1　　［神戸大・文］

平面上に原点 O から出る，相異なる 2 本の半直線 OX, OY をとり，$\angle XOY < 180°$ とする。半直線 OX 上に O と異なる点 A を，半直線 OY 上に O と異なる点 B とり，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　点 C が $\angle XOY$ の二等分線上にあるとき，ベクトル $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ はある実数 t を用いて $\vec{c}=t\left(\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ と表されることを示せ。

(2)　$\angle XOY$ の二等分線と $\angle XAB$ の二等分線の交点を P とおく。$OA=2$，$OB=3$，$AB=4$ のとき，$\vec{p}=\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

2 ［大阪大・理］

三角形OABの辺OA, OB上に，それぞれ点P, Qをとり

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=a\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=b\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ (0<a<1,\ 0<b<1)$$

とする。三角形OABの重心Gが三角形OPQの内部に含まれるための必要十分条件を a, b を用いて表せ。また，その条件を満たす点$(a,\ b)$はどのような範囲にあるかを座標平面上に図示せよ。ただし，三角形OPQの辺上の点は，三角形OPQの内部に含まれないと考える。

3　［京都大・理］

△ABC に対し，辺 AB 上に点 P を，辺 BC 上に点 Q を，辺 CA 上に点 R を，頂点とは異なるようにとる。この 3 点がそれぞれの辺上を動くとき，この 3 点を頂点とする三角形の重心はどのような範囲を動くか図示せよ。

4　　［京都大・文］

座標空間上に 4 点 A(2, 1, 0), B(1, 0, 1), C(0, 1, 2), D(1, 3, 7) がある。3 点 A, B, C を通る平面に関して点 D と対称な点を E とするとき, 点 E の座標を求めよ。

$\boxed{5}$　［筑波大・理］

座標空間において，原点 O を通り方向ベクトル$(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$をもつ直線を$L_\theta$とする。点A$(2,\ 0,\ 1)$から直線$L_\theta$に下ろした垂線と$L_\theta$との交点を$\mathrm{P}_\theta$とする。

(1)　θが実数全体を動くとき，P_θは xy 平面内の円周上を動くことを示し，その中心の座標と半径を求めよ。

(2)　θが$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$の範囲を動くとする。三角形$\mathrm{OAP}_\theta$の面積の最大値と，そのときの$\mathrm{P}_\theta$の座標を求めよ。

6　　［一橋大］

大きさがそれぞれ 5，3，1 の平面上のベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$に対して，$\vec{z}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ とおく。

(1)　$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を動かすとき，$|\vec{z}|$の最大値と最小値を求めよ。

(2)　$\vec{a}$を固定し，$\vec{a}\cdot\vec{z}=20$ を満たすように$\vec{b}$，$\vec{c}$を動かすとき，$|\vec{z}|$の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{7}$ ［千葉大・文］

平面上で $\mathrm{AB}=3$ となる 2 点 A, B をとる。点 A を中心とする半径 1 の円を S とし, 点 B を中心とする半径 2 の円を T とする。2 点 C, D は円 S 上を動き, 2 点 E, F は円 T 上を動く。ただし, 線分 CD は点 A を通り, 線分 EF は点 B を通る。このとき内積 $\overrightarrow{\mathrm{CE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ の最大値と最小値を求めよ。

8　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［京都大・理］

点 O を中心とする円に内接する△ABC の 3 辺 AB, BC, CA をそれぞれ 2 : 3 に内分する点を P, Q, R とする。△PQR の外心が点 O と一致するとき，△ABC はどのような三角形か。

9　　［大阪大］

xy 平面において，原点 O を通る半径 r $(r>0)$ の円を C とし，その中心を A とする。O を除く C 上の点 P に対し，次の 2 つの条件(a), (b)で定まる点 Q を考える。

(a)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の向きが同じ

(b)　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=1$

以下の問いに答えよ。

(1)　点 P が O を除く C 上を動くとき，点 Q は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に直交する直線上を動くことを示せ。

