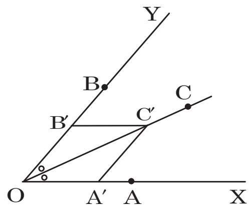
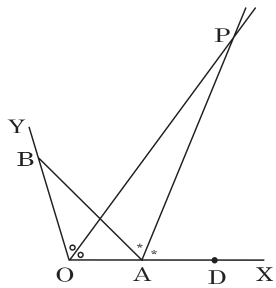
1　　　　［神戸大・文］



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$は，それぞれ$\vec{a}$，$\vec{b}$と同じ向きの単位ベクトルである。

これから，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=\overrightarrow{\mathrm{OC'}}$とすると，線分OC′はOA′，OB′を隣り合う2辺とするひし形の対角線となる。

よって，tを実数として，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t\overrightarrow{\mathrm{OC'}}=t(\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\overrightarrow{\mathrm{OB'}})$である点Cは，∠XOYの二等分線上にある。



(2)　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$なので，(1)より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\left(\frac{\vec{a}}{2}+\frac{\vec{b}}{3}\right)\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，OD の中点を A として，点 D を定義すると，$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=2$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=4$から，実数$s$を用いて，(1)より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{2}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{4}\right)=\vec{a}+s\left(\frac{\vec{a}}{2}+\frac{\vec{b}-\vec{a}}{4}\right)$$

$$=\left(1+\frac{s}{4}\right)\vec{a}+\frac{s}{4}\vec{b}\cdots\cdots\cdots②$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$は1次独立なので，①②より，

$$\frac{t}{2}=1+\frac{s}{4}\cdots\cdots\cdots③,\quad \frac{t}{3}=\frac{s}{4}\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$\dfrac{t}{2}=1+\dfrac{t}{3}$，$t=6$

よって，①から，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=6\left(\dfrac{\vec{a}}{2}+\dfrac{\vec{b}}{3}\right)=3\vec{a}+2\vec{b}$

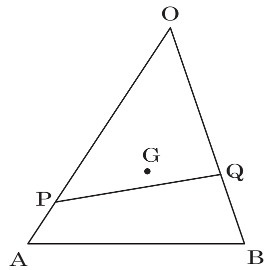
［解 説］

角の二等分線をひし形の対角線として表現する有名問題です。なお，(2)の点 P は，三角形OABの傍心の1つです。

$\boxed{2}$ ［大阪大・理］

条件より，点 G は△OABの重心であり，$\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OQ}=b\overrightarrow{OB}$なので，

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{3a}\overrightarrow{OP}+\frac{1}{3b}\overrightarrow{OQ}$$



Gが△OPQの内部に含まれるための必要十分条件は，

$$\frac{1}{3a}>0,\ \frac{1}{3b}>0,\ \frac{1}{3a}+\frac{1}{3b}<1$$

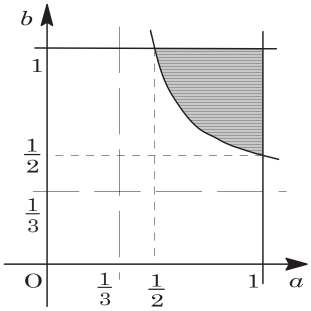
$0<a<1$，$0<b<1$より，$\frac{1}{3a}>0$，$\frac{1}{3b}>0$は成立し，

$$\frac{1}{3a}+\frac{1}{3b}<1$$

変形すると，$\frac{1}{3b}<\frac{3a-1}{3a}$となり，$3a-1>0$のもとで，

$$b>\frac{a}{3a-1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3(3a-1)}$$

よって，点$(a,\ b)$の範囲を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界線は含まない。



［解 説］

まったく同じ問題に出会ったことがあるという感覚がありますが，単なる既視感かもしれません。

3　　　　［京都大・理］

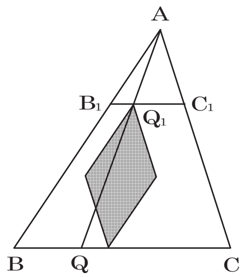
BC 上に点 Q を固定し, $0<p<1$, $0<r<1$ として,

$$\overrightarrow{AP}=p\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AR}=r\overrightarrow{AC}$$

△PQR の重心を G とすると,

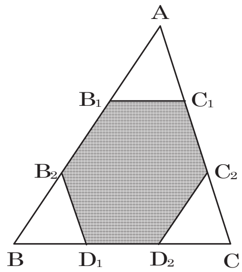
$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AR})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AQ}+p\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+r\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

ここで, $\frac{1}{3}\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AQ_1}$, $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB_1}$, $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC_1}$ とおき, 線分 AB_1, AC_1 を隣りあう 2 辺とする平行四辺形を S_A とおく。



さて, p, r を $0<p<1$, $0<r<1$ を満たすように動かすと, 点 G は, S_A を $\overrightarrow{AQ_1}$ だけ平行移動した平行四辺形 S_{Q_1} の内部を動く。

ここで, 点 Q を辺 BC 上で点 B から点 C まで動かすと, 点 Q_1 は線分 B_1C_1 上を点 B_1 から点 C_1 まで動く。その結果, 平行四辺形 S_{Q_1} は平行移動し, その通過領域が点 G の動く範囲である。



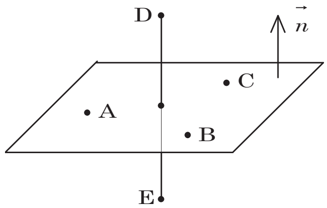
以上より, 辺 AB の三等分点を B_1, B_2, 辺 AC の三等分点を C_1, C_2, 辺 BC の三等分点を D_1, D_2 とおくと, 点 G は六角形 $B_1B_2D_1D_2C_2C_1$ の内部を動く。

すなわち, 点 G の動く範囲は右図の網点部である。ただし, 境界線は含まない。

［解 説］

独立に動く点が 3 つあり, そのうちの 1 つを固定して考えた解です。そのプロセスが記述しにくく, そのため演習するのに適した問題です。

4　［京都大・文］



まず，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(1,\ 1,\ -1)$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-1,\ 1,\ 1)$ となり，
平面 ABC の法線ベクトルを $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\vec{n}=a+b-c=0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\vec{n}=-a+b+c=0$$

よって，$a=c$，$b=0$ となり，$\vec{n}=a(1,\ 0,\ 1)$

すると，平面 ABC の方程式は，

$$(x-2)+z=0,\ x+z=2\cdots\cdots\cdots①$$

さて，$\mathrm{E}(p,\ q,\ r)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=(p-1,\ q-3,\ r-7)$

$\overrightarrow{\mathrm{DE}}\parallel\vec{n}$ より, t を実数として $\overrightarrow{\mathrm{DE}}=t\vec{n}$ となり，

$$(p-1,\ q-3,\ r-7)=t(1,\ 0,\ 1)$$

よって，$p=t+1$，$q=3$，$r=t+7\cdots\cdots\cdots②$

また, DE の中点 $\left(\dfrac{p+1}{2},\ \dfrac{q+3}{2},\ \dfrac{r+7}{2}\right)$ は，平面 ABC 上にあるので，①より，

$$\frac{p+1}{2}+\frac{r+7}{2}=2,\ p+r+4=0\cdots\cdots\cdots③$$

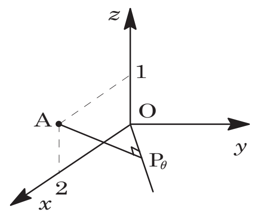
②③より，$2t+12=0$，$t=-6$

②から，$p=-5$，$q=3$，$r=1$ となり，$\mathrm{E}(-5,\ 3,\ 1)$ である。

［解　説］

京大では，本年度より，出題範囲に含まれた「代数・幾何」時代の頻出題です。平面の方程式の基本事項は「ピンポイント レクチャー」を参照してください。

5　　[筑波大・理]



(1)　tを実数とし，$\vec{u}=(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$とおくと，

$$L_\theta:(x,\ y,\ z)=t\vec{u}=t(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$$

これより，L_θ上の点P_θは，$P_\theta(t\cos\theta,\ t\sin\theta,\ 0)$とおくことができる。

ここで，$A(2,\ 0,\ 1)$から，

$$\overrightarrow{AP_\theta}=(t\cos\theta-2,\ t\sin\theta,\ -1)$$

条件より，AP_θとL_θは直交するので，$\overrightarrow{AP_\theta}\cdot\vec{u}=0$

$$\cos\theta(t\cos\theta-2)+t\sin^2\theta=0,\ t=2\cos\theta$$

よって，$P_\theta(2\cos^2\theta,\ 2\sin\theta\cos\theta,\ 0)$と表せる。

さて，$P_\theta(x,\ y,\ z)$とおくと，

$$x=2\cos^2\theta,\ y=2\sin\theta\cos\theta,\ z=0$$

すると，$x=1+\cos2\theta$，$y=\sin2\theta$から，点P_θの描く円の方程式は

$$(x-1)^2+y^2=1,\ z=0$$

すなわち，xy平面上で，中心$(1,\ 0,\ 0)$，半径1の円を描く。

(2)　$\overrightarrow{OA}=(2,\ 0,\ 1)$，$\overrightarrow{OP_\theta}=(2\cos^2\theta,\ 2\sin\theta\cos\theta,\ 0)$より，$0\leqq\theta<\frac{\pi}{2}$のとき，

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_\theta}=4\cos^2\theta,\ |\overrightarrow{OA}|=\sqrt{5}$$

$$|\overrightarrow{OP_\theta}|=\sqrt{4\cos^4\theta+4\sin^2\theta\cos^2\theta}=\sqrt{4\cos^2\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}=2\cos\theta$$

ここで，$\triangle OAP_\theta$の面積をSとおくと，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OP_\theta}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_\theta})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{5\cdot4\cos^2\theta-16\cos^4\theta}$$

$$=\sqrt{5\cos^2\theta-4\cos^4\theta}=\sqrt{-4\left(\cos^2\theta-\frac{5}{8}\right)^2+\frac{25}{16}}$$

すると，$\cos\theta=\sqrt{\frac{5}{8}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$，$\sin\theta=\sqrt{1-\frac{5}{8}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$のとき，$S$は最大値$\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{5}{4}$をとる。このとき，$P_\theta$の座標は，$x=2\times\frac{5}{8}$，$y=2\times\frac{\sqrt{10}}{4}\times\frac{\sqrt{6}}{4}$から，

$$P_\theta\left(\frac{5}{4},\ \frac{\sqrt{15}}{4},\ 0\right)$$

[解　説]

