+1}{a_n}^2-2}{{a_n}^2}>0$

$n\geqq 1$ のとき，(ii)より，$a_{n+1}-\frac{2}{{a_n}^2}\leqq\left(a_2-\frac{2}{{a_1}^2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$　（等号は $n=1$ のとき）

さて，$a_2-\frac{2}{{a_1}^2}=\frac{2}{3}\left(2+\frac{1}{4}\right)-\frac{2}{4}=1$ となるので，$a_{n+1}-\frac{2}{{a_n}^2}\leqq\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ から，

$$0<a_{n+1}-\frac{2}{{a_n}^2}\leqq\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

［解　説］

量的にかなりのもので，この 1 題の中に 5 つの証明題が詰められています。

$\boxed{25}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［神戸大・理］

(1)　$t \geqq 1$ のとき, $0 < a_n < a_{n+1}$ $(n \geqq 1)$ であることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1,\ 2$ のとき

条件より，$a_1 = 1$，$a_2 = 2t \geqq 2$ なので, $0 < a_1 < a_2$ が成り立つ。

(ii)　$n=k,\ k+1$ のとき

$0 < a_k < a_{k+1}$ の成立を仮定すると，条件より，

$$a_{k+2} - a_{k+1} = (2t-1)a_{k+1} - a_k \geqq a_{k+1} - a_k > 0$$

よって, $0 < a_{k+1} < a_{k+2}$ が成り立つ。

(i)(ii)より，自然数 n に対し, $t \geqq 1$ のとき, $0 < a_n < a_{n+1}$ が成り立つ。

(2)　$t \leqq -1$ のとき, $0 < |a_n| < |a_{n+1}|$ $(n \geqq 1)$ であることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1,\ 2$ のとき

条件より，$|a_1| = 1$，$|a_2| = 2|t| \geqq 2$ なので, $0 < |a_1| < |a_2|$ が成り立つ。

(ii)　$n=k,\ k+1$ のとき

$0 < |a_k| < |a_{k+1}|$ の成立を仮定すると，条件より，

$$|a_{k+2}| = |2ta_{k+1} - a_k| \geqq |2ta_{k+1}| - |a_k| = 2|t||a_{k+1}| - |a_k|$$

すると，$|a_{k+2}| - |a_{k+1}| \geqq (2|t|-1)|a_{k+1}| - |a_k| \geqq |a_{k+1}| - |a_k| > 0$

よって, $0 < |a_{k+1}| < |a_{k+2}|$ が成り立つ。

(i)(ii)より，自然数 n に対し，$t \leqq -1$ のとき, $0 < |a_n| < |a_{n+1}|$ が成り立つ。

(3)　$-1 < t < 1$ のとき，$t = \cos\theta$ となる θ を用いて，$a_n = \dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}$ $(n \geqq 1)$ であることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1,\ 2$ のとき

$a_1 = 1 = \dfrac{\sin\theta}{\sin\theta}$，$a_2 = 2t = 2\cos\theta = \dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta}$ となり，成立する。

(ii)　$n=k,\ k+1$ のとき

$a_k = \dfrac{\sin k\theta}{\sin\theta}$，$a_{k+1} = \dfrac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}$ であると仮定すると，条件より，

$$a_{k+2} = 2t\frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin k\theta}{\sin\theta} = \frac{2\sin(k+1)\theta\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin k\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin(k+2)\theta + \sin k\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin k\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin(k+2)\theta}{\sin\theta}$$

(i)(ii)より，自然数 n に対し，$-1 < t < 1$ $(t = \cos\theta)$ のとき，$a_n = \dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}$ が成り立つ。

［解 説］

3 題とも数学的帰納法でクリアーに示せます。なお, (1)を参考にして(2)では三角不等式を用いましたが, 漸化式では, 1999 年に東大・理で利用して以来, 久々です。

26　　　　［神戸大・理］

(1)　条件から, ab が p の倍数より, a または b は p の倍数である。

ここで, a, b の一方が p の倍数, 他方が p の倍数でないとき, $a+b$ は p の倍数ではない。また, a, b がともに p の倍数であるとき, $a+b$ は p の倍数である。

したがって, $a+b$ と ab がともに p の倍数であるとき, a と b はともに p の倍数である。

(2)　まず, $a+b$ と a^2+b^2 に対して,

$$2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)\cdots\cdots\cdots①$$

$a+b$ と a^2+b^2 がともに p の倍数であるので, ①より, $2ab$ は p の倍数である。

p は 3 以上の素数から, 2 と p は互いに素となるので, ab は p の倍数である。

よって, (1)の結果から, a と b はともに p の倍数である。

(3)　まず, a^2+b^2 と a^3+b^3 に対して,

$$ab(a+b)=(a+b)(a^2+b^2)-(a^3+b^3)\cdots\cdots\cdots②$$

a^2+b^2 と a^3+b^3 がともに p の倍数であるので, ②より, $ab(a+b)$ は p の倍数である。

すると, 条件より, ab または $a+b$ が p の倍数である。

(i)　ab が p の倍数であるとき

①より, $(a+b)^2$ は p の倍数となり, $a+b$ は p の倍数である。

(1)の結果より, a と b はともに p の倍数である。

(ii)　$a+b$ が p の倍数であるとき

(2)の結果より, a と b はともに p の倍数である。

(i)(ii)より, いずれの場合も, a と b はともに p の倍数である。

［解 説］

問題文に不必要と思えるほどのヒントが記されています。(3)の②式は①式を参考に作りました。

27　　　　［広島大・理］

(1)　条件より, k, l を 0 以上の整数として，$x = 4k+1$，$y = 4l+1$ と表すと,

$$xy = (4k+1)(4l+1) = 4(4kl+k+l)+1$$

よって, 積 xy は 4 で割ると 1 余り, 集合 A に属する。

(2)　条件より，$m = 2k$ とおくと, $k \geqq 1$ のとき，二項定理より,

$$3^m = 3^{2k} = 9^k = (8+1)^k = 8^k + {}_k\mathrm{C}_1 8^{k-1} + {}_k\mathrm{C}_2 8^{k-2} + \cdots + {}_k\mathrm{C}_{k-1} 8 + 1$$

$8^k + {}_k\mathrm{C}_1 8^{k-1} + {}_k\mathrm{C}_2 8^{k-2} + \cdots + {}_k\mathrm{C}_{k-1} 8$ は 4 の倍数より，3^m は 4 で割ると 1 余る。

なお，$m = 0$ のときは $3^m = 1$ から，このときも 4 で割ると 1 余る。

以上より，3^m は A に属する。

(3)　まず, (2)と同様に考え，$m+n$ が偶数の場合は, M, N を整数として,

(i)　$m = 2k$，$n = 2l$ のとき

$$3^m 7^n = 3^{2k} 7^{2l} = 9^k 49^l = (8+1)^k (48+1)^l = (4M+1)(4N+1)$$

すると, (1)の結果から，$3^m 7^n$ は A に属する。

(ii)　$m = 2k+1$，$n = 2l+1$ のとき

$$3^m 7^n = 3^{2k+1} 7^{2l+1} = 3(4M+1)\cdot 7(4N+1) = (20+1)(4M+1)(4N+1)$$

すると, (1)の結果から，$3^m 7^n$ は A に属する。

次に，$m+n$ が奇数の場合は,

(iii)　$m = 2k$，$n = 2l+1$ のとき

$$3^m 7^n = 3^{2k} 7^{2l+1} = (4M+1)\cdot 7(4N+1) = (4+3)(16MN+4M+4N+1)$$

すると，$3^m 7^n$ は 4 で割った余りが 3 となり, A には属さない。

(iv)　$m = 2k+1$，$n = 2l$ のとき

$$3^m 7^n = 3^{2k+1} 7^{2l} = 3(4M+1)(4N+1) = 3(16MN+4M+4N+1)$$

すると，$3^m 7^n$ は 4 で割った余りが 3 となり, A には属さない。

(4)　$3^{2m+1} 7^{2n+1}$ の正の約数は，$0 \leqq k \leqq 2m+1$，$0 \leqq l \leqq 2n+1$ として $3^k 7^l$ と表せ，この中で A に属する数は，(3)の結果から $k+l$ が偶数の場合である。この数全体の和を S とすると,

$$S = (1+3^2+\cdots+3^{2m})(1+7^2+\cdots+7^{2n}) + (3+3^3+\cdots+3^{2m+1})(7+7^3+\cdots+7^{2n+1})$$

$$= (1+3^2+\cdots+3^{2m})(1+7^2+\cdots+7^{2n}) + 21(1+3^2+\cdots+3^{2m})(1+7^2+\cdots+7^{2n})$$

$$= 22\cdot\frac{9^{m+1}-1}{9-1}\cdot\frac{49^{n+1}-1}{49-1} = \frac{11}{192}(9^{m+1}-1)(49^{n+1}-1)$$

［解 説］

整数についての問題で, (1)と(2)が(3)の，そして(3)が(4)の誘導になっています。

28　　［長崎大・医］

(1)　方程式 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0\ (d\neq 0)$ ……①が，有理数の解 $r=\dfrac{q}{p}$ （$p>0$, $q\neq 0$, p と q は互いに素である整数）をもつことより，

$$\frac{q^4}{p^4}+a\cdot\frac{q^3}{p^3}+b\cdot\frac{q^2}{p^2}+c\cdot\frac{q}{p}+d=0,\quad q^4+apq^3+bp^2q^2+cp^3q+dp^4=0$$

すると，$q^4=-p(aq^3+bpq^2+cp^2q+dp^3)$ から，

$$|q|^4=|p|\cdot|aq^3+bpq^2+cp^2q+dp^3|\text{………②}$$

条件から，$|p|$ と $|q|^4$ は 1 以外の公約数をもたず，しかも②から，$|p|$ は $|q|^4\times 1$ の約数なので，$|p|$ は 1 の約数，すなわち $|p|=1$ である。