(2)　(1)の直線を l とする。l が C と 2 点で交わるとき，r のとりうる値の範囲を求めよ。

10　[広島大・理]

座標空間の 2 点 $A(2,\ 0,\ 0)$，$B(0,\ -1,\ 0)$，および $\vec{u}=(-1,\ 2,\ 5)$，$\vec{v}=(1,\ 1,\ 1)$，$\vec{w}=(-1,\ 3,\ 1)$ と成分表示される 3 つのベクトルがある。次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{AP}$ と $\vec{u}$ が平行かつ $\overrightarrow{BP}$ と $\vec{v}$ が平行となるような点 P の座標を求めよ。

(2)　上で求めた点 P に対し，$\overrightarrow{CP}$ と $\vec{w}$ が直交するような点 $C(0,\ 0,\ c)$ を求めよ。

(3)　上で求めた点 P と C に対し，P は 3 点 A, B, C の定める平面上にあることを示せ。

$\boxed{11}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［九州大・理］

a, b を正の数とし，空間内の 3 点 $\mathrm{A}(a,\ -a,\ b)$，$\mathrm{B}(-a,\ a,\ b)$，$\mathrm{C}(a,\ a,\ -b)$ を考える。A, B, C を通る平面を α，原点 O を中心とし A, B, C を通る球面を S とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　線分 AB の中点を D とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{DC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{DO}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であることを示せ。また△ABC の面積を求めよ。

(2)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DO}}$ のなす角を θ とするとき $\sin\theta$ を求めよ。また，平面 α に垂直で原点 O を通る直線と平面 α との交点を H とするとき，線分 OH の長さを求めよ。

(3)　点 P が球面 S 上を動くとき，四面体 ABCP の体積の最大値を求めよ。ただし，P は平面 α 上にはないものとする。

12　［大阪大］

点 O で交わる 2 つの半直線 OX, OY があって $\angle \mathrm{XOY} = 60^\circ$ とする。2 点 A, B が OX 上に O, A, B の順に，また, 2 点 C, D が OY 上に O, C, D の順に並んでいるとして, 線分 AC の中点を M, 線分 BD の中点を N とする。線分 AB の長さを s, 線分 CD の長さを t とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　線分 MN の長さを s と t を用いて表せ。

(2)　点 A, B と C, D が, $s^2 + t^2 = 1$ を満たしながら動くとき，線分 MN の長さの最大値を求めよ。

$\boxed{13}$ ［九州大・理］

△OAB において，辺 AB 上に点 Q をとり，直線 OQ 上に点 P をとる。ただし，点 P は点 Q に関して点 O と反対側にあるとする。3 つの三角形△OAP，△OBP，△ABP の面積をそれぞれ a, b, c とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ および a, b を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ および a, b, c を用いて表せ。

(3)　3 辺 OA, OB, AB の長さはそれぞれ 3, 5, 6 であるとする。点 P を中心とし，3 直線 OA, OB, AB に接する円が存在するとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

14 ［一橋大］

正四面体 OABC の 1 辺の長さを 1 とする。辺 OA を$2:1$に内分する点を P, 辺 OB を$1:2$に内分する点を Q とし, $0<t<1$ を満たす t に対して, 辺 OC を$t:1-t$に内分する点を R とする。

(1) PQ の長さを求めよ。

(2) △PQR の面積が最小となるときの t の値を求めよ。

15　　［金沢大・文］

xyz 空間において，原点 O を中心とする半径 1 の球面 $S : x^2+y^2+z^2=1$，および S 上の点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$ を考える。S 上の A と異なる点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ に対して，2 点 A, P を通る直線と xy 平面の交点を Q とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$（$t$ は実数）とおくとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を t，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の成分表示を x_0，y_0，z_0 を用いて表せ。

(3)　球面 S と平面 $y=\dfrac{1}{2}$ の共通部分が表す図形を C とする。点 P が C 上を動くとき，xy 平面上における点 Q の軌跡を求めよ。