(2)では，有名な三角形の面積公式を利用しています。

6　　［一橋大］

(1)　$|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{c}|=1$より，

$$|\vec{z}|=|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|\leqq|\vec{a}+\vec{b}|+|\vec{c}|\leqq|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|=9 \cdots\cdots\cdots①$$

①において等号が成立するのは，左側では$\vec{a}+\vec{b}$と$\vec{c}$が同じ向きのとき，右側では$\vec{a}$と$\vec{b}$が同じ向きのときである。

よって，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$が同じ向きのとき，$|\vec{z}|$は最大値 9 をとる。

また，$||\vec{a}|-|\vec{b}||\leqq|\vec{a}+\vec{b}|\leqq|\vec{a}|+|\vec{b}|$より，$2\leqq|\vec{a}+\vec{b}|\leqq 8$となり，

$$|\vec{z}|=|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|\geqq||\vec{a}+\vec{b}|-|\vec{c}||\geqq 2-1=1 \cdots\cdots\cdots②$$

②において等号が成立するのは，左側では$\vec{a}+\vec{b}$と$\vec{c}$が逆向きのとき，右側では$\vec{a}$と$\vec{b}$が逆向きのときである。

よって，$\vec{b}$，$\vec{c}$が$\vec{a}$と逆向きのとき，$|\vec{z}|$は最小値 1 をとる。

(2)　条件より，$\vec{a}\cdot\vec{z}=20$なので，$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=20$となり，

$$|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=20,\ \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=-5 \cdots\cdots\cdots③$$

ここで，③の条件のもとで，

$$|\vec{z}|^2=|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})+|\vec{b}+\vec{c}|^2$$
$$=25+2\times(-5)+|\vec{b}+\vec{c}|^2=15+|\vec{b}+\vec{c}|^2$$

(1)と同様に，$||\vec{b}|-|\vec{c}||\leqq|\vec{b}+\vec{c}|\leqq|\vec{b}|+|\vec{c}|$から，$2\leqq|\vec{b}+\vec{c}|\leqq 4 \cdots\cdots\cdots④$

④の範囲の値は，すべて③を満たしており，$15+4\leqq|\vec{z}|^2\leqq 15+16$から，

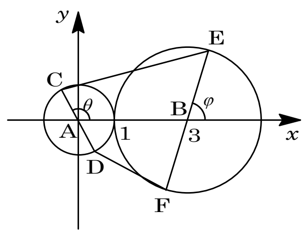
$$\sqrt{19}\leqq|\vec{z}|\leqq\sqrt{31}$$

よって，$\vec{b}$，$\vec{c}$が同じ向きのとき，$|\vec{z}|$は最大値$\sqrt{31}$をとり，$\vec{b}$，$\vec{c}$が逆向きのとき，最小値$\sqrt{19}$をとる。

［解 説］

ベクトルの三角不等式の問題です。(1)で$|\vec{z}|=0$となる場合があれば，この値がもちろん最小値ですが，このようなケースはありませんでした。なお, (2)では，ベクトルの和$\vec{b}+\vec{c}$を変化するベクトルとしてとらえています。

$\boxed{7}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[千葉大・文]



まず，右図のように，点 A を原点として，点 $B(3,\ 0)$ であるように座標系を設定する。

さて，条件より，点 C, D は A を中心とする半径 1 の円上にあるので，$C(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$D(-\cos\theta,\ -\sin\theta)$ とおくことができる。

また，点 E, F は B を中心とする半径 2 の円上にあるので，$E(3+2\cos\varphi,\ 2\sin\varphi)$，$F(3-2\cos\varphi,\ -2\sin\varphi)$ とおくことができる。

これより，$\overrightarrow{CE}=(3+2\cos\varphi-\cos\theta,\ 2\sin\varphi-\sin\theta)$

$$\overrightarrow{DF}=(3-2\cos\varphi+\cos\theta,\ -2\sin\varphi+\sin\theta)$$

よって，$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{DF}=9-(2\cos\varphi-\cos\theta)^2-(2\sin\varphi-\sin\theta)^2$

$$=9-4-1+4(\cos\varphi\cos\theta+\sin\varphi\sin\theta)$$

$$=4+4\cos(\varphi-\theta)$$

以上より，$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{DF}$ は，$\cos(\varphi-\theta)=1$ のとき最大値 8 をとり，$\cos(\varphi-\theta)=-1$ のとき最小値 0 をとる。

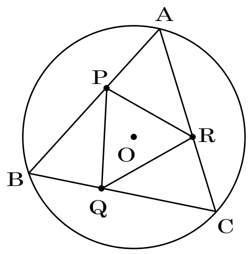
［解　説］

座標系を設定し，内積の成分計算をしましたが，計算は予想外と言ってもよいほど少なめでした。

8　　［京都大・理］

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とすると，条件より，

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|\cdots\cdots\cdots(*)$$



ここで，条件より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{5}(3\vec{a}+2\vec{b})$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{5}(3\vec{b}+2\vec{c}),\ \overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{5}(3\vec{c}+2\vec{a})$$

さて，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|$ から，

$$|3\vec{a}+2\vec{b}|=|3\vec{b}+2\vec{c}|=|3\vec{c}+2\vec{a}|$$

$$9|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=9|\vec{b}|^2+12\vec{b}\cdot\vec{c}+4|\vec{c}|^2=9|\vec{c}|^2+12\vec{c}\cdot\vec{a}+4|\vec{a}|^2$$

よって，(＊)から，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$

すると，$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2$ から，

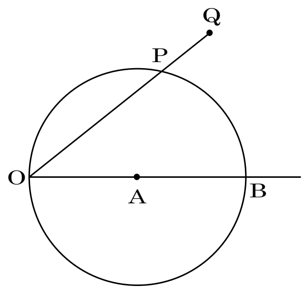
$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{b}-\vec{c}|^2=|\vec{c}-\vec{a}|^2$$

以上より，$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$ となるので，$\triangle\mathrm{ABC}$ は正三角形である。

［解　説］

ベクトル利用という方針を立てた後は，その始点を決定するわけですが，これを点 O にすることには，ためらいはないでしょう。ここまで準備をすると，簡単な計算で結論が導けます。

9　　　　［大阪大］



(1) 条件(a)より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$　$(k>0)$

条件(b)に代入すると, $k>0$ より $k\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2=1$

これより，$k=\dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2}$ から,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdots\cdots\cdots①$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とおくと，点 P は OB を直径とする円 C 上にあるので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=0\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2}\cdot\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=0$

$$\frac{1}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=1\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角を θ とおくと，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=2r$ なので，③より，

$$2r\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|\cos\theta=1,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|\cos\theta=\frac{1}{2r}$$

以上より，半直線 OB 上に $\mathrm{OH}=\dfrac{1}{2r}$ となる点 H をとると，点 Q は点 H を通り，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に直交する直線上を動く。

(2) l が C と 2 点で交わる条件は, OH＜OB である。

すると，$\dfrac{1}{2r}<2r$ から，$r>\dfrac{1}{2}$ である。

［解 説］

③式は，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の OB 方向への正射影ベクトルの大きさが一定という意味でとらえました。なお, 原点を O, x 軸を直線 OA とする座標系を導入する方法もあります。

10　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［広島大・理］

(1)　$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-2,\ y,\ z)$，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x,\ y+1,\ z)$となる。

さて，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}/\!/\vec{u}$より, sを実数として，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\vec{u}$，$(x-2,\ y,\ z)=s(-1,\ 2,\ 5)$

$$x=-s+2,\ y=2s,\ z=5s\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}/\!/\vec{v}$より, tを実数として，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=t\vec{v}$，$(x,\ y+1,\ z)=t(1,\ 1,\ 1)$

$$x=t,\ y=t-1,\ z=t\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$-s+2=t\cdots\cdots③$，$2s=t-1\cdots\cdots④$，$5s=t\cdots\cdots⑥$

③④より，$t=\dfrac{5}{3}$，$s=\dfrac{1}{3}$となり，この値は⑥を満たす。

よって，①より$x=\dfrac{5}{3}$，$y=\dfrac{2}{3}$，$z=\dfrac{5}{3}$となり，$\mathrm{P}\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{3}\right)$である。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{3}-c\right)$となり，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\perp\vec{w}$から，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\vec{w}=0$

$$-\frac{5}{3}+3\times\frac{2}{3}+\frac{5}{3}-c=0,\ c=2$$

よって，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 2)$となる。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(2,\ 0,\ -2)$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(0,\ -1,\ -2)$より，

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\frac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{CA}}-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

よって, Pは3点A, B, Cの定める平面上にある。

［解 説］

(3)では, x成分, y成分より，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}$の係数をそれぞれ定め, その後, z成分を確認しました。連立方程式を立てるほどでもありません。

11　　　　［九州大・理］

(1)　$\mathrm{A}(a,\ -a,\ b)$，$\mathrm{B}(-a,\ a,\ b)$より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2a,\ 2a,\ 0)$

また，$\mathrm{C}(a,\ a,\ -b)$, ABの中点$\mathrm{D}(0,\ 0,\ b)$より，

$$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=(a,\ a,\ -2b),\ \overrightarrow{\mathrm{DO}}=(0,\ 0,\ -b)$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-2a^2+2a^2=0$，$\overrightarrow{\mathrm{DO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$から，

$$\overrightarrow{\mathrm{DC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{DO}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

よって，$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{DC}=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+4a^2}\sqrt{a^2+a^2+4b^2}=2a\sqrt{a^2+2b^2}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{DC}}$と$\overrightarrow{\mathrm{DO}}$のなす角$\theta$は，

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{DC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DO}}}{|\overrightarrow{\mathrm{DC}}||\overrightarrow{\mathrm{DO}}|}=\frac{2b^2}{\sqrt{a^2+a^2+4b^2}\cdot b}=\frac{2b}{\sqrt{2a^2+4b^2}}$$

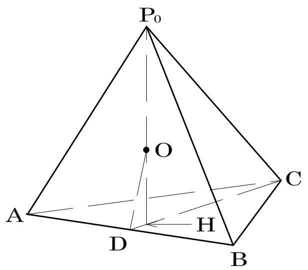
よって，$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{4b^2}{2a^2+4b^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+2b^2}}$