このとき，$|r|=\dfrac{|q|}{|p|}=|q|$ から，$|r|$ は自然数となる。

そこで，方程式①は整数解 r をもつことになり，$r^4+ar^3+br^2+cr+d=0$

$$d=-r(r^3+ar^2+br+c),\ |d|=|r|\cdot|r^3+ar^2+br+c|$$

よって，$|r|$ は $|d|$ の約数である。

(2)　方程式 $2x^4-2x-1=0$ ……③に対して，$2x=t$ とおくと，

$$\frac{t^4}{8}-t-1=0,\ t^4-8t-8=0\text{………④}$$

さて，方程式④が有理数の解をもつと仮定すると，(1)から，その解は整数で，しかも 8 の約数である。ここで，$f(t)=t^4-8t-8$ とおくと，

$$f(1)=-15,\ f(-1)=1,\ f(2)=-8,\ f(-2)=24$$

$$f(4)=216,\ f(-4)=280,\ f(8)=4024,\ f(-8)=4152$$

これより，方程式④は有理数の解をもたず，実数解はすべて無理数である。

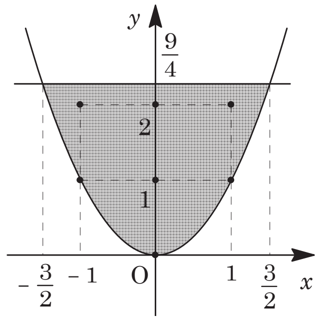
よって，方程式③の実数解はすべて無理数である。

［解 説］

(1)は有名問題ですが，経験がないと難しいでしょう。(2)はその応用で，最高次の係数を 1 にすれば解決です。定数項に注目して逆数をとるという手もあります。

29　　　　　　［千葉大］

(1)　$a=0$ のとき，$D: x^2 \leqq y \leqq b$ であり，境界線 $y=x^2$ と $y=b$ の交点は，$x=\pm\sqrt{b}$ となる。



これより, D の面積は,

$$\int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}}(b-x^2)\,dx=\frac{1}{6}(\sqrt{b}+\sqrt{b})^3=\frac{4}{3}(\sqrt{b})^3$$

条件より，$\frac{4}{3}(\sqrt{b})^3=\frac{9}{2}$ となり，$\sqrt{b}=\frac{3}{2}$，$b=\frac{9}{4}$

よって, D に含まれる格子点は，$(-1,\ 1)$，$(-1,\ 2)$，$(0,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(0,\ 2)$，$(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$ となり，その個数は 7 個である。

(2)　$D: x^2 \leqq y \leqq ax+b$ に対して，境界線 $y=x^2$ と $y=ax+b$ の交点は,

$$x^2-ax-b=0\,,\quad x=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4b}}{2}$$

ここで，$\alpha=\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}$，$\beta=\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}$ とおくと, D の面積は,

$$\int_{\alpha}^{\beta}(ax+b-x^2)\,dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}(\sqrt{a^2+4b})^3$$

条件より，$\frac{1}{6}(\sqrt{a^2+4b})^3=\frac{9}{2}$ となり，$\sqrt{a^2+4b}=3$，$a^2+4b=9$ ………(＊)

このとき，$\alpha=\frac{a-3}{2}$，$\beta=\frac{a+3}{2}$ である。

さて, a, b は整数なので, (＊)から a は奇数となり，α，β はともに整数である。

すると, D に含まれる格子点の個数は，$\frac{a-3}{2}=\alpha\leqq x\leqq\beta=\frac{a+3}{2}$ において,

(i)　$x=\frac{a-3}{2}$ のとき　格子点は $(\alpha,\ \alpha^2)$ のみより, 1 個である。

(ii)　$x=\frac{a-1}{2}$ のとき　(＊)より，$b=\frac{9-a^2}{4}$ となり，格子点の個数は,

$$a\cdot\frac{a-1}{2}+\frac{9-a^2}{4}-\left(\frac{a-1}{2}\right)^2+1=\frac{1}{4}(2a^2-2a+9-a^2-a^2+2a-1+4)=3$$

(iii)　$x=\frac{a+1}{2}$ のとき　(ii)と同様にすると，格子点の個数は,

$$a\cdot\frac{a+1}{2}+\frac{9-a^2}{4}-\left(\frac{a+1}{2}\right)^2+1=\frac{1}{4}(2a^2+2a+9-a^2-a^2-2a-1+4)=3$$

(iv)　$x=\frac{a+3}{2}$ のとき　格子点は $(\beta,\ \beta^2)$ のみより, 1 個である。

(i)〜(iv)より，格子点の個数は, a, b の値によらず，$1+3+3+1=8$ 個である。

［解 説］

(1)は(2)の誘導ではありませんが，うまくまとまった格子点の個数の問題です。

30 ［一橋大］

(1)　$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n$ ……(＊)で定められる数列$\{a_n\}$について，その一の位の数列を$\{b_n\}$とおくと，

$b_1=1$，$b_2=2$，$b_3=8$，$b_4=0$，$b_5=8$，$b_6=8$，$b_7=6$，$b_8=4$，$b_9=0$，

$b_{10}=4$，$b_{11}=4$，$b_{12}=8$，$b_{13}=2$，$b_{14}=0$，$b_{15}=2$，$b_{16}=2$，$b_{17}=4$，

$b_{18}=6$，$b_{19}=0$，$b_{20}=6$，$b_{21}=6$，$b_{22}=2$，$b_{23}=8$，$b_{24}=0$，……

すると，$b_{22}=b_2$，$b_{23}=b_3$となり，(＊)から，$n\geqq 2$ において，数列$\{b_n\}$は周期 20 の周期数列となる。

さて，$2010=1+20\times 100+9$ より，$b_{2010}=b_{1+9}=4$ となるので，a_{2010} を 10 で割った余りは 4 である。

(2)　$a_2=3a_1$ のとき，(＊)より，

$$a_3=a_2+6a_1=9a_1,\ a_4=a_3+6a_2=27a_1,\ a_5=a_4+6a_3=81a_1$$

これより，$a_n=3^{n-1}a_1$ と予測できる。

まず，この予測の正しいことを，数学的帰納法を用いて証明する。

(i)　$n=1,\ 2$ のとき　条件より成立する。

(ii)　$n=k,\ k+1$ のとき　$a_k=3^{k-1}a_1$，$a_{k+1}=3^k a_1$ と仮定すると，(＊)より，

$$a_{k+2}=a_{k+1}+6a_k=3^k a_1+6\cdot 3^{k-1}a_1=(1+2)\cdot 3^k a_1=3^{k+1}a_1$$

(i)(ii)より，すべての自然数 n に対して，$a_n=3^{n-1}a_1$ である。

すると，$a_{n+4}-a_n=3^{n+3}a_1-3^{n-1}a_1=(3^4-1)\cdot 3^{n-1}a_1=10\times(8\cdot 3^{n-1}a_1)$

よって，$a_{n+4}-a_n$ は 10 の倍数である。

［解 説］

漸化式と整数の融合問題は，1993 年に東大，1994 年に京大で出題された後，しばらく頻出のものでした。ただ，本問は，上記の過去問と異なり，漸化式が簡単な形で解けるので，この結果を利用したほうがよいのかどうか，かえって迷ってしまいます。この影響のためか，(1)と(2)は異なる立場での解答例となっています。

31　　　　［京都大・文］

(1)　各桁の数が 1 または 2 である n 桁の整数は，全部で 2^n 個あり，これらの整数全体について，どの位にも 1 が 2^{n-1} 個，2 が 2^{n-1} 個だけ現れる。これより，すべての整数の和 T_n は，

$$\begin{aligned}T_n &= (1+2)\times 2^{n-1}\times 10^{n-1}+(1+2)\times 2^{n-1}\times 10^{n-2}+\cdots+(1+2)\times 2^{n-1}\\ &= 3\cdot 2^{n-1}(10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+1)\\ &= 3\cdot 2^{n-1}\cdot\frac{10^n-1}{10-1}=\frac{1}{3}\cdot 2^{n-1}(10^n-1)\end{aligned}$$

(2)　各桁の数が 0，1，2 のいずれかである n 桁以下の整数は，全部で 3^n 個あり，これらの整数全体について，どの位にも 0 が 3^{n-1} 個，1 が 3^{n-1} 個，2 が 3^{n-1} 個だけ現れる。これより，すべての整数の和 S_n は，

$$\begin{aligned}S_n &= (1+2)\times 3^{n-1}\times 10^{n-1}+(1+2)\times 3^{n-1}\times 10^{n-2}+\cdots+(1+2)\times 3^{n-1}\\ &= 3\cdot 3^{n-1}(10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+1)\\ &= 3^n\cdot\frac{10^n-1}{10-1}=3^{n-2}(10^n-1)\end{aligned}$$

さて，条件より，$S_n \geqq 15T_n$ なので，$3^{n-2}(10^n-1)\geqq 5\cdot 2^{n-1}(10^n-1)$ となり，

$$3^{n-2}\geqq 10\cdot 2^{n-2},\ \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\geqq 10$$

両辺の対数をとって，

$$(n-2)(\log_{10}3-\log_{10}2)\geqq 1,\ n-2\geqq\frac{1}{\log_{10}3-\log_{10}2}$$

ここで，$0.175=0.477-0.302<\log_{10}3-\log_{10}2<0.478-0.301=0.177$ から，

$$5.6<\frac{1}{\log_{10}3-\log_{10}2}<5.8$$

よって，n は整数から，$n\geqq 8$ である。

［解 説］

経験がなくても，具体的に考えていけば，T_n や S_n は求めることができます。後半の対数計算も基本的です。

32　　[名古屋大・理]

(1)　まず, 2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ ……①, $y^2+by+a=0$ ……②が, それぞれ整数解をもつとき, a, b が整数より, ①と②の 2 つの解はともに整数である。

さて, $a=b>0$ とするとき, ②は①に一致し, 整数 k, l $(k \leqq l)$ を用いて, ①は,

$(x+k)(x+l)=0$, $x^2+(k+l)x+kl=0$ ………③

①③の係数を比べると, $k+l=a$ ……④, $kl=a$ ……⑤となり, ④⑤より,

$kl=k+l$, $(k-1)(l-1)=1$ ………⑥

ここで, ④⑤から $a>0$ に注意すると, k, l は自然数となり, $1 \leqq k \leqq l$ である。

すると, ⑥より, $(k-1,\ l-1)=(1,\ 1)$, $(k,\ l)=(2,\ 2)$

よって, $a=4$ である。

(2)　$a>b>0$ とするとき, (1)と同様に, 整数 k, l $(k \leqq l)$ を用いて, ①は,

$(x+k)(x+l)=0$, $x^2+(k+l)x+kl=0$

よって, $k+l=a$ ……⑦, $kl=b$ ……⑧となり, $a>b$ と⑦⑧から,

$kl<k+l$, $(k-1)(l-1)<1$ ………⑨

一方, $a>0$, $b>0$ から k, l は自然数となり, $1 \leqq k \leqq l$ であることから,

$(k-1)(l-1) \geqq 0$ ………⑩

⑨⑩より, $(k-1)(l-1)=0$ となり, $k=1$ である。

すると, ⑦から $a=l+1$, ⑧から $b=l$ となり, 2 次方程式②は,

$y^2+ly+(l+1)=0$ ………⑪

ここで, (1)と同様にして, 整数 m, n $(m \leqq n)$ を用いて, ⑪は,

$(y+m)(y+n)=0$, $y^2+(m+n)x+mn=0$ ………⑫

⑪⑫の係数を比べると, $m+n=l$ ……⑬, $mn=l+1$ ……⑭となり, ⑬⑭より,

$mn=m+n+1$, $(m-1)(n-1)=2$ ………⑮

ここで, ⑬⑭から $l>0$ に注意すると, m, n は自然数となり, $1 \leqq m \leqq n$ である。

すると, ⑮より, $(m-1,\ n-1)=(1,\ 2)$, $(m,\ n)=(2,\ 3)$

よって, $l=5$ から, $a=6$, $b=5$ である。

[解 説]