16　　[大阪大・理]

平面上の三角形 OAB を考え，辺 AB の中点を M とする。$\vec{a}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}$，$\vec{b}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$ とおき，点 P を $\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}>0$ であるようにとる。直線 OP に A から下ろした垂線と直線 OP の交点を Q とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$ と $\vec{b}$ は平行であることを示せ。

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|=\dfrac{1}{2}(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|)$ であることを示せ。

17 ［京都大・理］

xyz 空間でO$(0,\ 0,\ 0)$，A$(3,\ 0,\ 0)$，B$(3,\ 2,\ 0)$，C$(0,\ 2,\ 0)$，D$(0,\ 0,\ 4)$，E$(3,\ 0,\ 4)$，F$(3,\ 2,\ 4)$，G$(0,\ 2,\ 4)$を頂点とする直方体 OABC-DEFG を考える。辺 AE を$s:1-s$に内分する点を P, 辺 CG を$t:1-t$に内分する点を Q とおく。ただし, $0<s<1$, $0<t<1$ とする。D を通り, O, P, Q を含む平面に垂直な直線が線分 AC(両端を含む)と交わるような s, t の満たす条件を求めよ。

18　　　　［広島大・文］

座標平面上に点 O(0, 0) と点 P(4, 3) をとる。不等式 $(x-5)^2+(y-10)^2 \leqq 16$ の表す領域を D とする。次の問いに答えよ。

(1)　k は定数とする。直線 $y=-\dfrac{4}{3}x+k$ 上の点を Q とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を k を用いて表せ。

(2)　点 R が D 全体を動くとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ の最大値および最小値を求めよ。

19　　［熊本大・医］

原点を O とし，空間内に 3 点 A$(4,\ 0,\ 0)$，B$(1,\ 2,\ 0)$，C$(2,\ 1,\ 2)$をとる。線分 BC を $t:(1-t)$ $(0<t<1)$ に内分する点を P とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　△OAP の面積を最小にする t の値を求めよ。

(2)　C を通り，3 点 O，A，P を通る平面に垂直な直線と xy 平面との交点を D とする。D が△OAB の内部にあるとき，t の範囲を求めよ。

20　　［東北大］

四面体 ABCD において，辺 AB の中点を M，辺 CD の中点を N とする。以下の問いに答えよ。

(1)　等式 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}$ を満たす点 P は存在するか。証明をつけて答えよ。

(2)　点 Q が等式 $|\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}|=|\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{QD}|$ を満たしながら動くとき，点 Q が描く図形を求めよ。

(3)　点 R が等式 $|\overrightarrow{RA}|^2+|\overrightarrow{RB}|^2=|\overrightarrow{RC}|^2+|\overrightarrow{RD}|^2$ を満たしながら動くとき，内積 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}$ は R のとり方によらず一定であることを示せ。

(4)　(2)の点 Q が描く図形と(3)の点 R が描く図形が一致するための必要十分条件は $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$ であることを示せ。

21　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［九州大・文］

平面上に直角三角形 ABC があり，その斜辺 BC の長さを 2 とする。また，点 O は $4\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ を満たしているとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　辺 BC の中点を M とするとき，点 A は線分 OM の中点となることを示せ。

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=10$ となることを示せ。

(3)　$4|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2=-4$ を満たす点を P とするとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の値を求めよ。

$\boxed{22}$　　［広島大・理］

平面上で，線分 AB を$1:2$に内分する点を O とし，O を中心とする半径 OB の円を S, 円 S と直線 AB との交点のうち点 B と異なる方を C とする。点 P は円 S の内部にあり，線分 BC 上にないものとする。円 S と直線 PB との交点のうち点 B と異なる方を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{b}$，$\angle\mathrm{APB}=\theta$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PO}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(2)　点 P が円 S の内部にあることを用いて，$\cos\theta<\dfrac{|\vec{b}|}{4|\vec{a}|}$ を証明せよ。