さて, OHは平面αに垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{DH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\overrightarrow{\mathrm{DO}}+\overrightarrow{\mathrm{OH}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{DH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$となり，点Hは直線CD上に存在し，

$$\mathrm{OH}=\mathrm{DO}\sin\theta=\frac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}$$



(3)　球面Sの半径rは　$r=\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\sqrt{2a^2+b^2}$

ここで，HO の延長線と S との交点を$\mathrm{P_0}$とおくと，

S上の点Pと平面αの距離の最大値は$\mathrm{P_0H}$となり，

$$\mathrm{P_0H}=r+\mathrm{OH}=\sqrt{2a^2+b^2}+\frac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}$$

したがって，四面体ABCPの体積の最大値は，

$$\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{P_0H}=\frac{1}{3}\cdot 2a\sqrt{a^2+2b^2}\left(\sqrt{2a^2+b^2}+\frac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}\right)$$

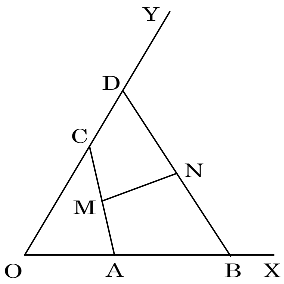
$$=\frac{2}{3}a\left(\sqrt{(a^2+2b^2)(2a^2+b^2)}+ab\right)$$

［解　説］

図示すると，(1)の結論は明らかですが，続く設問への誘導となっています。コンパクトにまとまった1題です。

$\boxed{12}$ ［大阪大］

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とおくと,



$$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\frac{\vec{b}+\vec{d}}{2}-\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{2}$$

すると, $|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|^2=\frac{1}{4}\left(|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}+|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2\right)$

$$=\frac{1}{4}(s^2+2st\cos 60^\circ+t^2)$$

$$=\frac{1}{4}(s^2+st+t^2)$$

よって, $\mathrm{MN}=\frac{1}{2}\sqrt{s^2+st+t^2}$

(2) $s^2+t^2=1$ ($s>0$, $t>0$) より, $s=\cos\theta$, $t=\sin\theta$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと,

$$s^2+st+t^2=1+\cos\theta\sin\theta=1+\frac{1}{2}\sin 2\theta$$

すると, $\sin 2\theta=1$ $\left(\theta=\frac{\pi}{4}\right)$ のとき, s^2+st+t^2 は最大値 $\frac{3}{2}$ をとる。

よって, (1)より, MN の最大値は $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$ である。

［解 説］

平面ベクトルの基本題です。$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ の表現がポイントとなっています。なお, (2)では, 相加平均と相乗平均の関係を用いても OK です。

$\boxed{13}$ ［九州大・理］

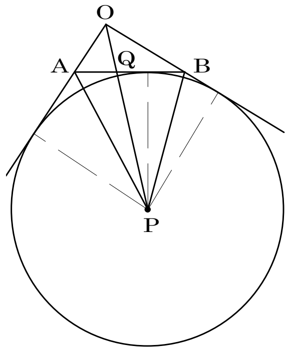
(1)　$\mathrm{AQ}:\mathrm{QB}=\triangle\mathrm{OAP}:\triangle\mathrm{OBP}=a:b$ より,

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{b\overrightarrow{\mathrm{OA}}+a\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{a+b}$$

(2)　$\triangle\mathrm{OAB}=a+b-c$ より，$\mathrm{OQ}:\mathrm{QP}=\triangle\mathrm{OAB}:\triangle\mathrm{ABP}=(a+b-c):c$ となり,

$$\mathrm{OQ}:\mathrm{OP}=(a+b-c):(a+b)$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{a+b}{a+b-c}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{b\overrightarrow{\mathrm{OA}}+a\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{a+b-c}$



(3)　高さの等しい三角形の面積比は, 底辺の長さの比になることより,

$$a:b:c=\mathrm{OA}:\mathrm{OB}:\mathrm{AB}=3:5:6$$

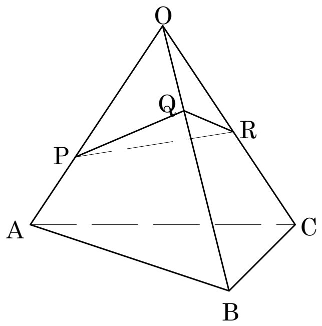
よって, (2)より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{5\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3+5-6}=\dfrac{5\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$

［解 説］

(3)は, 三角形の傍心のベクトル表示ですが, (2)の誘導を利用すると, 計算は不要です。なお, 内角や外角の二等分線の定理を用いる解も可能ですが, これは出題者の善意に反します。

$\boxed{14}$ ［一橋大］

(1)　$\mathrm{OP}=\dfrac{2}{3}$，$\mathrm{OQ}=\dfrac{1}{3}$ より，△OPQ に余弦定理を適用して，



$$\mathrm{PQ}^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2-2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cos 60^\circ=\frac{1}{3}$$

よって，$\mathrm{PQ}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(2)　まず，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$ であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=1\cdot 1\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=t\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ から，

$$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2=\left|t\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2=t^2-\frac{2}{3}t+\frac{4}{9}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\cdot\left(t\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=\frac{1}{6}t-\frac{1}{9}-\frac{1}{3}t+\frac{4}{9}=-\frac{1}{6}t+\frac{1}{3}$$

また, (1)より，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=\dfrac{1}{3}$ から，△PQR の面積 S は,

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}\left(t^2-\frac{2}{3}t+\frac{4}{9}\right)-\left(-\frac{1}{6}t+\frac{1}{3}\right)^2}$$

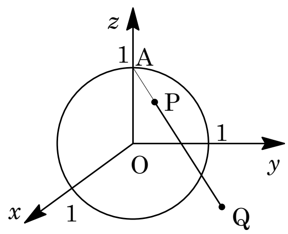
$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{36}t^2-\frac{1}{9}t+\frac{1}{27}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{36}\left(t-\frac{2}{11}\right)^2+\left(\frac{1}{27}-\frac{1}{99}\right)}$$

よって，$t=\dfrac{2}{11}$ のとき，△PQR の面積は最小となる。

［解　説］

正四面体を題材にした頻出のもので, 参考書の例題に掲載されそうな問題です。

$\boxed{15}$ ［金沢大・文］



(1)　$\overrightarrow{AQ}=t\overrightarrow{AP}$のとき，$\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA}=t(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})$

$$\overrightarrow{OQ}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OP}$$

(2)　(1)より，$\overrightarrow{OQ}=(1-t)(0,\ 0,\ 1)+t(x_0,\ y_0,\ z_0)$

$$=(tx_0,\ ty_0,\ 1-t+tz_0)$$

ここで，点Qはxy平面上の点なので，$1-t+tz_0=0$

すると，$z_0\neq 1$から，$t=\dfrac{1}{1-z_0}$となり，

$$\overrightarrow{OQ}=\left(\frac{x_0}{1-z_0},\ \frac{y_0}{1-z_0},\ 0\right)$$

(3)　$\overrightarrow{OQ}=(x,\ y,\ 0)$とおくと，(2)より，$x=\dfrac{x_0}{1-z_0}$………①，$y=\dfrac{y_0}{1-z_0}$………②

条件より，点$P(x_0,\ y_0,\ z_0)$は，球面$S: x^2+y^2+z^2=1$と平面$y=\dfrac{1}{2}$の共通部分であるC上を動くことより，

$$x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2=1\ \cdots\cdots\cdots ③,\quad y_0=\frac{1}{2}\ \cdots\cdots\cdots ④$$

③④より，$x_0{}^2+z_0{}^2=\dfrac{3}{4}$………⑤

また，②④より，$y=\dfrac{1}{2(1-z_0)}$となり，$y\neq 0$から，$1-z_0=\dfrac{1}{2y}$，

$$z_0=1-\frac{1}{2y}\ \cdots\cdots\cdots ⑥$$

①⑥より，$x_0=\dfrac{x}{2y}$………⑦

⑥⑦を⑤に代入すると，$\left(\dfrac{x}{2y}\right)^2+\left(1-\dfrac{1}{2y}\right)^2=\dfrac{3}{4}$

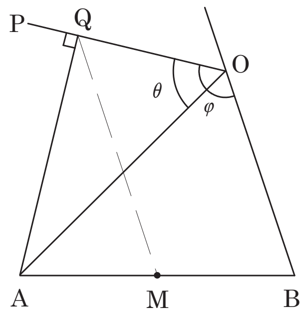
$$x^2+(2y-1)^2=3y^2,\quad x^2+y^2-4y+1=0\ \cdots\cdots\cdots ⑧$$

⑧は$y\neq 0$を満たすことより，点Qはxy平面上で円$x^2+y^2-4y+1=0$を描く。

［解 説］

有名な構図の問題です。誘導がたいへん丁寧です。

16　　　　[大阪大・理]



(1)　まず，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ のなす角を θ，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を φ とおく。

条件より，$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}>0$ ………①

すると，$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}<\varphi\leqq\pi$ となり，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ から，①より，

$$\cos\theta=-\cos\varphi,\ \cos\theta=\cos(\pi-\varphi)$$

これより，$\theta=\pi-\varphi$ となり，OP は∠AOB の外角の二等分線である。

さて，点 Q は OP 上にあるので，k を正の定数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\{\vec{a}+(-\vec{b})\}=k(\vec{a}-\vec{b})\ \text{………②}$$

また，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=x$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=y$ とおくと $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=x\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=y\vec{b}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ から，

$$(k\vec{a}-k\vec{b}-x\vec{a})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0,\ k|\vec{a}-\vec{b}|^2-x\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$$

これより，$k=\dfrac{x\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})}{|\vec{a}-\vec{b}|^2}=\dfrac{x|\vec{a}|^2-x\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}=\dfrac{x-x\vec{a}\cdot\vec{b}}{2-2\vec{a}\cdot\vec{b}}=\dfrac{x}{2}$ となり，②より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{x}{2}(\vec{a}-\vec{b})$$

そこで，M は辺 AB の中点から，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{x\vec{a}+y\vec{b}}{2}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{MQ}}=\frac{x}{2}(\vec{a}-\vec{b})-\frac{x\vec{a}+y\vec{b}}{2}=-\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)\vec{b}$$