2 つの自然数の和と積の大小関係を, 和と積が等しいのは $2+2=2\times2$, 和が積より大きいのは $1+*>1\times*$ というイメージを用いて解いています。他の解法もいろいろ考えられそうな, 演習に価値ある整数問題です。

33 ［神戸大・理］

(1)　加法定理を利用すると,

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+i(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$$
$$=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$$

(2)　$z=\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$のとき, (1)より,

$$z\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{2(k+1)\pi}{n}+i\sin\frac{2(k+1)\pi}{n}\right)$$
$$=\sum_{k=2}^{n+1}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\cdots\cdots\cdots①$$

ここで, $\cos\frac{2(n+1)\pi}{n}+i\sin\frac{2(n+1)\pi}{n}=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ より,

$$\sum_{k=2}^{n+1}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\cdots\cdots\cdots②$$

①②より, $z\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)=z$

(3)　(2)より, $z\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}-1\right)=0\cdots\cdots\cdots③$

さて, $n\geqq2$ より $0<\frac{2\pi}{n}\leqq\pi$ となり, $\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\neq1$

よって, ③から $z=\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)=0$ となり, 実部, 虚部を比べ,

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{n}=\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k\pi}{n}=0$$

［解 説］

現行の課程では複素数が冷遇されているため, 複素数の極形式に関する問題は, あまり見かけなくなりました。しかし, 次の課程では復活しますので, その先取りでしょうか。

$\boxed{34}$ ［岡山大・文］

(1) 条件より，$a_1=0$ から，$a_2=2a_1=0$，$a_3=a_2+1=1$，$a_4=2a_3=2$，

$a_5=a_4+1=3$，$a_6=2a_5=6$，$a_7=a_6+1=7$，$a_8=2a_7=14$，

$a_9=a_8+1=15$，$a_{10}=2a_9=30$

(2) まず，$n+4$ と n の偶奇は一致し，

(i) n が奇数の場合

$$a_{n+4}=a_{n+3}+1=2a_{n+2}+1=2(a_{n+1}+1)+1=2a_{n+1}+3$$
$$=2\cdot 2a_n+3=4a_n+3\cdots\cdots\cdots①$$

(ii) n が偶数の場合

$$a_{n+4}=2a_{n+3}=2(a_{n+2}+1)=2a_{n+2}+2=2\cdot 2a_{n+1}+2=4a_{n+1}+2$$
$$=4(a_n+1)+2=4a_n+6\cdots\cdots\cdots②$$

(3) ①より $a_{n+4}=3(a_n+1)+a_n$，②より $a_{n+4}=3(a_n+2)+a_n$

これより，n の偶奇にかかわらず，a_{n+4} を 3 で割ったときの余りは，a_n を 3 で割ったときの余りに一致する。

すると，$a_1=a_2=0$，$a_3=1$，$a_4=2$ から，a_n を 3 で割ったときの余り r_n は，k を 0 以上の整数として，

$$r_n=0\ (n=4k+1,\ 4k+2),\ r_n=1\ (n=4k+3),\ r_n=2\ (n=4k+4)$$

［解 説］

誘導に乗っていけば結論まで到達します。漸化式に整数を融合した頻出問題です。

35　　　　［京都大・理］

$n \geqq 2$ のとき，$\dfrac{1}{2} < a_j < 1$　$(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ に対して，不等式

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n) > 1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{2^{n-1}}\right) \cdots\cdots\cdots (*)$$

が成り立つことを，以下，数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=2$ のとき　$\dfrac{1}{2} < a_1 < 1$，$\dfrac{1}{2} < a_2 < 1$ に対して，

$$(1-a_1)(1-a_2)-1+\left(a_1+\frac{a_2}{2}\right)=a_1a_2-\frac{a_2}{2}=a_2\left(a_1-\frac{1}{2}\right)>0$$

よって，不等式$(*)$は成立する。

(ii)　$n=k$ のとき　$\dfrac{1}{2} < a_j < 1$　$(j=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ に対して，

不等式 $(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_k) > 1-\left(a_1+\dfrac{a_2}{2}+\cdots+\dfrac{a_k}{2^{k-1}}\right)$ の成立を仮定する。

さて，$\dfrac{1}{2} < a_{k+1} < 1$ に対して，

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_k)(1-a_{k+1})-1+\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}+\frac{a_{k+1}}{2^k}\right)$$

$$>\left\{1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}\right)\right\}(1-a_{k+1})-1+\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}+\frac{a_{k+1}}{2^k}\right)$$

$$=-a_{k+1}+\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}\right)a_{k+1}+\frac{a_{k+1}}{2^k}$$

$$=\left(-1+a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^k}\right)a_{k+1}$$

$$>\left(-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}\right)a_{k+1}$$

ここで，$-1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^k}+\dfrac{1}{2^k}=-1+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1-\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{2^k}=0$ より，

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_k)(1-a_{k+1})>1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}+\frac{a_{k+1}}{2^k}\right)$$

(i)(ii)より，$n \geqq 2$ のとき，$\dfrac{1}{2} < a_j < 1$ に対して，不等式$(*)$が成立する。

［解　説］

数学的帰納法による不等式の証明問題です。予想よりはるかにスッキリ示せます。

36　　［東京大・理］

(1)　$a=\sqrt{2}$ のとき，$1<\sqrt{2}<2$ より，$a_1=\langle\sqrt{2}\rangle=\sqrt{2}-1$

$$a_2=\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right\rangle=\langle\sqrt{2}+1\rangle=\sqrt{2}-1$$

すると，帰納的に，$a_n=\sqrt{2}-1$ である。

(2)　任意の自然数 n に対して $a_n=a$ である条件を求めると，まず $n=1,\ 2$ に対して成立する必要があるので，

$$a_1=\langle a\rangle=a\ \cdots\cdots\cdots①,\quad a_2=\left\langle\frac{1}{a}\right\rangle=a\ \cdots\cdots\cdots②$$

逆に，①②が成立すると，任意の自然数 n に対して，帰納的に $a_n=a$ が成り立つ。

さて，$a\geqq\frac{1}{3}$ のとき，①より $\frac{1}{3}\leqq a<1$ であり，$1<\frac{1}{a}\leqq 3$ となる。

(i)　$1<\frac{1}{a}<2\left(\frac{1}{2}<a<1\right)$ のとき

$a_2=\left\langle\frac{1}{a}\right\rangle=\frac{1}{a}-1$ となるので，②より，$\frac{1}{a}-1=a$，$a^2+a-1=0$

$\frac{1}{2}<a<1$ から，$a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

(ii)　$\frac{1}{a}=2\left(a=\frac{1}{2}\right)$ のとき　$a_2=\langle 2\rangle=0$ となり，$a_n=a$ に反する。

(iii)　$2<\frac{1}{a}<3\left(\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}\right)$ のとき

$a_2=\left\langle\frac{1}{a}\right\rangle=\frac{1}{a}-2$ となるので，②より，$\frac{1}{a}-2=a$，$a^2+2a-1=0$

$\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}$ から，$a=-1+\sqrt{2}$

(iv)　$\frac{1}{a}=3\left(a=\frac{1}{3}\right)$ のとき　$a_2=\langle 3\rangle=0$ となり，$a_n=a$ に反する。

(i)〜(iv)より，$a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$，$-1+\sqrt{2}$

(3)　p を整数, q を自然数として，有理数 $a=\frac{p}{q}$ とおく。

まず, p を q で割り，その余りを r_1 とすると,

$$a_1=\left\langle\frac{p}{q}\right\rangle=\frac{r_1}{q}\quad(0\leqq r_1<q)$$

ここで，$r_1=0$ のときは $a_1=0$ となり，以下, $n\geqq 2$ で $a_n=0$ である。

次に，$r_1\neq 0$ のときは, q を r_1 で割り，その余りを r_2 とすると,

$$a_2=\left\langle\frac{q}{r_1}\right\rangle=\frac{r_2}{r_1}\quad(0\leqq r_2<r_1)$$

ここで，$r_2=0$ のときは $a_2=0$ となり，以下, $n\geqq 3$ で $a_n=0$ である。

さらに，$r_2\neq 0$ のときは，r_1 を r_2 で割り，その余りを r_3 とすると,

$$a_3=\left\langle \frac{r_1}{r_2} \right\rangle=\frac{r_3}{r_2} \quad (0 \leqq r_3 < r_2)$$

余りが 0 でないとき，同様に，この操作を繰り返すと，得られる数列 $\{r_n\}$ は，

$$q > r_1 > r_2 > r_3 > \cdots \geqq 0$$

すなわち，単調に減少する整数の数列が得られる。

すると，ある整数 $n=n_0 \leqq q$ において，$r_{n_0}=0$ となる。これより，$a_{n_0}=0$ となり，以下，$n \geqq n_0+1$ で $a_n=0$ である。

したがって，q 以上の自然数 n に対して，$a_n=0$ となる。

［解 説］

実数の小数部分が題材です。記号の意味を把握し，具体的な問題に適用する力が問われています。なお，(1)は(2)のヒントです。(3)では，正の整数が減少していくと，いつかは 0 になるという事実を利用しています。