(3)　PQ の長さを $|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$，θ で表せ。

(4)　$\mathrm{PA}=3$，$\mathrm{PB}=2$ とする。$\triangle\mathrm{QAB}=3\triangle\mathrm{POB}$ を満たすとき，$\triangle\mathrm{PAB}$ の面積を求めよ。

23　［千葉大・理］

三角形 ABC の外心を O，重心を G，内心を I とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が成り立つならば，三角形 ABC は直角三角形であることを証明せよ。

(2)　k が $k\neq\dfrac{1}{3}$ を満たす実数で，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が成り立つならば，三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ が成り立つならば，三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。

24 ［北海道大・理］

次の問いに答えよ。

(1)　xy 平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(2,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ 2)$ を通る円の方程式を求めよ。

(2)　t が実数全体を動くとき，xyz 空間内の点 $(t+2,\ t+2,\ t)$ がつくる直線を l とする。3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}'(2,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}'(1,\ 2,\ 0)$ を通り，中心を $\mathrm{C}(a,\ b,\ c)$ とする球面 S が直線 l と共有点をもつとき，a, b, c の満たす条件を求めよ。

25　　[東北大・文]

平面上のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{2}$ を満たすとする。ただし，記号 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を表す。以下の問いに答えよ。

(1)　実数 p，q に対して，$\vec{c}=p\vec{a}+q\vec{b}$ とおく。このとき，次の条件 $|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$，$p>0$ を満たす実数 p, q を求めよ。

(2)　平面上のベクトル $\vec{x}$ が，$-1\leqq\vec{a}\cdot\vec{x}\leqq1$，$1\leqq\vec{b}\cdot\vec{x}\leqq2$ を満たすとき，$|\vec{x}|$ のとりうる値の範囲を求めよ。

$\boxed{26}$　　［京都大］

正四面体 OABC において，点 P, Q, R をそれぞれ辺 OA, OB, OC 上にとる。ただし，P，Q，R は四面体 OABC の頂点とは異なるとする。△PQR が正三角形ならば，3 辺 PQ, QR, RP はそれぞれ 3 辺 AB, BC, CA に平行であることを証明せよ。

$\boxed{27}$ ［一橋大］

xyz 空間内の平面 $z=2$ 上に点 P があり，平面 $z=1$ 上に点 Q がある。直線 PQ と xy 平面の交点を R とする。

(1) P$(0,\ 0,\ 2)$ とする。点 Q が平面 $z=1$ 上で点 $(0,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，点 R の軌跡の方程式を求めよ。

(2) 平面 $z=1$ 上に，4 点 A$(1,\ 1,\ 1)$，B$(1,\ -1,\ 1)$，C$(-1,\ -1,\ 1)$，D$(-1,\ 1,\ 1)$ をとる。点 P が平面 $z=2$ で点 $(0,\ 0,\ 2)$ を中心とする半径 1 の円周上を動き，点 Q が正方形 ABCD 上を動くとき，点 R が動きうる領域を xy 平面上に図示し，その面積を求めよ。

28　　［東京大・理］

$\triangle$ABC において $\angle \mathrm{BAC}=90^\circ$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{3}$ とする。$\triangle$ABC の内部の点 P が，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}=\vec{0}$ を満たすとする。

(1)　$\angle \mathrm{APB}$，$\angle \mathrm{APC}$ を求めよ。

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$ を求めよ。

$\boxed{29}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　［九州大・理］

1 辺の長さが 1 の正方形 OABC を底面とし，点 P を頂点とする四角錐 POABC がある。ただし，点 P は内積に関する条件 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{4}$，および $\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{2}$ を満たす。辺 AP を $2:1$ に内分する点を M とし，辺 CP の中点を N とする。さらに，点 P と直線 BC 上の点 Q を通る直線 PQ は，平面 OMN に垂直であるとする。このとき，長さの比 $\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}$，および線分 OP の長さを求めよ。