以上より，$\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$ と $\vec{b}$ は平行である。

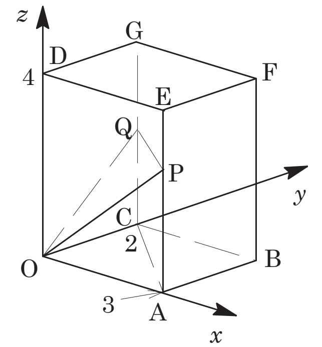
(2)　(1)より，$|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|=\left|\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}\right||\vec{b}|=\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}=\dfrac{1}{2}(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|)$

[解 説]

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ がともに単位ベクトルであるのに注目し，ひし形の対角線が角を二等分するという定理をベースにした解です。

17

［京都大・理］



AP : PE $= s : 1-s$，CB : BG $= t : 1-t$ より，

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OE} + (1-s)\overrightarrow{OA}$$
$$= s(3,\ 0,\ 4) + (1-s)(3,\ 0,\ 0)$$
$$= (3,\ 0,\ 4s)$$
$$\overrightarrow{OQ} = t\overrightarrow{OG} + (1-t)\overrightarrow{OC}$$
$$= t(0,\ 2,\ 4) + (1-t)(0,\ 2,\ 0)$$
$$= (0,\ 2,\ 4t)$$

平面 OPQ の法線ベクトルを $\vec{n} = (a,\ b,\ c)$ とおくと，

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{OP} = 3a + 4sc = 0\ ,\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{OQ} = 2b + 4tc = 0$$

これより，$a = -\frac{4}{3}sc$，$b = -2tc$ となり，$\vec{n} = \left(-\frac{4}{3}sc,\ -2tc,\ c\right) = -\frac{c}{3}(4s,\ 6t,\ -3)$

すると，点 D を通り，$\vec{n}$ を方向ベクトルにもつ直線は，k を実数として，

$$(x,\ y,\ z) = (0,\ 0,\ 4) + k(4s,\ 6t,\ -3) = (4sk,\ 6tk,\ 4-3k)$$

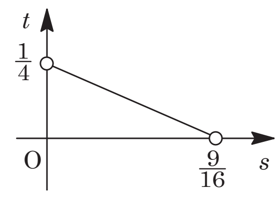
xy 平面との交点は，$z = 4-3k = 0$ から $k = \frac{4}{3}$ となり，$(x,\ y,\ z) = \left(\frac{16}{3}s,\ 8t,\ 0\right)$

さて，線分 AC 上(両端を含む)の点は，$0 \leqq l \leqq 1$ として，

$$(x,\ y,\ z) = l(3,\ 0,\ 0) + (1-l)(0,\ 2,\ 0) = (3l,\ 2-2l,\ 0)$$

ここで，条件より，$\left(\frac{16}{3}s,\ 8t,\ 0\right) = (3l,\ 2-2l,\ 0)$ となり，

$$\frac{16}{3}s = 3l \cdots\cdots\cdots ①,\ 8t = 2-2l \cdots\cdots\cdots ②$$



①②より，$\frac{32}{5}s + 24t = 6$ となり，$16s + 36t = 9$

また，$0 \leqq l \leqq 1$ から $0 \leqq 8t \leqq 2$ となり，$0 \leqq t \leqq \frac{1}{4}$

さらに，$0 < t < 1$，$0 < s < 1$ と合わせると，$0 < t < \frac{1}{4}$ である。

［解 説］

空間ベクトルの頻出題で，計算量も少なめです。

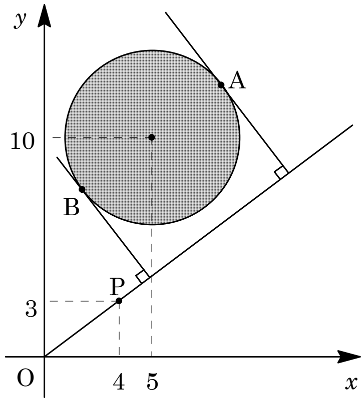
$\boxed{18}$ 　　［広島大・文］

(1) 直線 $y=-\frac{4}{3}x+k$ 上の点 Q の x 座標を t とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(t,\ -\frac{4}{3}t+k\right)$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(4,\ 3)$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=4t+3\left(-\frac{4}{3}t+k\right)=3k$$

(2) まず，直線 OP の方程式は，$y=\frac{3}{4}x$ であり，この直線と直交する直線の方程式は，

$$y=-\frac{4}{3}x+k,\ 4x+3y-3k=0\cdots\cdots\cdots(*)$$



さて，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ のなす角を θ，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 方向への正射影ベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ とするとき，θ が鋭角ならば，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OR}}|\cos\theta=5|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$$

ここで，点 R は，領域 $(x-5)^2+(y-10)^2\leqq 16$ にあるので，右図から，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ が最大となるのは点 R が点 A に一致するときであり，また最小となるのは点 R が点 B に一致するときである。

いずれの場合も，直線(＊)は円 $(x-5)^2+(y-10)^2=16$ に接することより，

$$\frac{|4\cdot5+3\cdot10-3k|}{\sqrt{4^2+3^2}}=4,\ |50-3k|=20$$

これより，$3k=70,\ 30$ となるので，(1)の結果を利用すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=70,\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=30$$

すなわち，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ の最大値は 70，最小値は 30 である。

［解 説］

よく見かける内積の最大・最小の問題ですが，(1)が(2)への秀逸な誘導となっています。演習の価値ある 1 題です。

19　　　　［熊本大・医］

(1)　2 点 $B(1,\ 2,\ 0)$, $C(2,\ 1,\ 2)$ に対して，線分 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を $P(x,\ y,\ z)$ とすると，

$$x=2t+(1-t)=t+1,\ \ y=t+2(1-t)=-t+2,\ \ z=2t$$

$A(4,\ 0,\ 0)$ から，$\triangle OAP$ の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OP}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP})^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{16\{(t+1)^2+(-t+2)^2+4t^2\}-\{4(t+1)\}^2}=2\sqrt{(-t+2)^2+4t^2}$$
$$=2\sqrt{5t^2-4t+4}=2\sqrt{5\left(t-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{16}{5}}$$

よって，$0<t<1$ から，$t=\frac{2}{5}$ のとき，$\triangle OAP$ の面積は最小となる。

(2)　3 点 O, A, P を通る平面に垂直なベクトルを $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ とおくと，

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{OA}=4a=0\cdots\cdots①,\ \ \vec{n}\cdot\overrightarrow{OP}=a(t+1)+b(-t+2)+2ct=0\cdots\cdots②$$

①より $a=0$ となり，②に代入すると，$c=\frac{t-2}{2t}b$ となり，

$$\vec{n}=\left(0,\ b,\ \frac{t-2}{2t}b\right)=\frac{b}{2t}(0,\ 2t,\ t-2)$$

これより，点 C を通り，$\vec{n}$ を方向ベクトルとする直線は，u をパラメータとして，

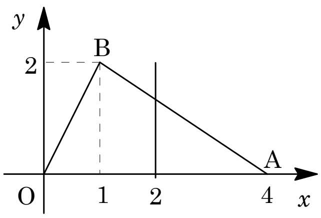
$$(x,\ y,\ z)=(2,\ 1,\ 2)+u(0,\ 2t,\ t-2)$$

xy 平面との交点 D は，$z=0$ として，$2+u(t-2)=0$，$u=\frac{2}{2-t}$ となり，

$$(x,\ y,\ z)=(2,\ 1,\ 2)+\frac{2}{2-t}(0,\ 2t,\ t-2)=\left(2,\ \frac{2+3t}{2-t},\ 0\right)$$

よって，$D\left(2,\ \frac{2+3t}{2-t},\ 0\right)$ である。

さて，直線 AB の方程式は，$y=-\frac{2}{3}(x-4)$ となり，直線 $x=2$ との交点は，$y=\frac{4}{3}$ である。



これより，点 D が△OAB の内部にある条件は，

$$0<\frac{2+3t}{2-t}<\frac{4}{3}$$

すると，$0<t<1$ から，左側の不等式は成立し，右側の不等式から，

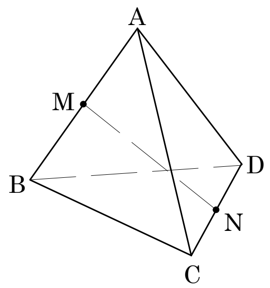
$$3(2+3t)<4(2-t),\ \ t<\frac{2}{13}$$

以上より，$0<t<\frac{2}{13}$

［解 説］

(2)は，与えられた点の座標との相性を考え，座標計算で進めました。ベクトルを前面に出す解法も可能です。

$\boxed{20}$　　　　［東北大］



(1)　$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}$ より，$\dfrac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{2}=\dfrac{\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}}{2}$ となり，

$$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PN}，\ \overrightarrow{PM}-\overrightarrow{PN}=\vec{0}$$

これより，$\overrightarrow{NM}=\vec{0}$ となり，題意を満たさない。

よって，点 P は存在しない。

(2)　$|\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}|=|\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{QD}|$ から，(1)と同様にすると，

$$|\overrightarrow{QM}|=|\overrightarrow{QN}|$$

よって，点 Q は線分 MN の垂直二等分面を描く。

(3)　まず，$|\overrightarrow{RA}|^2+|\overrightarrow{RB}|^2=|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MR}|^2+|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MR}|^2$

$$=|\overrightarrow{MA}|^2+|\overrightarrow{MB}|^2+2|\overrightarrow{MR}|^2-2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MR}-2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MR}$$

$$=2|\overrightarrow{MA}|^2+2|\overrightarrow{MR}|^2-2(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{MR}$$

$$=2|\overrightarrow{MA}|^2+2|\overrightarrow{MR}|^2$$

同様にして，$|\overrightarrow{RC}|^2+|\overrightarrow{RD}|^2=2|\overrightarrow{NC}|^2+2|\overrightarrow{NR}|^2=2|\overrightarrow{NC}|^2+2|\overrightarrow{MR}-\overrightarrow{MN}|^2$

$$=2|\overrightarrow{NC}|^2+2|\overrightarrow{MR}|^2-4\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}+2|\overrightarrow{MN}|^2$$