$\boxed{37}$　　［東京工大］

正の整数 n, k に対して，$k^2 \leqq n < (k+1)^2$ のとき，$[\sqrt{n}\,] = k$ となる。

さて，$k^2 \leqq n < (k+1)^2$ の区間にある k の倍数は，k^2，$k(k+1)$ 以外を調べると，

$$k(k+2)-(k+1)^2 = -1 < 0,\ k(k+2) < (k+1)^2$$
$$k(k+3)-(k+1)^2 = k-1 \geqq 0,\ (k+1)^2 \leqq k(k+3)$$

これより，k^2，$k(k+1)$，$k(k+2)$ の 3 個となる。

すると，10000 以下の整数 n で，$[\sqrt{n}\,]$ が n の約数となるのは，$10000 = 100^2$ に注目すると，$1^2 \leqq n < 2^2$，$2^2 \leqq n < 3^2$，$\cdots$，$99^2 \leqq n < 100^2$ の各区間に 3 個ずつあり，これに 10000 も加えて，合わせて，$3\times 99+1 = 298$ 個存在する。

［解 説］

読解力の問題です。最初は実験をして，考え方を整理しました。ただ，結論は意外なほどシンプルなものでした。

38　　［一橋大］

(1)　3 辺の長さが $x,\ y,\ z\ (x<y<z)$ で 1 つの角が $120°$ の三角形は，最大辺の対角が $120°$ となるので，余弦定理より，

$$z^2=x^2+y^2-2xy\cos120°,\ z^2=x^2+y^2+xy\ \cdots\cdots\cdots①$$

条件より，$x+y-z=2$ から，$z=x+y-2\ \cdots\cdots\cdots②$

①②より，$(x+y-2)^2=x^2+y^2+xy$，$xy-4x-4y+4=0$

ここで，x, y, z は正の整数から，$(x-4)(y-4)=12$

$-4<x-4<y-4$ より，$(x-4,\ y-4)=(1,\ 12),\ (2,\ 6),\ (3,\ 4)$，

$$(x,\ y)=(5,\ 16),\ (6,\ 10),\ (7,\ 8)$$

よって，②より，$(x,\ y,\ z)=(5,\ 16,\ 19),\ (6,\ 10,\ 14),\ (7,\ 8,\ 13)$

(2)　条件より，$x+y-z=3$ から，$z=x+y-3\ \cdots\cdots\cdots③$

①③より，$(x+y-3)^2=x^2+y^2+xy$，$xy-6x-6y+9=0$

ここで，x, y は正の整数から，$(x-6)(y-6)=27$

$-6<x-6<y-6$ より，$(x-6,\ y-6)=(1,\ 27),\ (3,\ 9)$，

$$(x,\ y)=(7,\ 33),\ (9,\ 15)$$

よって，③より，$(x,\ y,\ z)=(7,\ 33,\ 37),\ (9,\ 15,\ 21)$

(3)　条件より，$x+y-z=2^a3^b$ から，$z=x+y-2^a3^b\ \cdots\cdots\cdots④$

①④より，$(x+y-2^a3^b)^2=x^2+y^2+xy$，$xy-2^{a+1}3^bx-2^{a+1}3^by+2^{2a}3^{2b}=0$

ここで，x, y は正の整数から，$(x-2^{a+1}3^b)(y-2^{a+1}3^b)=2^{2a}3^{2b+1}\ \cdots\cdots\cdots⑤$

さて，$x<y<z$ から，④に代入すると，$2^a3^b<x<y$ となり，

$$-2^a3^b<x-2^{a+1}3^b<y-2^{a+1}3^b\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

ここで，$-2^a3^b<x-2^{a+1}3^b<y-2^{a+1}3^b<0$ と仮定すると，

$$(x-2^{a+1}3^b)(y-2^{a+1}3^b)<(2^a3^b)^2=2^{2a}3^{2b}$$

すると，$2^{2a}3^{2b}<2^{2a}3^{2b+1}$ から，⑤を満たす x, y は存在しない。

よって，$2^{2a}3^{2b+1}$ の約数 $x-2^{a+1}3^b$，$y-2^{a+1}3^b$ はともに正となる。

一方，$2^{2a}3^{2b+1}$ の正の約数の個数は，$(2a+1)(2b+2)$ であり，$2^{2a}3^{2b+1}$ は平方数でないので，$x-2^{a+1}3^b=y-2^{a+1}3^b$ の場合はありえない。

これから，⑤⑥を満たす $(x,\ y)$ の個数は，$\dfrac{1}{2}(2a+1)(2b+2)=(2a+1)(b+1)$ となる。すなわち，①④を満たす $(x,\ y,\ z)$ の個数は，$(2a+1)(b+1)$ である。

［解　説］

(1)(2)は頻出タイプの問題ですが，それを一般化した(3)は，論理をつめるのに時間がかかります。

39　　［千葉大・医］

(1)　まず，$a_n = p + qn + rn^2$ に対し，数列 $\{a_n\}$ が整数列となる必要十分条件は，$a_1 = p + q + r$ が整数であり，しかも $a_{n+1} - a_n$ が整数であることより，

$$a_{n+1} - a_n = \{p + q(n+1) + r(n+1)^2\} - (p + qn + rn^2) = (q + r) + 2rn$$

これより，数列 $\{a_n\}$ が整数列となる必要十分条件は，$p + q + r$ と $q + r$ と $2r$ が整数，すなわち p と $q + r$ と $2r$ が整数となることである。

よって，数列 $\{a_n\}$ が整数列ならば，$2r$ は整数である。

(2)　$b_n = p + qn + rn^2 + sn^3$ に対し，数列 $\{b_n\}$ が整数列となる必要十分条件は，$b_1 = p + q + r + s$ が整数であり，しかも $b_{n+1} - b_n$ が整数である。

ここで，$c_n = b_{n+1} - b_n$ とおくと，

$$c_n = \{p + q(n+1) + r(n+1)^2 + s(n+1)^3\} - (p + qn + rn^2 + sn^3)$$
$$= (q + r + s) + (2r + 3s)n + 3sn^2$$

(1)の結果を利用すると，数列 $\{c_n\}$ が整数列となる必要十分条件は，$q + r + s$ と $2r + 3s + 3s = 2r + 6s$ と $2\cdot 3s = 6s$ が整数となることである。

よって，数列 $\{b_n\}$ が整数列となる必要十分条件は，$p + q + r + s$ と $q + r + s$ と $2r + 6s$ と $6s$ が整数，すなわち p と $q + r + s$ と $2r$ と $6s$ が整数となることである。

［解　説］

整数と整式の有名問題ですが，次数下げの方法を知らないとかなり面倒です。(1)は(2)での利用を考えて必要十分条件を求めています。

40　　［京都大・理］

(1)　$\sqrt[3]{2}$ が有理数であると仮定すると, p, q を互いに素である自然数として,

$$\sqrt[3]{2}=\frac{q}{p},\ q^3=2p^3\cdots\cdots\cdots①$$

すると, q は 2 の倍数となり, k を自然数として, $q=2k\cdots\cdots\cdots②$

②を①に代入すると, $8k^3=2p^3$, $p^3=4k^3$

すると, p も 2 の倍数となり, p, q が互いに素であることに反する。

よって, $\sqrt[3]{2}$ が有理数でない, すなわち無理数である。

(2)　有理数を係数とする多項式 $P(x)$ を, x^3-2 で割った商を $Q(x)$ とし, 余りを ax^2+bx+c （a, b, c は有理数）とおくと,

$$P(x)=(x^3-2)Q(x)+ax^2+bx+c\cdots\cdots\cdots③$$

ここで, $\alpha=\sqrt[3]{2}$ とすると, 条件より $P(\alpha)=0$ なので, $a\alpha^2+b\alpha+c=0\cdots\cdots\cdots④$

次に, x^3-2 を ax^2+bx+c で割ると, $a\neq0$ のとき,

$$x^3-2=(ax^2+bx+c)\Big(\frac{1}{a}x-\frac{b}{a^2}\Big)+\Big(-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{a^2}\Big)x+\Big(-2+\frac{bc}{a^2}\Big)\cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤に $x=\alpha$ を代入すると, ④より, $\Big(-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{a^2}\Big)\alpha+\Big(-2+\frac{bc}{a^2}\Big)=0$

a, b, c は有理数であり, (1)から α は無理数なので,

$$-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{a^2}=0\cdots\cdots\cdots⑥,\ -2+\frac{bc}{a^2}=0\cdots\cdots\cdots⑦$$

⑥より, $c=\frac{b^2}{a}$ となり, ⑦に代入すると, $\Big(\frac{b}{a}\Big)^3=2$ から, $\frac{b}{a}=\sqrt[3]{2}$

ところが, 左辺が有理数, 右辺が無理数なので, 成立しない。

よって, $a=0\cdots\cdots⑧$である。

すると, ④より $b\alpha+c=0$ となり, b, c は有理数, α は無理数なので,

$$b=c=0\cdots\cdots⑨$$

⑧⑨を③に代入すると, $P(x)=(x^3-2)Q(x)$

したがって, $P(x)$ は x^3-2 で割り切れる。

［解　説］

(1)は有名問題。(2)はこの結論を利用するのですが, 一筋縄ではいきません。

41　　［東京大・理］

(1)　k, l, n を, $k \geqq 1$, $l \geqq 1$, $n \geqq 2$ を満たす整数として, $k(k+1)=l^n$ ……①と仮定すると, k, $k+1$ のいずれも l^n の約数となる。

さて, $(k+1)-k=1$ より, k, $k+1$ は互いに素なので, a, b を正の整数として,

$$k=a^n,\ k+1=b^n$$

k を消去すると,

$$b^n-a^n=1,\ (b-a)(b^{n-1}+ab^{n-2}+\cdots+a^{n-1})=1$$

すると, $b-a>0$ から, $b^{n-1}+ab^{n-2}+\cdots+a^{n-1}=1$ ………②

ところが, $b^{n-1}+ab^{n-2}+\cdots+a^{n-1} \geqq n \geqq 2$ となり, ②は成立しない。すなわち, ①を満たす k, l, n は存在しない。

よって, 連続する 2 個の自然数の積は n 乗数ではない。

(2)　k, l, n を, $k \geqq 1$, $l \geqq 1$, $n \geqq 3$ を満たす整数として, 次式を仮定すると,

$$k(k+1)(k+2)\cdots(k+n-1)=l^n \text{ ………③}$$

ここで, $k<k+1<k+2<\cdots<k+n-1$ から,

$$k^n<l^n<(k+n-1)^n,\ k<l<k+n-1$$

これより, l は $k+1$, $k+2$, …, $k+n-2$ のいずれかと等しくなる。

そこで, p を $1 \leqq p \leqq n-2$ を満たす整数として, $l=k+p$ とおくと, ③は,

$$k(k+1)\cdots(k+p)\cdots(k+n-1)=(k+p)^n$$

$$k(k+1)\cdots(k+p-1)(k+p+1)\cdots(k+n-1)=(k+p)^{n-1} \text{ ………④}$$

ところが, $k+p+1$ は $k+p$ と互いに素であり, $(k+p)^{n-1}$ の約数とはならないので, ④は成立しない。すなわち, ③を満たす k, l, n は存在しない。