30　　［一橋大］

t を正の定数とする。原点を O とする空間内に，2 点 A$(2t,\ 2t,\ 0)$，B$(0,\ 0,\ t)$ がある。また動点 P は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=3$$

を満たすように動く。OP の最大値が 3 となるような t の値を求めよ。

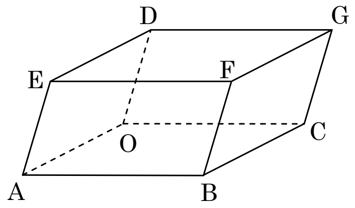
$\boxed{31}$ ［北海道大・文］

$\triangle$ABC を線分 BC を斜辺とする直角二等辺三角形とし，その外接円の中心を O とする。正の実数 p に対して，BC を$(p+1):p$に外分する点を D とし，線分 AD と $\triangle$ABC の外接円との交点で A と異なる点を X とする。

(1)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$p$ を用いて表せ。

(2)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$p$ を用いて表せ。

32　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東北大・理］



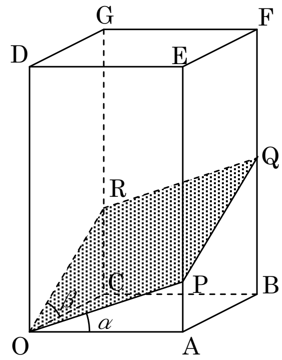
右図のような平行六面体 OABC - DEFG が xyz 空間内にあり， O$(0,\ 0,\ 0)$， A$(2,\ 0,\ 0)$， C$(0,\ 3,\ 0)$， D$(-1,\ 0,\ \sqrt{6})$ とする。辺 AB の中点を M とし，辺 DG 上の点 N を $\mathrm{MN}=4$ かつ $\mathrm{DN}<\mathrm{GN}$ を満たすように定める。

(1)　N の座標を求めよ。

(2)　3 点 E, M, N を通る平面と y 軸との交点 P を求めよ。

(3)　3 点 E, M, N を通る平面による平行六面体 OABC - DEFG の切り口の面積を求めよ。

$\boxed{33}$　　［東京大・理］



1 辺の長さが 1 の正方形を底面とする四角柱 OABC - DEFG を考える。3 点 P, Q, R を，それぞれ辺 AE, 辺 BF, 辺 CG 上に，4 点 O, P, Q, R が同一平面上にあるようにとる。四角形 OPQR の面積を S とおく。また，$\angle$AOP を α，$\angle$COR を β とおく。

(1)　S を $\tan\alpha$ と $\tan\beta$ を用いて表せ。

(2)　$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$，$S=\dfrac{7}{6}$ であるとき，$\tan\alpha+\tan\beta$ の値を求めよ。さらに，$\alpha \leqq \beta$ のとき，$\tan\alpha$ の値を求めよ。

$\boxed{34}$ ［熊本大・医］

空間内の 1 辺の長さ 1 の正四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とし, OA の中点を P とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$0<t<1$ に対し, BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。また，PM＋MQ が最小になる OB 上の点を M とし，PN＋NQ が最小となる OC 上の点を N とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を，それぞれ t，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　△QMN の面積を t を用いて表せ。

(3)　t が $0<t<1$ の範囲を動くとき，△QMN の面積の最大値を求めよ。

$\boxed{35}$　　［東京医歯大］

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ に対し，xyz 空間内の 4 点 $\mathrm{A}(\cos\theta,\ \cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{B}(-\cos\theta,\ -\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{C}(\cos\theta,\ -\cos\theta,\ -\sin\theta)$，$\mathrm{D}(-\cos\theta,\ \cos\theta,\ -\sin\theta)$ を頂点とする四面体の体積を $V(\theta)$，この四面体の xz 平面による切り口の面積を $S(\theta)$ とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$S\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，$V\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ をそれぞれ求めよ。

(2)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ における $S(\theta)$ の最大値を求めよ。

(3)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ における $V(\theta)$ の最大値を求めよ。