すると，$|\overrightarrow{RA}|^2+|\overrightarrow{RB}|^2=|\overrightarrow{RC}|^2+|\overrightarrow{RD}|^2$ より，

$$2|\overrightarrow{MA}|^2+2|\overrightarrow{MR}|^2=2|\overrightarrow{NC}|^2+2|\overrightarrow{MR}|^2-4\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}+2|\overrightarrow{MN}|^2$$

よって，$2\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}=|\overrightarrow{NC}|^2+|\overrightarrow{MN}|^2-|\overrightarrow{MA}|^2\cdots\cdots(*)$となり，$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}$ は R のとり方によらず一定である。

(4)　点 Q が描く図形と点 R が描く図形が一致する条件は，$|\overrightarrow{RM}|=|\overrightarrow{RN}|$ であり，

$$|\overrightarrow{RM}|^2=|\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MR}|^2，\ |\overrightarrow{RM}|^2=|\overrightarrow{MN}|^2-2\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}+|\overrightarrow{MR}|^2$$

$(*)$を代入して，$|\overrightarrow{RM}|^2=|\overrightarrow{MN}|^2-|\overrightarrow{NC}|^2-|\overrightarrow{MN}|^2+|\overrightarrow{MA}|^2+|\overrightarrow{MR}|^2$

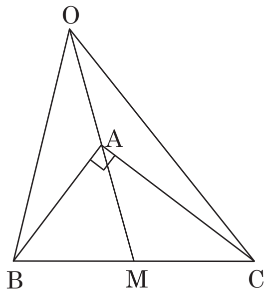
$$|\overrightarrow{MA}|^2-|\overrightarrow{NC}|^2=0，\ |\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{NC}|$$

よって，$\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{CD}|$ から，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$ である。

［解 説］

(4)まで，うまく誘導のついている問題です。ただ，(3)の式変形によっては，不運なケースが出てくる可能性もあります。

21　　　　［九州大・文］



(1)　条件より，$4\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$………①

また，辺 BC の中点を M とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}\text{………②}$$

①②より，$4\overrightarrow{\mathrm{OA}}-2\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

よって，点 A は線分 OM の中点となる。

(2)　$\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$ から，$\mathrm{AM}=\mathrm{BM}=\frac{1}{2}\mathrm{BC}=1$

すると，(1)より $|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=2$ となり，△OBC に中線定理を適用して，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=2(|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BM}}|^2)=10\text{………③}$$

(3)　条件より，$4|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2=-4$ を変形すると，

$$4|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=-4$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$ および③から，

$$4(1-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2)-(10-2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}-2\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2)=-4$$

$$2|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-2(4\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=2$$

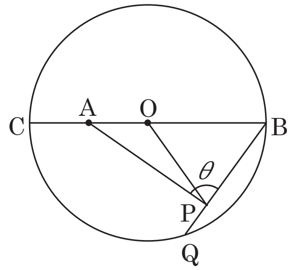
①より，$2|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=2$ となり，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=1$ である。

［解 説］

誘導に従えば，テクニカルな変形が不要であるように問題が構成されています。

$\boxed{22}$　　　　［広島大・理］

(1)　線分 AB を$1:2$に内分する点が O，$1:4$に外分する点が C より，$\overrightarrow{PA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{PB}=\vec{b}$とおくと，



$$\overrightarrow{PO}=\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3},\ \overrightarrow{PC}=\frac{4\vec{a}-\vec{b}}{3}$$

また，$\overrightarrow{OB}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\dfrac{-2\vec{a}+2\vec{b}}{3}$

(2)　点 P は円 S の内部にあるので，$\angle BPC>90°$ となり，

$$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\vec{b}\cdot\frac{4\vec{a}-\vec{b}}{3}<0,\ 4\vec{a}\cdot\vec{b}<|\vec{b}|^2$$

よって，$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}<\dfrac{|\vec{b}|^2}{4|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{|\vec{b}|}{4|\vec{a}|}$

(3)　$\overrightarrow{QP}=k\vec{b}\ (k>0)$ とおくと，$\overrightarrow{QB}=(1+k)\vec{b}$，$\overrightarrow{QC}=k\vec{b}+\dfrac{4\vec{a}-\vec{b}}{3}=\dfrac{4\vec{a}+(3k-1)\vec{b}}{3}$

点 Q は円 S 上の点より，$\overrightarrow{QB}\cdot\overrightarrow{QC}=(1+k)\vec{b}\cdot\dfrac{4\vec{a}+(3k-1)\vec{b}}{3}=0$ となり，

$$4\vec{a}\cdot\vec{b}+(3k-1)|\vec{b}|^2=0,\ 4|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta+(3k-1)|\vec{b}|^2=0$$

よって，$3k|\vec{b}|=|\vec{b}|-4|\vec{a}|\cos\theta$ から，$PQ=k|\vec{b}|=\dfrac{|\vec{b}|-4|\vec{a}|\cos\theta}{3}$ となる。

(4)　$PA=3$，$PB=2$ から，(2)の結果を用いると，$PQ=\dfrac{2-12\cos\theta}{3}$ となり，

$$BQ=2+\frac{2-12\cos\theta}{3}=\frac{8-12\cos\theta}{3}=\frac{8-12\cos\theta}{3}\cdot\frac{BP}{2}=\frac{4-6\cos\theta}{3}BP$$

また，$BA=\dfrac{3}{2}BO$ から，$\triangle QAB=\dfrac{4-6\cos\theta}{3}\cdot\dfrac{3}{2}\triangle POB=(2-3\cos\theta)\triangle POB$

条件より，$\triangle QAB=3\triangle POB$ なので，$2-3\cos\theta=3$ となり，

$$\cos\theta=-\frac{1}{3},\ \sin\theta=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

以上より，$\triangle PAB=\dfrac{1}{2}PA\cdot PB\sin\theta=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot2\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=2\sqrt{2}$

［解 説］

平面ベクトルの標準題です。計算量も適切なものです。

$\boxed{23}$ ［千葉大・理］

(1)　G は△ABC の重心より，$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ ………①

条件から，$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ なので，①に代入すると，

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$

ここで，辺 BC の中点を M とおくと，$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ ……②から，$\overrightarrow{OM}=\vec{0}$ となり，△ABC の外心 O は M と一致する。

したがって，△ABC は $\angle A=90^\circ$ の直角三角形である。

(2)　条件から，$\overrightarrow{OG}=k\overrightarrow{OA}$ なので，①に代入すると，

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=(3k-1)\overrightarrow{OA}$$

ここで，②から，$\overrightarrow{OM}=\frac{3k-1}{2}\overrightarrow{OA}$ となり，$k\neq\frac{1}{3}$ より，3 点 O, A, M は同一直線上にある。一方，O は△ABC の外心なので，辺 BC の垂直二等分線上にあり，$OM\perp BC$ である。

したがって，$AM\perp BC$ となるので，△ABC は $AB=AC$ の二等辺三角形である。

(3)　まず, O と M が一致しないとき, (2)より，$OM\perp BC$ ………③

ここで，条件より，$\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ なので，$\overrightarrow{OI}=\vec{0}$ または $OI\perp BC$ である。

(i)　$\overrightarrow{OI}=\vec{0}$ のとき

O と I が一致し，③より，$IM\perp BC$ である。

(ii)　$OI\perp BC$ のとき

③より, O, I, M は同一直線上にあり，$IM\perp BC$ である。

(i)(ii)より，$IM\perp BC$ である。

次に，O と M が一致するとき，$\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ から $\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ となり，$\overrightarrow{MI}\neq\vec{0}$ なので，$IM\perp BC$ である。

よって，いずれの場合も $IM\perp BC$ であり，これより $IB=IC$ となり，

$$\angle IBC=\angle ICB,\ 2\angle IBC=2\angle ICB,\ \angle ABC=\angle ACB$$

したがって，△ABC は二等辺三角形である。

［解 説］

図形の性質とベクトルがうまくかみ合った基本的な問題です。

$\boxed{24}$　　[北海道大・理]

(1)　原点$\mathrm{O}(0,\ 0)$を通る円の方程式を，$x^2+y^2+ax+by=0$ ……①とおく。

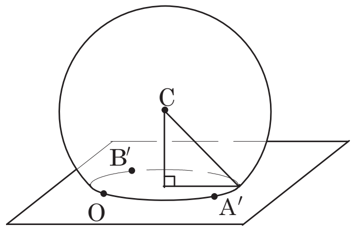
①が$\mathrm{A}(2,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ 2)$を通ることより，

$$5+2a+b=0 \cdots\cdots ②,\quad 5+a+2b=0 \cdots\cdots ③$$

②③より，$a=b=-\dfrac{5}{3}$となるので，3点O, A, Bを通る円の方程式は，①より，

$$x^2+y^2-\frac{5}{3}x-\frac{5}{3}y=0,\quad \left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\left(y-\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{18} \cdots\cdots ④$$

(2)　3点$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}'(2,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}'(1,\ 2,\ 0)$を通る球面Sは，(1)から，xy平面との交線が④で表されることより，その中心を$\mathrm{C}\left(\dfrac{5}{6},\ \dfrac{5}{6},\ c\right)$とおくことができる。



さて，Sの半径をrとすると，三平方の定理から，

$$r^2=c^2+\frac{25}{18}$$

よって，Sの方程式は，$\left(x-\dfrac{5}{6}\right)^2+\left(y-\dfrac{5}{6}\right)^2+(z-c)^2=c^2+\dfrac{25}{18}$

$$x^2+y^2+z^2-\frac{5}{3}x-\frac{5}{3}y-2cz=0 \cdots\cdots ⑤$$

そこで，直線$l: x=t+2,\ y=t+2,\ z=t$とSの方程式⑤を連立して，

$$(t+2)^2+(t+2)^2+t^2-\frac{5}{3}(t+2)-\frac{5}{3}(t+2)-2ct=0$$

$$3t^2-\left(2c-\frac{14}{3}\right)t+\frac{4}{3}=0 \cdots\cdots ⑥$$

条件より，⑥が実数解をもつので，$D/4=\left(c-\dfrac{7}{3}\right)^2-4\geqq 0$となり，

$$\left(c-\frac{7}{3}+2\right)\left(c-\frac{7}{3}-2\right)\geqq 0,\quad \left(c-\frac{1}{3}\right)\left(c-\frac{13}{3}\right)\geqq 0$$