よって, $n \geqq 3$ のとき, 連続する n 個の自然数の積は n 乗数ではない。

(1)より, $n=2$ のときも合わせて, 連続する n 個の自然数の積は n 乗数ではない。

［解 説］

(2)は, (1)との関連から数学的帰納法による証明と思い込みましたが, うまくいきません。そのため, 軌道修正にたいへんな時間を費やしてしまいました。

$\boxed{42}$　　　　［熊本大・医］

(1)　a_1，a_2，$\cdots$，a_n が，$(n-4)$ 個の 1 と 4 個の -1 で構成される数列 a_k に対して，数列 $\{a_k\}$ 全体は，

$$ {}_n\mathrm{C}_4=\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3) \ （通り） $$

(2)　$b_k=a_1a_2\cdots a_k$ より，a_1，a_2，$\cdots$，a_k の中に -1 が 1 個または 3 個あると $b_k=-1$，それ以外は $b_k=1$ である。

すなわち，$1\leqq p<q<r<s\leqq n$ として，$a_p=a_q=a_r=a_s=-1$ とすると，

$$ b_p=b_r=-1,\ b_q=b_s=1 $$

さて，$b_1+b_2+\cdots+b_n$ が最大値をとるのは，$b_k=-1$ となる k が 2 個，$b_k=1$ となる k が $(n-2)$ 個，すなわち $q=p+1$，$s=r+1$ の場合より，その値は，

$$ b_1+b_2+\cdots+b_n=(-1)\cdot 2+1\cdot(n-2)=n-4 $$

また，$b_1+b_2+\cdots+b_n$ が最大値をとるのは，$b_k=1$ となる k が 2 個，$b_k=-1$ となる k が $(n-2)$ 個，すなわち $p=1$，$r=q+1$，$s=n$ の場合より，その値は，

$$ b_1+b_2+\cdots+b_n=1\cdot 2+(-1)\cdot(n-2)=-n+4 $$

(3)　$b_1+b_2+\cdots+b_n$ が最大値 $n-4$ をとるのは，$(n-4)$ 個の 1 と連続した 2 個の -1 を 2 組並べると考えて，このとき数列 $\{a_k\}$ は，

$$ {}_{n-2}\mathrm{C}_2=\frac{1}{2}(n-2)(n-3) \ （通り） $$

$b_1+b_2+\cdots+b_n$ が最小値 $-n+4$ をとるのは，$(n-4)$ 個の 1 と連続した 2 個の -1 を 1 組並べると考えて，このとき数列 $\{a_k\}$ は，

$$ {}_{n-3}\mathrm{C}_1=n-3 \ （通り） $$

［解 説］

場合の数と数列の融合問題です。題意を把握する力，さらに考えた過程を記述する力が要求されています。おもしろい問題です。

$\boxed{43}$ ［岡山大・理］

(1)　$f(x)=4x(1-x)$ に対して，条件より，

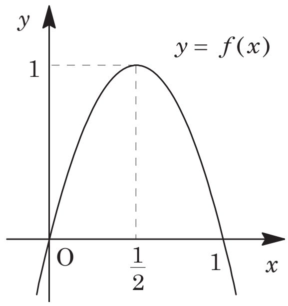
$$f_2(x)=f_1(f(x))=f(f(x))=4f(x)(1-f(x))$$

すると，$f_2(x)=0$ の解は，

(i)　$f(x)=0$ のとき　$x=0,\ 1$

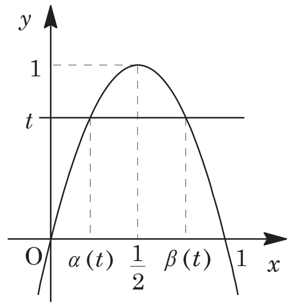
(ii)　$f(x)=1$ のとき　$x=\frac{1}{2}$

(i)(ii)より，$x=0,\ \frac{1}{2},\ 1$



(2)　$0\leqq t<1$ を満たす定数 t に対して，$f(x)=t$ の解を $\alpha(t)$，$\beta(t)$ $(\alpha(t)<\beta(t))$ とすると，

$$0\leqq\alpha(t)<\frac{1}{2}<\beta(t)\leqq 1$$



さて，$f_{n+1}(x)=f_n(f(x))$ より，$0\leqq c<1$ かつ $f_n(c)=0$ を満たす c に対して，

$$f_{n+1}(\alpha(c))=f_n(f(\alpha(c)))=f_n(c)=0$$
$$f_{n+1}(\beta(c))=f_n(f(\beta(c)))=f_n(c)=0$$

よって，$\alpha(c)$，$\beta(c)$ は $f_{n+1}(x)=0$ の解である。

(3)　まず，$x=0,\ 1$ が $f_n(x)=0$ の解であることを，数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1$ のとき　$f_1(x)=4x(1-x)$ より，$x=0,\ 1$ は $f_1(x)=0$ の解である。

(ii)　$n=k$ のとき　$x=0,\ 1$ が $f_k(x)=0$ の解であると仮定すると，

$$f_{k+1}(0)=f_k(f(0))=f_k(0)=0,\quad f_{k+1}(1)=f_k(f(1))=f_k(0)=0$$

$x=0,\ 1$ は $f_{k+1}(x)=0$ の解である。

(i)(ii)より，$x=0,\ 1$ は，ともに $f_n(x)=0$ の解である。

さて，$0\leqq x\leqq 1$ の範囲で，$f_n(x)=0$ の異なる S_n 個の解を，

$$0=c_1<c_2<c_3<\cdots<c_{S_n-1}<c_{S_n}=1$$

すると，$f_{n+1}(x)=f_n(f(x))=0$ の解は，$f(x)=c_1,\ c_2,\ c_3,\ \cdots,\ c_{S_n-1},\ c_{S_n}$ より求めることができる。

(a)　$f(x)=c_1,\ c_2,\ c_3,\ \cdots,\ c_{S_n-1}$ のとき

(2)より，$\alpha(c_i)$，$\beta(c_i)$ $(1\leqq i\leqq S_n-1)$ は，$f_{n+1}(x)=0$ の異なる解となり，その個数は $2(S_n-1)$ である。ただし，$0\leqq\alpha(c_i)<\frac{1}{2}<\beta(c_i)\leqq 1$ である。

(b)　$f(x)=c_{S_n}$ のとき

$f(x)=1$ より $x=\frac{1}{2}$ となり，$\frac{1}{2}$ が $f_{n+1}(x)=0$ の解である。

(a)(b)より，$f_n(x)=0$ の異なる解の個数 S_n について，$S_1=2$ で，

$$S_{n+1}=2(S_n-1)+1,\quad S_{n+1}=2S_n-1\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$を $S_{n+1}-1=2(S_n-1)$ と変形すると，$S_n-1=(S_1-1)\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$ となり，

$$S_n=2^{n-1}+1$$

［解 説］

合成関数の解の個数を題材としたおもしろい問題です。(1)と(2)が秀逸な誘導となっています。 $n=1,\ 2,\ 3$ と具体的に考えて方針を立てましたが, 解答例の記述には, かなり難航しました。

44

［大阪大・理］

まず，正の整数 n を 3 で割った余りと，n^3，n^5，n^7 をそれぞれ 3 で割った余りは等しくなる。

そこで, n を 3 で割った余りと，$n+1$，n^3+3，n^5+5，n^7+7 をそれぞれ 3 で割った余りを表にまとめると，右のようになる。

n	0	1	2
$n+1$	1	2	0
n^3+3	0	1	2
n^5+5	2	0	1
n^7+7	1	2	0

(i)　n を 3 で割った余りが 0 のとき

n^3+3 は 3 の倍数となり，$n^3+3\geqq 30$ なので，n^3+3 は素数ではない。

(ii)　n を 3 で割った余りが 1 のとき

n^5+5 は 3 の倍数となり，$n^5+5\geqq 6$ なので，n^5+5 は素数ではない。

(iii) n を 3 で割った余りが 2 のとき

n^7+7 は 3 の倍数となり，$n^7+7\geqq 135$ なので，n^7+7 は素数ではない。

(i)～(iii)より，4 個の整数 $n+1$，n^3+3，n^5+5，n^7+7 がすべて素数となるような正の整数 n は存在しない。

［解 説］

n を偶数として，$n+1$，n^3+3，n^5+5，n^7+7 を計算していくと，素数でないのは 3 の倍数という共通項が見つかります。すると，行うべきことは明白です。なお, $n+1$ については，結果として，必要ありませんでした。

$\boxed{45}$ ［千葉大］

(1) $$ {}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1}\times\left(\frac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k}-\frac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k}\right)=\frac{(n+k+1)!}{(k+1)!\,n!}\left\{\frac{k!\,n!}{(n+k)!}-\frac{k!\,(n+1)!}{(n+k+1)!}\right\}$$
$$=\frac{n+k+1}{k+1}-\frac{n+1}{k+1}=\frac{k}{k+1}$$

(2) (1)の等式について，$k=2$ とすると，
$$ {}_{n+3}\mathrm{C}_3\times\left(\frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2}-\frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2}\right)=\frac{2}{3},\quad \frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_3}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2}-\frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2}\right)$$
これより，m が 3 以上の整数のとき，$S=\frac{1}{{}_3\mathrm{C}_3}+\frac{1}{{}_4\mathrm{C}_3}+\frac{1}{{}_5\mathrm{C}_3}+\cdots+\frac{1}{{}_m\mathrm{C}_3}$ とおくと，
$$S=\sum_{n=0}^{m-3}\frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_3}=\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{m-3}\left(\frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2}-\frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2}\right)$$
$$=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{{}_2\mathrm{C}_2}-\frac{1}{{}_3\mathrm{C}_2}\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{{}_3\mathrm{C}_2}-\frac{1}{{}_4\mathrm{C}_2}\right)+\cdots+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{{}_{m-1}\mathrm{C}_2}-\frac{1}{{}_m\mathrm{C}_2}\right)$$
$$=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{{}_2\mathrm{C}_2}-\frac{1}{{}_m\mathrm{C}_2}\right)=\frac{3}{2}\left\{1-\frac{2}{m(m-1)}\right\}=\frac{3(m+1)(m-2)}{2m(m-1)}$$

