1　［大阪大］

曲線 $y = x\sin^2 x$ と直線 $y = x$ の共有点のうち，x 座標が正のものを，x 座標が小さいものから順に A_1，A_2，A_3，$\cdots$ とし，第 n 番目の点を A_n とする。以下の問いに答えよ。

(1)　点 A_n の x 座標を求めよ。また，点 A_n において，曲線 $y = x\sin^2 x$ と直線 $y = x$ は接していることを示せ。

(2)　線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$ と曲線 $y = x\sin^2 x$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

2　　［岡山大］

座標平面において，原点 O(0, 0) を中心とする半径 1 の円を C_1 とし，点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ と点 $\mathrm{Q}(\cos 3\theta,\ \sin 3\theta)$ における C_1 の接線をそれぞれ l_1，l_2 とする。ただし，$\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ である。l_1 と l_2 の交点を $\mathrm{R}(\alpha,\ \beta)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 R の座標 α，β を θ の式で表せ。

(2)　θ を $\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ の範囲で動かして得られる点 R の軌跡を C_2 とする。このとき，直線 $y=\sqrt{3}x$ と曲線 C_2 と y 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。

3　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［神戸大］

xyz 空間に 3 点 $\mathrm{P}(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{Q}(-1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{R}(-1,\ 1,\ 2)$ をとる。次の問いに答えよ。

(1)　t を $0<t<2$ を満たす実数とするとき，平面 $z=t$ と，$\triangle\mathrm{PQR}$ の交わりに現れる線分の 2 つの端点の座標を求めよ。

(2)　$\triangle\mathrm{PQR}$ を z 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めよ。

4　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［筑波大］

座標空間において，$|x| \leqq z^2$ を満たす点 $(x,\ y,\ z)$ 全体からなる立体を R とする。点 $(0,\ 0,\ 1)$ を通り，x 軸と平行な直線を l とする。l を中心軸とする半径 1 の円柱を C とし，R と C の共通部分を T とする。

(1)　$-1<h<1$ を満たす定数 h に対して，点 $(0,\ 0,\ 1+h)$ を通り z 軸に垂直な平面による T の切り口の面積を求めよ。

(2)　T の体積を求めよ。

5 ［神戸大］

$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin 2t \end{cases} \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$で表される曲線を C とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) y を x の式で表せ。

(2) x 軸と C で囲まれる図形 D の面積を求めよ。

(3) D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

$\boxed{6}$ ［千葉大］

e を自然対数の底とし，$f(x)=\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}\log_e|x|+\dfrac{3}{4}$ とする。

(1)　曲線 $y=f(x)$ の 2 接線で，互いに垂直であるものをすべて求めよ。

(2)　直線 l は曲線 $y=f(x)$ の接線で，原点を通りかつ傾きが正とする。l の方程式は $y=x$ であることを示せ。

(3)　曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $x=e$，$y=x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{7}$　　　　［東北大］

xyz 空間において，点$(1,\ 0,\ 1)$と点$(1,\ 0,\ 2)$を結ぶ線分を l とし，l を z 軸のまわりに 1 回転してできる図形を A とする。A を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

8 ［東京工大］

(1)　整数 $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ と正数 a_n に対して，$f_n(x)=a_n(x-n)(n+1-x)$ とおく。2つの曲線 $y=f_n(x)$ と $y=e^{-x}$ が接するような a_n を求めよ。

(2)　$f_n(x)$ は(1)で定めたものとする。$y=f_0(x)$，$y=e^{-x}$ と y 軸で囲まれる図形の面積を S_0，$n\geqq 1$ に対し $y=f_{n-1}(x)$，$y=f_n(x)$ と $y=e^{-x}$ で囲まれる図形の面積を S_n とおく。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(S_0+S_1+\cdots+S_n)$ を求めよ。

9　［東北大］

$k>1$ として，$f(x)=x^2+2kx$ とおく。曲線 $y=f(x)$ と円 $C: x^2+y^2=1$ の 2 つの交点のうちで，第 1 象限にあるものを P とし，第 3 象限にあるものを Q とする。点 O(0, 0)，A(1, 0)，B(−1, 0) に対して，$\alpha=\angle\mathrm{AOP}$，$\beta=\angle\mathrm{BOQ}$ とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1)　k を α で表せ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ と円 C で囲まれる 2 つの図形のうちで，$y=f(x)$ の上側にあるものの面積 $S(k)$ を α と β で表せ。

(3)　$\lim_{k\to\infty} S(k)$ を求めよ。

10　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［京都大］

次の式で与えられる底面の半径が 2，高さが 1 の円柱 C を考える。

$$C = \{ (x,\ y,\ z) \mid x^2 + y^2 \leqq 4,\ \ 0 \leqq z \leqq 1 \}$$

xy 平面上の直線 $y = 1$ を含み，xy 平面と $45°$ の角をなす平面のうち，点 $(0,\ 2,\ 1)$ を通るものを H とする。円柱 C を平面 H で 2 つに分けるとき，点 $(0,\ 2,\ 0)$ を含む方の体積を求めよ。

11　　［筑波大］

xyz 空間内の点 $\mathrm{P}(1,\ 0,\ 1)$ と，xy 平面上の円 $C : x^2+(y-2)^2=1$ に属する点 $\mathrm{Q}(\cos\theta,\ 2+\sin\theta,\ 0)$ を考える。