以上より，求める$\mathrm{C}(a,\ b,\ c)$の条件は，$a=b=\dfrac{5}{6}$で，$c\leqq\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{13}{3}\leqq c$である。

[解 説]

現行課程ではあまり重視されていない部分ですが，球面と平面や直線の交わりについての基本的な問題です。演習しておくことが望まれる一題です。

$\boxed{25}$　［東北大・文］

(1)　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{2}$より，

$$|\vec{c}|^2=|p\vec{a}+q\vec{b}|^2=p^2|\vec{a}|^2+2pq\vec{a}\cdot\vec{b}+q^2|\vec{b}|^2=p^2-pq+q^2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(p\vec{a}+q\vec{b})=p|\vec{a}|^2+q\vec{a}\cdot\vec{b}=p-\frac{1}{2}q$$

すると，$|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$から，$p^2-pq+q^2=1$ ……①，$p-\dfrac{1}{2}q=0$ ……②

①②より，$p^2-2p^2+4p^2=1$，$p^2=\dfrac{1}{3}$となり，$p>0$から，

$$p=\frac{1}{\sqrt{3}},\ q=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

(2)　$\vec{x}=s\vec{a}+t\vec{b}$とおくと，$\vec{a}\cdot\vec{x}=s-\dfrac{1}{2}t$，$\vec{b}\cdot\vec{x}=-\dfrac{1}{2}s+t$となる。

条件から，$-1\leqq\vec{a}\cdot\vec{x}\leqq1$，$1\leqq\vec{b}\cdot\vec{x}\leqq2$なので，

$$-1\leqq s-\frac{1}{2}t\leqq1 \text{ ………①},\ 1\leqq-\frac{1}{2}s+t\leqq2 \text{ ………②}$$

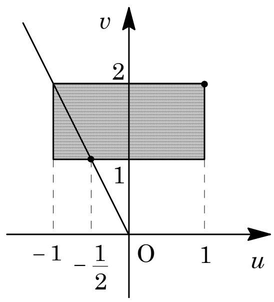
ここで，$u=s-\dfrac{1}{2}t$，$v=-\dfrac{1}{2}s+t$とおくと，$s=\dfrac{2}{3}(2u+v)$，$t=\dfrac{2}{3}(u+2v)$

①②より，$-1\leqq u\leqq1$，$1\leqq v\leqq2$ ………③

さて，$|\vec{x}|^2=s^2-st+t^2$なので，

$$|\vec{x}|^2=\frac{4}{9}\{(2u+v)^2-(2u+v)(u+2v)+(u+2v)^2\}$$

$$=\frac{4}{3}(u^2+uv+v^2)$$



すると，③は右図の網点部となるので，$(u,\ v)=(1,\ 2)$のとき，$|\vec{x}|^2$は最大値$\dfrac{4}{3}(1+2+4)=\dfrac{28}{3}$をとる。

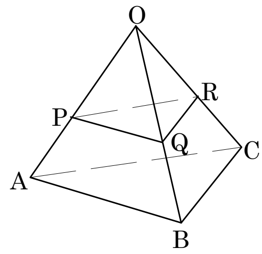
また，$|\vec{x}|^2=\dfrac{4}{3}\left(u+\dfrac{1}{2}v\right)^2+v^2$から，$v$ をいったん固定すると，$|\vec{x}|^2$が最小となるのは，$u=-\dfrac{1}{2}v$ $(v=-2u)$のときであり，この関係を満たしながら，$1\leqq v\leqq2$で v を変化させると，$(u,\ v)=\left(-\dfrac{1}{2},\ 1\right)$で最小値 1 をとる。

以上より，$1\leqq|\vec{x}|^2\leqq\dfrac{28}{3}$となり，$1\leqq|\vec{x}|\leqq\dfrac{2}{3}\sqrt{21}$である。

［解 説］

成分表示を用いるか，そのまま 1 次結合で計算を進めるかを迷いましたが，後者の立場で記しました。なお，(2)の u，v への置き換えは，1 文字固定という方法で最大・最小を求めるときに，領域を長方形にしてわかりやすくするためです。

$\boxed{26}$ ［京都大］



正四面体 OABC において $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$ ……①

としても一般性を失わない。

また，$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=60^\circ$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1}{2}\text{………②}$$

さて，$0<p<1$，$0<q<1$，$0<r<1$ として，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=p\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=q\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=r\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと，△PQR が正三角形より，

$$|p\overrightarrow{\mathrm{OA}}-q\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|q\overrightarrow{\mathrm{OB}}-r\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=|r\overrightarrow{\mathrm{OC}}-p\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$$

①②より，$p^2-pq+q^2=q^2-qr+r^2=r^2-rp+p^2$ ………③

③から，$p^2-pq=-qr+r^2$，$p^2-r^2-q(p-r)=0$ となり，

$$(p-r)(p+r-q)=0\text{………④}$$

また，③から，同様にすると，$(p-q)(p+q-r)=0$ ………⑤

そこで，④⑤から，場合分けをすると，

(i)　$p-r=0$ かつ $p-q=0$ のとき　$p=q=r$

(ii)　$p-r=0$ かつ $p+q-r=0$ のとき　$q=0$ となり不適

(iii)　$p+r-q=0$ かつ $p-q=0$ のとき　$r=0$ となり不適

(iv)　$p+r-q=0$ かつ $p+q-r=0$ のとき　$p=0$ となり不適

(i)～(iv)より，$p=q=r$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=p\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{QR}}=p\overrightarrow{\mathrm{BC}},\ \overrightarrow{\mathrm{RP}}=p\overrightarrow{\mathrm{CA}}$$

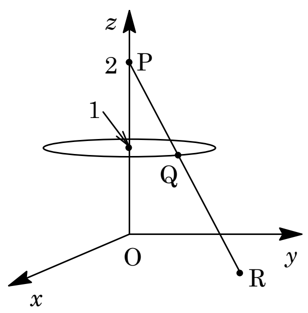
よって，PQ // AB, QR // BC, RP // CA

［解 説］

ベクトルを利用して普通に設定をし，式変形を行っていくと，直感的に正しいと思える結論に到達できます。

$\boxed{27}$ ［一橋大］

(1)　P(0, 0, 2)，Q(s, t, 1)，R(x, y, 0) とおくと，条件より，$s^2+t^2=1$ ………①



また，線分 PR の中点が Q より，

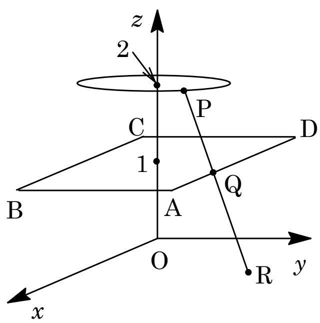
$\dfrac{x}{2}=s$ ………②，$\dfrac{y}{2}=t$ ………③

②③を①に代入すると，$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}=1$ から，

$x^2+y^2=4$

よって，点 R の軌跡の方程式は，$x^2+y^2=4$，$z=0$

(2)　P(p, q, 2)，Q(s, t, 1)，R(x, y, 0) とおくと，条件より，$p^2+q^2=1$ ………④



また，線分 PR の中点が Q より，

$\dfrac{x+p}{2}=s$ ………⑤，$\dfrac{y+q}{2}=t$ ………⑥

⑤⑥より，$p=2s-x$，$q=2t-y$

④に代入すると，$(2s-x)^2+(2t-y)^2=1$

$(x-2s)^2+(y-2t)^2=1$ ………⑦

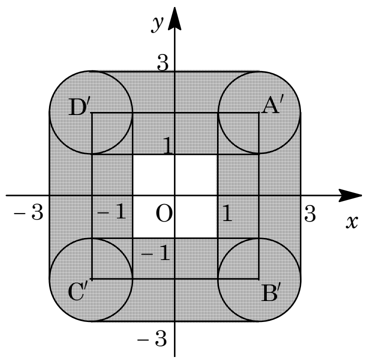
さて，点 Q が辺 AB 上にあるとき，

$s=1$，$-1\leqq t\leqq 1$

⑦より，$(x-2)^2+(y-2t)^2=1$ となり，点 R は xy 平面上で，中心$(2,\ 2t,\ 0)$，半径 1 の円を描く。なお，$-2\leqq 2t\leqq 2$ より，中心は点 $\mathrm{A}'(2,\ 2,\ 0)$ と $\mathrm{B}'(2,\ -2,\ 0)$ を結ぶ線分上にある。

さらに，点 $\mathrm{C}'(-2,\ -2,\ 0)$，$\mathrm{D}'(-2,\ 2,\ 0)$ とおき，同様に考えると，Q が正方形 ABCD の辺上を動くとき，点 R は中心が正方形 $\mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'\mathrm{D}'$ の辺上で半径が 1 の円周上を動く。

すると，点 R の動きうる領域は右図の網点部となり，その面積を S とすると，



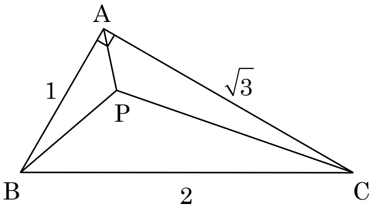
$$S=4\left\{3^2-1^2-\left(1^2-\frac{\pi}{4}\right)\right\}=28+\pi$$

［解　説］

20 年前に，よく見かけた問題です。(2)は，まず Q を固定して R の変化をとらえ，その状態を保ったまま Q を動かすという手法です。

$\boxed{28}$ ［東京大・理］

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=a$，$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=b$，$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=c$ とおくと，



$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{a}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{b}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{c}=\vec{0}\cdots\cdots\cdots①$$

①より，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{a}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{b}=-\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{c}$

両辺の大きさをとって，$\left|\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{a}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{b}\right|=\left|-\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{c}\right|$

$$\left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{a}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{b}\right|=1,\ \left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{a}\right|^2+2\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{a}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{b}+\left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{b}\right|^2=1,\ 1+\frac{2ab\cos\angle\mathrm{APB}}{ab}+1=1$$

よって，$\cos\angle\mathrm{APB}=-\dfrac{1}{2}$ より，$\angle\mathrm{APB}=120°$

また，①より，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{a}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{c}=-\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{b}$ とすると，同様にして，$\angle\mathrm{APC}=120°$