［解 説］

二項係数の計算問題です。(1)の誘導の利用の方法については，迷いはあまりないと思えます。

46　　　　［京都大・文］

(1)　整式 x^n を整式 $(x-k)(x-k-1)$ で割った商を $q(x)$，余りを $ax+b$ とするとき，

$$x^n=(x-k)(x-k-1)q(x)+ax+b\ \cdots\cdots\cdots①$$

①に $x=k,\ k+1$ をそれぞれ代入すると，

$$k^n=ak+b\ \cdots\cdots\cdots②,\ (k+1)^n=ak+a+b\ \cdots\cdots\cdots③$$

②③より，$a=(k+1)^n-k^n$ となり，n と k は自然数なので，a は整数である。

すると，②は，$b=k^n-ak$ なので，b も整数である。

(2)　a と b がともに素数 p で割り切れるとすると，a_0，b_0 を整数として，

$$a=a_0p,\ b=b_0p$$

②③に代入すると，

$$k^n=a_0pk+b_0p\ \cdots\cdots\cdots④,\ (k+1)^n=a_0pk+a_0p+b_0p\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

④より，k^n は p を約数にもつ，すなわち k は p を約数にもつ。

⑤より，$(k+1)^n$ は p を約数にもつ，すなわち $k+1$ は p を約数にもつ。

すると，k と $k+1$ はともに素数 p を約数にもつことになるが，これは k と $k+1$ が互いに素であることと矛盾する。

よって，a と b をともに割り切る素数は存在しない。

［解　説］

$(k+1)-k=1$ から，k と $k+1$ は互いに素です。昨年，東大・理系でも，この点に着目する問題が出されています。

47　　［京都大・理］

整式 x^n を整式 x^2-2x-1 で割った商を $q_n(x)$，余りを a_nx+b_n とすると，

$$x^n=(x^2-2x-1)q_n(x)+a_nx+b_n \cdots\cdots\cdots ①$$

このとき，a_n と b_n は整数であることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1$ のとき　$a_1=1$，$b_1=0$ でともに整数である。

(ii)　$n=k$ のとき　a_k と b_k がともに整数であると仮定し，①より，

$$x^k=(x^2-2x-1)q_k(x)+a_kx+b_k$$

$$\begin{aligned}x^{k+1}&=(x^2-2x-1)xq_k(x)+a_kx^2+b_kx\\&=(x^2-2x-1)xq_k(x)+a_k(x^2-2x-1)+a_k(2x+1)+b_kx\\&=(x^2-2x-1)\{xq_k(x)+a_k\}+(2a_k+b_k)x+a_k\end{aligned}$$

整式 x^{k+1} を整式 x^2-2x-1 で割った余りは $a_{k+1}x+b_{k+1}$ より，

$$a_{k+1}=2a_k+b_k \cdots\cdots\cdots ②,\quad b_{k+1}=a_k \cdots\cdots\cdots ③$$

これより，a_{k+1}，b_{k+1} はともに整数である。

(i)(ii)より，a_n と b_n は整数である。

次に，a_n と b_n をともに割り切る素数は存在しないことを証明する。

(i)　$n=1$ のとき　$a_1=1$，$b_1=0$ で，ともに割り切る素数は存在しない。

(ii)　$n=k$ のとき　a_k と b_k をともに割り切る素数は存在しないと仮定する。

ここで，a_{k+1}，b_{k+1} がともに素数 p で割り切れるとすると，②③より，

$$a_k=b_{k+1},\quad b_k=a_{k+1}-2a_k=a_{k+1}-2b_{k+1}$$

これより，a_k，b_k も素数 p で割り切れ，仮定に反する。

よって，a_{k+1} と b_{k+1} をともに割り切る素数は存在しない。

(i)(ii)より，a_n と b_n をともに割り切る素数は存在しない。

以上より，整式 x^n を整式 x^2-2x-1 で割った余りを $ax+b$ とするとき，a と b は整数であり，さらにそれらをともに割り切る素数は存在しない。

［解　説］

見かけは，本年の文系の類題ですが，内容的には 2002 年の東大の文理共通の 2 番の類題です。誘導はありましたが……。

48　　　　［筑波大・理］

(1) 条件より，$a_1=a$，$b_1=b$，$c_1=c$ であり，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ において，

$$a_{n+1}=-b_n-c_n\,,\ b_{n+1}=-c_n-a_n\,,\ c_{n+1}=-a_n-b_n$$

さて，$p_n=a_n+b_n+c_n$ とすると，$p_1=a+b+c$ であり，

$$p_{n+1}=a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1}=-2(a_n+b_n+c_n)=-2p_n$$

よって，$p_n=p_1(-2)^{n-1}=(a+b+c)(-2)^{n-1}$ となり，第 n 項までの和 S_n は，

$$S_n=\frac{(a+b+c)\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}=\frac{a+b+c}{3}\{1-(-2)^n\}$$

(2) (1)より，$a_{n+1}=-b_n-c_n=a_n-p_n$ となり，$n\geqq 2$ において，

$$a_n=a_1-\sum_{k=1}^{n-1}p_k=a-\frac{a+b+c}{3}\{1-(-2)^{n-1}\}\ \text{（}n=1\text{のときも成立）}$$

同様にして，$b_n=b-\dfrac{a+b+c}{3}\{1-(-2)^{n-1}\}$，$c_n=c-\dfrac{a+b+c}{3}\{1-(-2)^{n-1}\}$

(3) $q_n=(-1)^n\{(a_n)^2+(b_n)^2+(c_n)^2\}$，$T_n=\displaystyle\sum_{l=1}^{2n}q_l$ に対し，$a+b+c$ が奇数のとき，

すべての自然数 n において T_n は正の奇数であることを数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n=1$ のとき　$T_1=q_1+q_2$ より，

$$\begin{aligned}T_1&=-(a_1)^2-(b_1)^2-(c_1)^2+(a_2)^2+(b_2)^2+(c_2)^2\\&=-a^2-b^2-c^2+(-b-c)^2+(-c-a)^2+(-a-b)^2\\&=a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab=(a+b+c)^2\end{aligned}$$

よって，T_1 は正の奇数である。

(ii) $n=k$ のとき　T_k が正の奇数であると仮定すると，

$$\begin{aligned}T_{k+1}&=T_k+q_{2k+1}+q_{2k+2}\\&=T_k-(a_{2k+1})^2-(b_{2k+1})^2-(c_{2k+1})^2+(a_{2k+2})^2+(b_{2k+2})^2+(c_{2k+2})^2\\&=T_k+(a_{2k+1}+b_{2k+1}+c_{2k+1})^2=T_k+(p_{2k+1})^2\end{aligned}$$

ここで，(1)から，$(p_{2k+1})^2=\{(a+b+c)(-2)^{2k}\}^2=(a+b+c)^2\cdot 16^k$ となり，$(p_{2k+1})^2$ は正の偶数であるので，T_{k+1} は正の奇数となる。

(i)(ii)より，すべての自然数 n において T_n は正の奇数である。

［解 説］

連立漸化式の基本的な問題です。ただ，出現する文字が多く，気疲れしてしまいます。(3)は，証明ですが，やや省略気味に記しています。

49　　　　［京都大・理］

$N \geqq 2$ より，$a_1 = 2^N - 3$ は奇数なので，$a_2 = \dfrac{a_1 - 1}{2} = \dfrac{2^N - 3 - 1}{2} = 2^{N-1} - 2$

a_2 は偶数となり，$a_3 = \dfrac{a_2}{2} = \dfrac{2^{N-1} - 2}{2} = 2^{N-2} - 1$

すると，$N = 2$ のとき $a_3 = 0$ から a_3 は偶数となり，$a_4 = \dfrac{a_3}{2} = 0$，また $N \geqq 3$ のときは a_3 は奇数となり，$a_4 = \dfrac{a_3 - 1}{2} = \dfrac{2^{N-2} - 1 - 1}{2} = 2^{N-3} - 1$

さらに，$2 \leqq N \leqq 3$ のとき $a_4 = 0$ から a_4 は偶数となり，$a_5 = \dfrac{a_4}{2} = 0$，また $N \geqq 4$ のときは a_4 は奇数となり，$a_5 = \dfrac{a_4 - 1}{2} = \dfrac{2^{N-3} - 1 - 1}{2} = 2^{N-4} - 1$

以上より，$a_1 = 2^N - 3$，$a_2 = 2^{N-1} - 2$ で，$n \geqq 3$ のときは，帰納的に，a_n を以下のようにまとめることができる。

(i)　$n \geqq N + 1$ のとき　$a_n = 0$

(ii)　$n \leqq N$ のとき　$a_n = 2^{N-n+1} - 1$

さて，$S_M = \displaystyle\sum_{n=1}^{M} a_n$ とおくと，$N \geqq 3$ のとき，

$$\begin{aligned} S_M \leqq S_N &= (2^N - 3) + (2^{N-1} - 2) + \sum_{n=3}^{N} a_n \\ &= (2^N - 3) + (2^{N-1} - 2) + (2^{N-2} - 1) + (2^{N-3} - 1) + \cdots + (2^1 - 1) \\ &= \frac{2(2^N - 1)}{2 - 1} - N - 3 = 2^{N+1} - N - 5 \end{aligned}$$

また，$N = 2$ のときは，$a_1 = 2^2 - 3 = 1$，$a_2 = 2^1 - 2 = 0$，$n \geqq 3$ のとき $a_n = 0$ より，

$$S_M = 1 + 0 + 0 + \cdots + 0 = 1 = 2^3 - 2 - 5 = 2^{N+1} - N - 5$$

したがって，どのような自然数 M に対しても，$\displaystyle\sum_{n=1}^{M} a_n \leqq 2^{N+1} - N - 5$ が成立する。

［解 説］

n が大きくなると a_n は 0 になって，和は変わらないというような大雑把なとらえ方が必要です。ただ，文字がたくさん出るので，詰めの作業は気疲れします。

50　　［名古屋大・理］

(1)　二項定理を利用すると，$S_k(1)=1$，$S_k(2)=1^k+2^k$ より，

$$\begin{aligned}T_m(1)&={}_m\mathrm{C}_1S_1(1)+{}_m\mathrm{C}_2S_2(1)+{}_m\mathrm{C}_3S_3(1)+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}S_{m-1}(1)\\&={}_m\mathrm{C}_1+{}_m\mathrm{C}_2+{}_m\mathrm{C}_3+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}=(1+1)^m-{}_m\mathrm{C}_0-{}_m\mathrm{C}_m=2^m-2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_m(2)&={}_m\mathrm{C}_1S_1(2)+{}_m\mathrm{C}_2S_2(2)+{}_m\mathrm{C}_3S_3(2)+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}S_{m-1}(2)\\&={}_m\mathrm{C}_1(1+2^1)+{}_m\mathrm{C}_2(1+2^2)+{}_m\mathrm{C}_3(1+2^3)+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}(1+2^{m-1})\\&=T_m(1)+\{(1+2)^m-{}_m\mathrm{C}_02^0-{}_m\mathrm{C}_m2^m\}\\&=2^m-2+3^m-1-2^m=3^m-3\end{aligned}$$

(2)　$T_m(n)=(n+1)^m-(n+1)$ であることを，以下，数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1$ のとき　(1)より成立する。

(ii)　$n=l$ のとき　$T_m(l)=(l+1)^m-(l+1)$ であると仮定すると，条件より，

$$\begin{aligned}T_m(l+1)&={}_m\mathrm{C}_1S_1(l+1)+{}_m\mathrm{C}_2S_2(l+1)+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}S_{m-1}(l+1)\\&={}_m\mathrm{C}_1\{1+2+\cdots+l+(l+1)\}+{}_m\mathrm{C}_2\{1^2+2^2+\cdots+l^2+(l+1)^2\}\\&\quad+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}\{1^{m-1}+2^{m-1}+\cdots+l^{m-1}+(l+1)^{m-1}\}\\&=T_m(l)+{}_m\mathrm{C}_1(l+1)+{}_m\mathrm{C}_2(l+1)^2+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}(l+1)^{m-1}\\&=(l+1)^m-(l+1)+\{(1+l+1)^m-{}_m\mathrm{C}_0(l+1)^0-{}_m\mathrm{C}_m(l+1)^m\}\\&=(l+1)^m-(l+1)+(l+2)^m-1-(l+1)^m=(l+2)^m-(l+2)\end{aligned}$$

(i)(ii)より，$T_m(n)=(n+1)^m-(n+1)$ ………(＊)

(3)　まず，$p=3$ のときは，$S_1(2)=1+2$ は 3 の倍数となり題意を満たし，$S_k(p-1)$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ p-2)$ は p の倍数である。

次に，p が 5 以上の素数のとき，$S_k(p-1)$　$(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ p-2)$ は p の倍数であることを，以下，数学的帰納法で証明する。

(i)　$k=1$ のとき

$m=2$，$n=p-1$ とすると，条件より，$T_2(p-1)={}_2\mathrm{C}_1S_1(p-1)$

すると，(＊)から，$(p-1+1)^2-(p-1+1)=2S_1(p-1)$

$2S_1(p-1)=p(p-1)$

p は 5 以上の素数より，$S_1(p-1)$ は p の倍数である。

(ii)　$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ l$　$(l\leqq p-3)$ のとき

$S_k(p-1)$ が p の倍数であると仮定すると，条件より，

$$\begin{aligned}T_{l+2}(p-1)&={}_{l+2}\mathrm{C}_1S_1(p-1)+{}_{l+2}\mathrm{C}_2S_2(p-1)+{}_{l+2}\mathrm{C}_3S_3(p-1)\\&\quad+\cdots+{}_{l+2}\mathrm{C}_lS_l(p-1)+{}_{l+2}\mathrm{C}_{l+1}S_{l+1}(p-1)\end{aligned}$$

(＊)から，$T_{l+2}(p-1)=p^{l+2}-p=p(p^{l+1}-1)$ となり，

$$\begin{aligned}(l+2)S_{l+1}(p-1)&=p(p^{l+1}-1)-{}_{l+2}\mathrm{C}_1S_1(p-1)-{}_{l+2}\mathrm{C}_2S_2(p-1)\\&\quad-{}_{l+2}\mathrm{C}_3S_3(p-1)-\cdots-{}_{l+2}\mathrm{C}_lS_l(p-1)\end{aligned}$$

これより，$(l+2)S_{l+1}(p-1)$ は p の倍数となる。

すると，p は 5 以上の素数で，$l+2 \leqq p-1$ から，$l+2$ と p は互いに素となるので，$S_{l+1}(p-1)$ は p の倍数である。

(i)(ii)より，$S_k(p-1)$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ p-2)$ は p の倍数である。

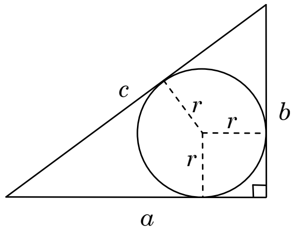
［解 説］

二項定理と整数の融合問題です。(3)の証明に対して，巧妙な誘導がつけられています。また，帰納法における $l \leqq p-3$ という条件から，$p=3$ は特別に扱っています。

$\boxed{51}$ ［神戸大］

(1)　$a^2+b^2=(n^2-m^2)^2+(2mn)^2=n^4+2m^2n^2+m^4=(n^2+m^2)^2=c^2$

(2)　(1)より，3 辺の長さが $a,\ b,\ c$ の三角形は，斜辺の長さが c の直角三角形なので，内接円の半径を r とすると，



$$(a-r)+(b-r)=c$$

$$r=\frac{1}{2}(a+b-c)=\frac{1}{2}(n^2-m^2+2mn-n^2-m^2)$$

$$=mn-m^2=m(n-m)\cdots\cdots\cdots(*)$$

(3)　まず，三角形の面積 S は，$S=\dfrac{1}{2}ab=mn(n^2-m^2)$

r が素数のとき，$(*)$より，$(m,\ n-m)=(1,\ r)$，$(r,\ 1)$

(i)　$(m,\ n-m)=(1,\ r)$ のとき　$n-1=r$ から，$n=r+1$

$$S=1\cdot(r+1)\{(r+1)^2-1\}=r(r+1)(r+2)$$

(ii)　$(m,\ n-m)=(r,\ 1)$ のとき　$n-r=1$ から，$n=r+1$

$$S=r(r+1)\{(r+1)^2-r^2\}=r(r+1)(2r+1)$$

(4)　(i)　$S=r(r+1)(r+2)$ のとき

S は連続する 3 つの自然数の積なので, 6 の倍数である。

(ii)　$S=r(r+1)(2r+1)$ のとき

$$S=r(r+1)(r-1+r+2)=(r-1)r(r+1)+r(r+1)(r+2)$$

S は連続する 3 つの自然数の積の和なので, 6 の倍数である。

(i)(ii)より，いずれの場合も，S は 6 で割り切れる。

[解 説]

直角三角形の内接円を題材にした頻出問題です。(4)の(ii)は式変形で示しましたが, 普通に, 3 で割った余りに着目して場合分けをする方法でも簡単に示せます。

52　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［九州大］

(1)　まず，自然数 a に対し，a が 3 の倍数のとき a^2 も 3 の倍数である。

また，a が 3 の倍数でないとき，$a=3k\pm1$（k は整数）とおくと，

$$a^2=(3k\pm1)^2=9k^2\pm6k+1=3(3k^2\pm2k)+1$$

すると，a^2 を 3 で割った余りは 1 となる。

よって，a と a^2 について 3 で割った余りを対応させると，右表のようになり，a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 である。

a	0	1	2
a^2	0	1	1

(2)　a^2，b^2 に対し，a^2+b^2 を 3 で割った余りをまとめると，右表のようになる。

a^2 \ b^2	0	1
0	0	1
1	1	2

さて，$a^2+b^2=3c^2$ のとき，$3c^2$ が 3 の倍数より，a^2+b^2 も 3 の倍数である。すると，a^2，b^2 はともに 3 の倍数となり，さらに(1)より，a, b はともに 3 の倍数である。

よって，a_1，b_1 を自然数として，$a=3a_1$，$b=3b_1$ とおくと，

$$9{a_1}^2+9{b_1}^2=3c^2,\ 3{a_1}^2+3{b_1}^2=c^2$$

これより，c^2 は 3 の倍数となり，(1)より，c は 3 の倍数である。

以上より，$a^2+b^2=3c^2$ のとき a, b, c はすべて 3 で割り切れなければならない。

(3)　$a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 a, b, c が存在すると仮定したとき，(2)より，a_1，b_1，c_1 を自然数として，$a=3a_1$，$b=3b_1$，$c=3c_1$ とおくと，

$$9{a_1}^2+9{b_1}^2=3\cdot9{c_1}^2,\ {a_1}^2+{b_1}^2=3{c_1}^2$$

すると，(2)から，a_2，b_2，c_2 を自然数として，$a_1=3a_2$，$b_1=3b_2$，$c_1=3c_2$ とおくことができ，

$$9{a_2}^2+9{b_2}^2=3\cdot9{c_2}^2,\ {a_2}^2+{b_2}^2=3{c_2}^2$$

以下，同様に，$a_n=3a_{n+1}$，$b_n=3b_{n+1}$，$c_n=3c_{n+1}$　$(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とおくと，

$$a>a_1>a_2>\cdots>0,\ b>b_1>b_2>\cdots>0,\ c>c_1>c_2>\cdots>0\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$から，単調に減少する自然数の列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ が存在することになり，明らかに不適である。

よって，$a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 a, b, c は存在しない。

［解 説］

ときどき見かける整数問題です。(1)と(2)は，メインの(3)の誘導となっています。要演習の 1 題です。

53　　［一橋大］

素数 a, b, c に対して，条件より，p, q を素数とすると，

$$a-b-8=p \cdots\cdots\cdots ①,\ \ b-c-8=q \cdots\cdots\cdots ②$$

①より $a-b=p+8>0$，②より $b-c=q+8>0$ となり，$a>b>c$ である。

(i)　$c \neq 2$ のとき

素数 a, b, c はすべて奇数となるので，①②より素数 p, q はともに偶数，すなわち $p=q=2$ である。すると，①②より，

$$a-b=10 \cdots\cdots\cdots ③,\ \ b-c=10 \cdots\cdots\cdots ④$$

③④より，$a=c+20=c+3\times 6+2$，$b=c+10=c+3\times 3+1$ となり，すなわち a, b, c を 3 で割った余りはすべて異なり，素数 a, b, c のいずれかは 3 の倍数である。