(2) (1)より，$\angle\mathrm{BPC}=120°$ となり，$\triangle\mathrm{APB}$, $\triangle\mathrm{BPC}$, $\triangle\mathrm{CPA}$ に余弦定理を適用して，

$$a^2+b^2+ab=1\cdots\cdots②,\ b^2+c^2+bc=4\cdots\cdots③,\ c^2+a^2+ca=3\cdots\cdots④$$

②より，$(a-b)(a^2+b^2+ab)=a-b$，$a^3-b^3=a-b\cdots\cdots\cdots⑤$

③④より，同様にすると，

$$b^3-c^3=4(b-c)\cdots\cdots\cdots⑥,\ c^3-a^3=3(c-a)\cdots\cdots\cdots⑦$$

⑤＋⑥＋⑦より，$-2a+3b-c=0$，$c=-2a+3b\cdots\cdots\cdots⑧$

③－④より，$b^2-a^2+c(b-a)=1\cdots\cdots\cdots⑨$

⑧⑨より，$b^2-a^2+(-2a+3b)(b-a)=1$，$a^2+4b^2-5ab=1\cdots\cdots\cdots⑩$

②⑩より，$3b^2-6ab=0$，$b=2a\cdots\cdots\cdots⑪$

②に代入すると，$7a^2=1$ から，$a=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ となり，⑪⑧より，

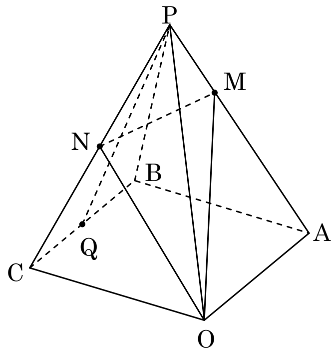
$$b=\frac{2}{\sqrt{7}},\ c=-\frac{2}{\sqrt{7}}+\frac{6}{\sqrt{7}}=\frac{4}{\sqrt{7}}$$

以上より，$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=\dfrac{4}{\sqrt{7}}$ である。

［解 説］

(2)は，余弦定理から得られた連立方程式を解くという方針を立てました。ただ，あまりにも解きにくく，頂点 A を原点とする座標系を設定しようかと心が揺らぎましたが，敢えて初心を貫きました。

$\boxed{29}$ ［九州大・理］



条件より，$\mathrm{OA}=\mathrm{OC}=1$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{4},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}$$

さて，点 M は辺 AP を$2:1$に内分する点，点 N は辺 CP の中点より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}},\ \overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

ここで，Q は線分 BC を$t:1-t$に分ける点とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$
$$=(1-t)(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

さて，直線 PQ が平面 OMN に垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}=0$ となり，$\mathrm{OP}=k$ とおくと，

$$\left((1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OP}})=0$$
$$(1-t)+2(1-t)\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-2k^2=0,\ \frac{3}{2}t+2k^2=\frac{9}{4}\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ON}}=0$ から，$\left((1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}})=0$

$$\frac{1}{4}(1-t)+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-k^2=0,\ \frac{1}{4}t+k^2=\frac{5}{4}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$t=-\frac{1}{4}$ となり，$1-t=\frac{5}{4}$ から，点 Q は BC を$1:5$に外分するので，

$$\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}=1:5$$

また，$k^2=\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{21}{16}$ より，$\mathrm{OP}=k=\sqrt{\frac{21}{16}}=\frac{\sqrt{21}}{4}$

［解 説］

t の値が負になり計算間違いをしたかと思いましたが，問題をよく読むと，「直線 BC 上の点 Q」と記されていました。このため，上図の Q の位置は，結論とは異なります。

$\boxed{30}$ ［一橋大］

点 $\mathrm{A}(2t,\ 2t,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 0,\ t)$ に対して，$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ から，

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})+(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\\&=3\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2-2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=3\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}\right|^2-\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2}{3}\end{aligned}$$

条件より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=3$ なので，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}\right|^2=\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2}{9}+1\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}=\left(\dfrac{2}{3}t,\ \dfrac{2}{3}t,\ \dfrac{1}{3}t\right)$ となり，

$$\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2}{9}+1=\frac{1}{9}\{(2t)^2+(2t)^2+t^2\}+1=t^2+1$$

すると，$(*)$から，点 P は中心 $\mathrm{C}\left(\dfrac{2}{3}t,\ \dfrac{2}{3}t,\ \dfrac{1}{3}t\right)$ で半径 $r=\sqrt{t^2+1}$ の球面を描く。

このとき，OP の最大値は 3 なので，$\mathrm{OC}+r=3$ となり，$t>0$ から，

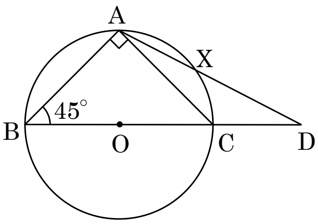
$$\sqrt{\left(\frac{2}{3}t\right)^2+\left(\frac{2}{3}t\right)^2+\left(\frac{1}{3}t\right)^2}+\sqrt{t^2+1}=3,\ \sqrt{t^2+1}=3-t$$

$0<t<3$ のもとで両辺を 2 乗すると，$t^2+1=9-6t+t^2$ となり，$t=\dfrac{4}{3}$ である。

［解 説］

球面のベクトル方程式が題材です。成分計算を最初から行うのは，得策とはいえません。

31　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［北海道大・文］



(1)　条件より，$BC : CD = 1 : p$ から，$\overrightarrow{CD} = p\overrightarrow{BC}$ となる。

また，点 O は辺 BC の中点より，

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + p(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = (1+p)\overrightarrow{OC} - p\overrightarrow{OB}$$
$$= (1+p)\overrightarrow{OC} + p\overrightarrow{OC} = (2p+1)\overrightarrow{OC}$$

(2)　まず，$BC = 1$ としても一般性を失うことはない。

このとき，条件より，$AB = AC = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$CD = p$ となり，方べきの定理から，

$$DA \cdot DX = p(p+1) \cdots\cdots\cdots ①$$

さらに，$DX = kDA$ とおくと，①より，$kDA^2 = p(p+1) \cdots\cdots\cdots ②$

また，△ABD に余弦定理を適用すると，

$$DA^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (1+p)^2 - 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(1+p)\cos 45^\circ$$
$$= \frac{1}{2} + 1 + 2p + p^2 - (1+p) = \frac{1}{2}(2p^2 + 2p + 1) \cdots\cdots\cdots ③$$

②③より，$k = \dfrac{2p(p+1)}{2p^2 + 2p + 1}$ となり，$DX : XA = k : 1-k$ から，

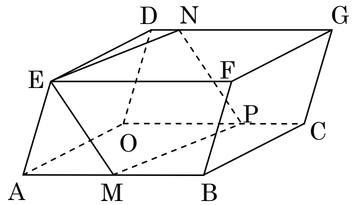
$$\overrightarrow{OX} = k\overrightarrow{OA} + (1-k)\overrightarrow{OD} = k\overrightarrow{OA} + (1-k)(2p+1)\overrightarrow{OC}$$
$$= \frac{2p(p+1)}{2p^2+2p+1}\overrightarrow{OA} + \left\{1 - \frac{2p(p+1)}{2p^2+2p+1}\right\}(2p+1)\overrightarrow{OC}$$
$$= \frac{2p(p+1)}{2p^2+2p+1}\overrightarrow{OA} + \frac{2p+1}{2p^2+2p+1}\overrightarrow{OC}$$

［解　説］

ベクトルの図形への応用問題です。点 O を原点とし，BC を x 軸，OA を y 軸として座標系を設定する方法も考えられます。確実ですが，計算量は多くなるでしょう。

$\boxed{32}$

［東北大・理］



(1)　$0 \leqq t \leqq 1$ として，$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} + t\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = (-1,\ 0,\ \sqrt{6}) + t(0,\ 3,\ 0)$$
$$= (-1,\ 3t,\ \sqrt{6})$$

また，$\mathrm{M}\left(2,\ \dfrac{3}{2},\ 0\right)$ から，$\mathrm{MN} = 4$ より，

$$(-3)^2 + \left(3t - \frac{3}{2}\right)^2 + 6 = 4^2,\quad 9\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

$\mathrm{DN} < \mathrm{GN}$ より $t < \dfrac{1}{2}$ となるので，$t = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$ から，$\mathrm{N}\left(-1,\ \dfrac{1}{2},\ \sqrt{6}\right)$ である。

(2)　$\mathrm{E}(1,\ 0,\ \sqrt{6})$ より，$\overrightarrow{\mathrm{EM}} = \left(1,\ \dfrac{3}{2},\ -\sqrt{6}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{EN}} = \left(-2,\ \dfrac{1}{2},\ 0\right)$ であり，点 P は y 軸上の点から $\mathrm{P}(0,\ p,\ 0)$ とおくと，r, s を定数として，$\overrightarrow{\mathrm{EP}} = r\overrightarrow{\mathrm{EM}} + s\overrightarrow{\mathrm{EN}}$ より，

$$(-1,\ p,\ -\sqrt{6}) = r\left(1,\ \frac{3}{2},\ -\sqrt{6}\right) + s\left(-2,\ \frac{1}{2},\ 0\right)$$

$$-1 = r - 2s \cdots\cdots①,\quad p = \frac{3}{2}r + \frac{1}{2}s \cdots\cdots②,\quad -\sqrt{6} = -\sqrt{6}r \cdots\cdots③$$

①③より $r = s = 1$ なので，②から $p = 2$ となり，$\mathrm{P}(0,\ 2,\ 0)$ である。

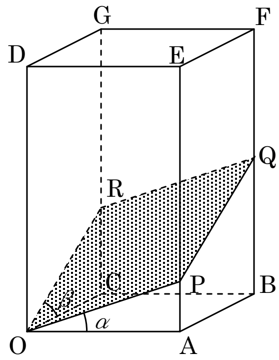
(3)　(2)より $\overrightarrow{\mathrm{EP}} = \overrightarrow{\mathrm{EM}} + \overrightarrow{\mathrm{EN}}$ から，切り口は平行四辺形となり，その面積 S は，

$$S = \sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{EM}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{EN}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{EM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EN}})^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{9}{4} + 6\right)\left(4 + \frac{1}{4}\right) - \left(-2 + \frac{3}{4}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{629}{4^2} - \frac{25}{4^2}} = \frac{\sqrt{151}}{2}$$