よって，$c=3$，$b=13$，$a=23$

(ii)　$c=2$ のとき

素数 $a,\ b$ はともに奇数となるので，①より素数 p は偶数，すなわち $p=2$ である。また，②より素数 q は奇数である。すると，①②より，

$$a-b=10 \cdots\cdots\cdots ⑤,\ \ b-10=q \cdots\cdots\cdots ⑥$$

⑤⑥より，$a=q+20$，$b=q+10$ となり，$a>b>q$ である。そして，(i)と同様にすると，素数 a, b, q のいずれかは 3 の倍数である。

よって，$q=3$，$b=13$，$a=23$

(i)(ii)より，$(a,\ b,\ c)=(23,\ 13,\ 3)$，$(23,\ 13,\ 2)$

［解　説］

整数問題でよく利用される「素数で偶数なのは 2 だけ」ということが，最初のポイントです。なお，解答例では省きましたが，③④を導いたあと実験をして，3 で割った余りに着目をしました。

54　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［京都大・理］

まず，自然数 a，b がどちらも 3 で割り切れないとき，a，b を 3 で割った余りと，a^3+b^3 を 3 で割った余りとの関係は，右表のようになる。

$a \backslash b$	1	2
1	2	0
2	0	1

すると，a^3+b^3 が 81 で割り切れるためには，3 で割った余りについて，a, b の一方が 1，他方が 2 であることが必要となる。

そこで，a，b に関する対称性より，$a=3k+1$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$，$b=3l-1$ $(l=1,\ 2,\ \cdots)$ の場合を考えると，

$$
\begin{aligned}
a^3+b^3 &= (a+b)(a^2-ab+b^2)\\
&= (3k+1+3l-1)\{(3k+1)^2-(3k+1)(3l-1)+(3l-1)^2\}\\
&= 9(k+l)\{3(k^2-kl+l^2+k-l)+1\}
\end{aligned}
$$

これより，a^3+b^3 が 81 で割り切れる条件は，$3(k^2-kl+l^2+k-l)+1$ が 3 の倍数でないことより，$k+l$ が 9 の倍数となることである。すなわち，$k \geqq 0$，$l \geqq 1$ から $k+l \geqq 1$ となり，$k+l=9,\ 18,\ 27,\ \cdots$ である。

(i)　$k+l=9$ のとき

この場合をまとめると，右表のようになり，$(a,\ b)$ の組で a^2+b^2 の値が最小になるのは，$a+b=3\times 9=27$ から，

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
l	9	8	7	6	5	4	3	2	1
a	1	4	7	10	13	16	19	22	25
b	26	23	20	17	14	11	8	5	2

$$
a^2+b^2=a^2+(27-a)^2=2a^2-54a+27^2=2\left(a-\frac{27}{2}\right)^2+\frac{27^2}{2}
$$

よって，$(a,\ b)=(13,\ 14)$ のとき，a^2+b^2 は最小値 $13^2+14^2=365$ をとる。

(ii)　$k+l \geqq 18$ のとき

この場合は $a+b \geqq 3\times 18=54$ から，(i)と同様に考えると，a^2+b^2 の値が最小になるのは $a=b=27$ のときであるが，この値はともに 3 で割り切れるので，

$$
a^2+b^2>27^2+27^2>365
$$

(i)(ii)より，a^2+b^2 が最小となるのは，$(a,\ b)=(13,\ 14)$ のときである。

したがって，対称性を考え合わせると，$(a,\ b)=(13,\ 14)$，$(14,\ 13)$ において，a^2+b^2 は最小値 365 をとる。

［解 説］

試行錯誤が必要とされる京大らしい整数問題です。まず，3 で割った余りに注目して，絞り込みを行っています。ただ，後半は ab 平面をイメージした解答例のつもりですが，アバウトに記してしまいたいという誘惑に負けそうになっています。

$\boxed{55}$ ［金沢大・理］

(1) 与えられた玉の列を下記のようにグループ分けを行う。

①｜① ②｜① ② ③｜① ② ③ ④｜① ② ③ ④ ⑤｜① ② ……

左から，第 1 群，第 2 群，第 3 群，…とすると，第 k 群の右端までの個数は，

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$$

さて，この玉の列で，数 100 が書かれた玉が最初に現れるのは，第 100 群の右端より，$\frac{1}{2}\cdot100\cdot101=5050$ 番目となる。

(2) $2n^2$ 番目の玉が，第 k 群に属するとすると，

$$\frac{1}{2}(k-1)k<2n^2\leqq\frac{1}{2}k(k+1)\,,\ (k-1)k<4n^2\leqq k(k+1)\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$k=2n$ のとき，$(k-1)k=4n^2-2n$，$k(k+1)=4n^2+2n$ から，$(*)$を満たす。よって，$2n^2$ 番目の玉は第 $2n$ 群に属する。

そこで，第 $2n-1$ 群の右端までの個数は，$\frac{1}{2}(2n-1)2n=n(2n-1)$ となり，$2n^2$ 番目の玉は，第 $2n$ 群の $2n^2-n(2n-1)=n$ 番目すなわち数 n が書かれている。

(3) $2n^2$ 個の玉から 2 つを取り出す ${}_{2n^2}\mathrm{C}_2=n^2(2n^2-1)$ 通りが同様に確からしい。

(2)より，$2n^2$ 番目の玉は第 $2n$ 群の n 番目より，数 1 の玉は $2n$ 個，数 2 の玉は $2n-1$ 個，数 3 の玉は $2n-2$ 個，…，数 n の玉は $n+1$ 個ある。さらに，数 $n+1$ の玉は $n-1$ 個，数 $n+2$ の玉は $n-2$ 個，…，数 $2n-2$ の玉は 2 個，数 $2n-1$ の玉は 1 個ある。

すると，同じ数が書かれた玉を取り出す場合の数は，$n\geqq2$ のとき，

$$\begin{aligned}
&{}_{2n}\mathrm{C}_2+{}_{2n-1}\mathrm{C}_2+{}_{2n-2}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{n+1}\mathrm{C}_2+{}_{n-1}\mathrm{C}_2+{}_{n-2}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{2}\mathrm{C}_2\\
&=({}_{2}\mathrm{C}_2+{}_{3}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{n-1}\mathrm{C}_2+{}_{n}\mathrm{C}_2+{}_{n+1}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{2n-1}\mathrm{C}_2+{}_{2n}\mathrm{C}_2)-{}_{n}\mathrm{C}_2\\
&=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{2}k(k-1)-\frac{1}{2}n(n-1)\\
&=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{2n}\{(k+1)k(k-1)-k(k-1)(k-2)\}-\frac{1}{2}n(n-1)\\
&=\frac{1}{6}(2n+1)2n(2n-1)-\frac{1}{2}n(n-1)=\frac{1}{6}n(8n^2-3n+1)
\end{aligned}$$

よって，同じ数が書かれた玉を取り出す確率は，$\dfrac{8n^2-3n+1}{6n(2n^2-1)}$ である。これは $n=1$ の場合も満たしている。

［解 説］

標準的な群数列の問題です。(3)はミスを犯しそうなので，具体的に記しました。

$\boxed{56}$　［東京大・理］

(1)　b_n は a_n を素数 p で割った余りなので，商を q_n とすると $a_n = p\cdot q_n + b_n$ となり，

$$a_{n+1}(a_n+1) = (p\cdot q_{n+1} + b_{n+1})(p\cdot q_n + b_n + 1)$$
$$= p(p\cdot q_n q_{n+1} + q_{n+1}b_n + q_{n+1} + q_n b_{n+1}) + b_{n+1}(b_n+1)$$

すると，条件から，$a_{n+2} = a_{n+1}(a_n+1)$ なので，a_{n+2} を p で割った余り b_{n+2} は，$b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致する。

(2)　$r=2$，$p=17$ のとき，$a_1 = r = 2$ より $b_1 = 2$，$a_2 = r+1 = 3$ より $b_2 = 3$

以下，(1)の結論から，b_3 は $b_2(b_1+1) = 9$ を 17 で割った余りより $b_3 = 9$ である。

b_4 は $b_3(b_2+1) = 36$ を 17 で割った余りより $b_4 = 2$ である。

b_5 は $b_4(b_3+1) = 20$ を 17 で割った余りより $b_5 = 3$ である。

すると，$b_4 = b_1$，$b_5 = b_2$ から，帰納的に，$b_6 = b_3 = 9$，$b_7 = b_4 = 2$，$b_8 = b_5 = 3$，$b_9 = b_6 = 9$，$b_{10} = b_7 = 2$ となる。

(3)　まず，$b_{n+2} = b_{m+2}$ より，$b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りは，$b_{m+1}(b_m+1)$ を p で割った余りに等しい。すなわち，k を整数として，

$$b_{n+1}(b_n+1) - b_{m+1}(b_m+1) = pk$$

ここで，$b_{n+1} = b_{m+1} > 0$ より，$b_{n+1}(b_n+1) - b_{n+1}(b_m+1) = pk$

$$b_{n+1}(b_n - b_m) = pk$$

$0 < b_{n+1} < p$ より，b_{n+1} は p の倍数でないので，$b_n - b_m$ が p の倍数となる。

すると，$0 \leqq b_n < p$，$0 \leqq b_m < p$ から，$-p < b_n - b_m < p$ となり，$b_n - b_m = 0$ である。すなわち，$b_n = b_m$ が成り立つ。

(4)　a_2，a_3，a_4，…は，すべて p で割り切れないことより，

$$1 \leqq b_2 \leqq p-1,\ 1 \leqq b_3 \leqq p-1,\ 1 \leqq b_4 \leqq p-1,\ \cdots\cdots$$

すると，2 つの相異なる 2 以上の自然数 k，l に対して，$(b_k,\ b_l)$ の組の数は高々 $(p-1)^2$ 通りにすぎないので，これより，$b_{n+1} = b_{m+1} > 0$，$b_{n+2} = b_{m+2} > 0$ を満たす自然数 n, m $(n < m)$ が存在することになる。

(3)の結論を用いると $b_n = b_m > 0$ となり，帰納的に $b_1 = b_{m-n+1} > 0$，すなわち a_1 も p で割り切れない。

［解　説］

漸化式と整数の融合問題で，周期数列が現れます。(1)が後続の設問への誘導として利いています。なお，(3)までの文理共通題に，(4)として，鳩の巣原理を利用する設問が追加されています。