［解　説］

空間ベクトルの基本問題です。(2)では平面のパラメータ表示を利用していますが，平行六面体の切り口ということに注目して，(2)と(3)を一気に処理するという方法も考えられます。

$\boxed{33}$　　［東京大・理］



(1)　O を原点とし, OA, OC, OD をそれぞれ x 軸, y 軸, z 軸の正の部分とすると，A$(1,\ 0,\ 0)$，C$(0,\ 1,\ 0)$となる。

条件より，$\mathrm{AP}=\tan\alpha$，$\mathrm{CR}=\tan\beta$ なので,

$$\mathrm{P}(1,\ 0,\ \tan\alpha),\ \mathrm{R}(0,\ 1,\ \tan\beta)$$

さて，OP // RQ，OR // PQ から, 四角形 OPQR は平行四辺形となり, その面積 S は,

$$S=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}})^2}$$
$$=\sqrt{(1+\tan^2\alpha)(1+\tan^2\beta)-(\tan\alpha\tan\beta)^2}$$
$$=\sqrt{1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta}$$

(2)　条件より，$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$ なので，$\tan(\alpha+\beta)=1$ となり,

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1,\ \tan\alpha+\tan\beta=1-\tan\alpha\tan\beta\cdots\cdots\cdots①$$

また，$S=\dfrac{7}{6}$ なので, (1)から，$1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta=\dfrac{49}{36}$ となり,

$$(\tan\alpha+\tan\beta)^2-2\tan\alpha\tan\beta=\frac{13}{36}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$(\tan\alpha+\tan\beta)^2-2\{1-(\tan\alpha+\tan\beta)\}=\dfrac{13}{36}$ となり,

$$(\tan\alpha+\tan\beta)^2+2(\tan\alpha+\tan\beta)-\frac{85}{36}=0$$

$$\left(\tan\alpha+\tan\beta+\frac{17}{6}\right)\left(\tan\alpha+\tan\beta-\frac{5}{6}\right)=0$$

$\tan\alpha+\tan\beta>0$ より，$\tan\alpha+\tan\beta=\dfrac{5}{6}\cdots\cdots\cdots③$

①③より，$\tan\alpha\tan\beta=1-\dfrac{5}{6}=\dfrac{1}{6}\cdots\cdots\cdots④$

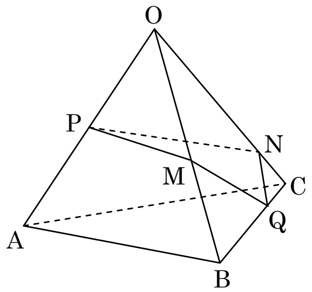
すると，③④から，$\tan\alpha$ と $\tan\beta$ は 2 次方程式 $x^2-\dfrac{5}{6}x+\dfrac{1}{6}=0$ の 2 つの解となり，$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)=0$ から，$x=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3}$ である。

さらに，$\alpha\leqq\beta$ から，$\tan\alpha\leqq\tan\beta$ なので，$\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$ である。

［解 説］

空間ベクトルの図形への応用問題です。誘導が丁寧な構成となっています。なお, 図から「四角柱は直方体」として解いています。

$\boxed{34}$ ［熊本大・医］

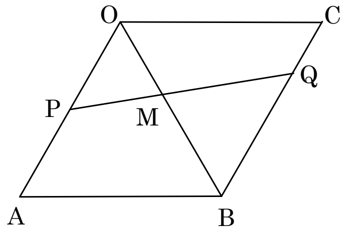


(1) 折れ線の長さ$\mathrm{PM}+\mathrm{MQ}$が最小になるOB上の点Mは，右下図の正四面体 OABC の展開図において，辺 OB と PQ の交点である。

すると，$\mathrm{OM}:\mathrm{MB}=\dfrac{1}{2}:t=1:2t$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2t+1}\vec{b}$$

また，$\mathrm{PN}+\mathrm{NQ}$が最小となる OC 上の点 N に対して，同様に考えると，$\mathrm{ON}:\mathrm{NC}=\dfrac{1}{2}:1-t=1:2-2t$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{1}{3-2t}\vec{c}$ である。



(2) まず，$\triangle\mathrm{OBC}=\dfrac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ から，

$$\triangle\mathrm{OMN}=\frac{1}{2t+1}\cdot\frac{1}{3-2t}\triangle\mathrm{OBC}=\frac{1}{(2t+1)(3-2t)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\triangle\mathrm{BQM}=\frac{2t}{2t+1}\cdot\frac{t}{1}\triangle\mathrm{OBC}=\frac{2t^2}{2t+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\triangle\mathrm{CQN}=\frac{2-2t}{3-2t}\cdot\frac{1-t}{1}\triangle\mathrm{OBC}=\frac{(2-2t)(1-t)}{3-2t}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$$

よって，$\triangle\mathrm{QMN}$ の面積を S とおくと，

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{1-\frac{1}{(2t+1)(3-2t)}-\frac{2t^2}{2t+1}-\frac{(2-2t)(1-t)}{3-2t}\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{-4t^2+4t}{(2t+1)(3-2t)}=\frac{\sqrt{3}t(1-t)}{(2t+1)(3-2t)}$$

(3) (2)より，$S=\dfrac{\sqrt{3}t(1-t)}{-4t^2+4t+3}=\dfrac{\sqrt{3}t(1-t)}{4t(1-t)+3}$ となり，$u=t(1-t)=-\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$ とおくと，$0<t<1$ から，$0<u\leqq\dfrac{1}{4}$ となり，

$$S=\frac{\sqrt{3}u}{4u+3}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1-\frac{3}{4u+3}\right)$$

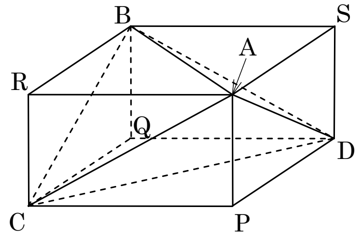
よって，$u=\dfrac{1}{4}\ \left(t=\dfrac{1}{2}\right)$ のとき，S は最大値 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{16}$ をとる。

［解 説］

(3)は，普通に微分法を利用するという方法もありますが，分母・分子の形に注目して置き換えをしています。

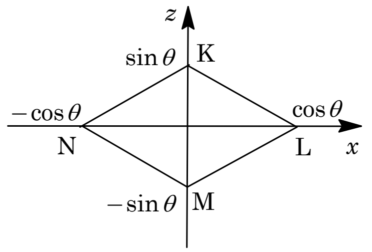
$\boxed{35}$ ［東京医歯大］

(1) 点A$(\cos\theta,\ \cos\theta,\ \sin\theta)$，B$(-\cos\theta,\ -\cos\theta,\ \sin\theta)$，C$(\cos\theta,\ -\cos\theta,\ -\sin\theta)$，D$(-\cos\theta,\ \cos\theta,\ -\sin\theta)$に対して，それぞれ xy 平面に関する対称な 4 つの点 P$(\cos\theta,\ \cos\theta,\ -\sin\theta)$，Q$(-\cos\theta,\ -\cos\theta,\ -\sin\theta)$，R$(\cos\theta,\ -\cos\theta,\ \sin\theta)$，S$(-\cos\theta,\ \cos\theta,\ \sin\theta)$を定める。



すると，四面体 ABCD は，直方体 ARBS-PCQD に埋め込まれる。

ここで，四面体の辺 AB, AC, DC, DB と xz 平面との交点は，それぞれの辺の中点となり，これを K, L, M, N とおくと，K$(0,\ 0,\ \sin\theta)$，L$(\cos\theta,\ 0,\ 0)$，M$(0,\ 0,\ -\sin\theta)$，N$(-\cos\theta,\ 0,\ 0)$である。



これより，四面体の xz 平面による切り口はひし形 KLMN となり，その面積$S(\theta)$は，

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot 2\cos\theta\cdot 2\sin\theta=2\sin\theta\cos\theta$$
$$=\sin 2\theta\cdots\cdots\cdots①$$

よって，$S\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ である。

次に，直方体 ARBS-PCQD の体積を$V_1(\theta)$とおくと，

$$V_1(\theta)=(2\cos\theta)^2\cdot 2\sin\theta=8\sin\theta\cos^2\theta$$

また，4 つの四面体 ABSD, ABRC, CDPA, CDQB は合同であり，その体積を$V_2(\theta)$とおくと，

$$V_2(\theta)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(2\cos\theta)^2\cdot 2\sin\theta=\frac{4}{3}\sin\theta\cos^2\theta$$

これより，四面体 ABCD の体積$V(\theta)$は，

$$V(\theta)=V_1(\theta)-4V_2(\theta)=\left(8-\frac{16}{3}\right)\sin\theta\cos^2\theta=\frac{8}{3}\sin\theta\cos^2\theta\cdots\cdots\cdots②$$

よって，$V\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{8}{3}\sin\frac{\pi}{6}\cos^2\frac{\pi}{6}=1$ である。

(2) ①より，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ における$S(\theta)$の最大値は，$S\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$ である。

(3) ②より，$V(\theta)=\frac{8}{3}\sin\theta\cos^2\theta=\frac{8}{3}\sin\theta(1-\sin^2\theta)=\frac{8}{3}(\sin\theta-\sin^3\theta)$

ここで，$f(t)=t-t^3\ (0<t<1)$とおくと，

$$f'(t)=1-3t^2$$

すると，$f(t)$の増減は右表のようになり，$t=\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき最大値$\frac{2}{9}\sqrt{3}$をとる。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		＋	0	－	
$f(t)$		↗	$\frac{2}{9}\sqrt{3}$	↘	

よって，$V(\theta)$ は $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となる α で，最大値 $V(\alpha)=\dfrac{8}{3}\cdot\dfrac{2}{9}\sqrt{3}=\dfrac{16}{27}\sqrt{3}$ をとる。

［解 説］

解答例に記したように 4 点 P, Q, R, S を設定し，等面四面体は直方体に埋め込まれるという知識の利用がポイントとなります。同様な問題は，たとえば 1993 年の東大や 2006 年の東工大などで出題されていますが，これらの経験がなければ，解法の糸口を見つけるのが難しいと思えます。