(1)　直線 PQ と平面 $z=t$ の交点の座標を $(\alpha,\ \beta,\ t)$ とするとき，$\alpha^2+\beta^2$ を t と θ で表せ。

(2)　線分 PQ を z 軸のまわりに 1 回転させてできる曲面と平面 $z=0$，$z=1$ によって囲まれる立体の体積を θ で表せ。

(3)　Q が C 上を 1 周するとき, (2)で求めた体積の最大値, 最小値を求めよ。

12　［東京大］

(1)　正八面体のひとつの面を下にして水平な台の上に置く。この八面体を真上から見た図（平面図）を描け。

(2)　正八面体の互いに平行な 2 つの面をとり，それぞれの面の重心をG_1，G_2とする。G_1，G_2を通る直線を軸としてこの正八面体を 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。ただし八面体は内部も含むものとし，各辺の長さは 1 とする。

13　　　［神戸大］

a を $0 \leqq a < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲にある実数とする。2 つの直線 $x=0$，$x=\dfrac{\pi}{2}$ および 2 つの曲線 $y=\cos(x-a)$，$y=-\cos x$ によって囲まれる図形を G とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　図形 G の面積を S とする。S を a を用いた式で表せ。

(2)　a が $0 \leqq a < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，S を最大にするような a の値と，そのときの S の値を求めよ。

(3)　図形 G を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を V とする。V を a を用いた式で表せ。

14　　［筑波大］

xyz 空間内において，yz 平面上で放物線 $z=y^2$ と直線 $z=4$ で囲まれる平面図形を D とする。点 $(1,\ 1,\ 0)$ を通り z 軸に平行な直線を l とし，l のまわりに D を 1 回転させてできる立体を E とする。

(1)　D と平面 $z=t$ との交わりを D_t とする。ただし $0 \leqq t \leqq 4$ とする。点 P が D_t 上を動くとき，点 P と点 $(1,\ 1,\ t)$ との距離の最大値，最小値を求めよ。

(2)　平面 $z=t$ による E の切り口の面積 $S(t)$ $(0 \leqq t \leqq 4)$ を求めよ。

(3)　E の体積 V を求めよ。

15　［東京工大］

xyz 空間の原点と点 $(1,\ 1,\ 1)$ を通る直線を l とする。

(1)　l 上の点 $\left(\dfrac{t}{3},\ \dfrac{t}{3},\ \dfrac{t}{3}\right)$ を通り l と垂直な平面が，xy 平面と交わってできる直線の方程式を求めよ。

(2)　不等式 $0 \leqq y \leqq x(1-x)$ の表す xy 平面内の領域を D とする。l を軸として D を回転させて得られる回転体の体積を求めよ。

16　　［筑波大］

3 つの曲線

$$C_1: y=\sin x \left(0 \leqq x < \frac{\pi}{2}\right),\ C_2: y=\cos x \left(0 \leqq x < \frac{\pi}{2}\right),\ C_3: y=\tan x \left(0 \leqq x < \frac{\pi}{2}\right)$$

について，以下の問いに答えよ。

(1)　C_1 と C_2 の交点，C_2 と C_3 の交点，C_3 と C_1 の交点のそれぞれについて y 座標を求めよ。

(2)　C_1，C_2，C_3 によって囲まれる図形の面積を求めよ。

17　［京都大］

a を正の実数とする。座標平面において曲線 $y=\sin x\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を S とし，曲線 $y=\sin x\ \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$，$y=a\cos x\ \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ および x 軸で囲まれた図形の面積を T とする。このとき $S:T=3:1$ となるような a の値を求めよ。

18　　　　［東京大］

O を原点とする座標平面上の曲線 $C: y=\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{1}{4}x^2+2}$ と，その上の相異なる 2 点 $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$ を考える。

(1)　P_i $(i=1,\ 2)$ を通る x 軸に平行な直線と，直線 $y=x$ との交点を，それぞれ H_i $(i=1,\ 2)$ とする。このとき $\triangle OP_1H_1$ と $\triangle OP_2H_2$ の面積は等しいことを示せ。

(2)　$x_1<x_2$ とする。このとき C の $x_1 \leqq x \leqq x_2$ の範囲にある部分と，線分 P_1O，P_2O とで囲まれる図形の面積を，y_1，y_2 を用いて表せ。

19　　[東北大]

$0<t<3$ のとき，連立不等式

$$0 \leqq y \leqq \sin x,\ 0 \leqq x \leqq t-y$$

の表す領域を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を $V(t)$ とする。
$\dfrac{d}{dt}V(t)=\dfrac{\pi}{4}$ となる t と，そのときの $V(t)$ の値を求めよ。

20　　［大阪大］

半径 3 の球 T_1 と半径 1 の球 T_2 が，内接した状態で空間に固定されている。半径 1 の球 S が次の条件(A), (B)を同時に満たしながら動く。

(A)　S は T_1 の内部にあるか T_1 に内接している。

(B)　S は T_2 の外部にあるか T_2 に外接している。

S の中心が存在しうる範囲を D とするとき，立体 D の体積を求めよ。

$\boxed{21}$　　［東北大・理］

a を実数とする。円 C は点 $(a,\ -a)$ で直線 $y=-x$ を接線にもち，点 $(0,\ 1)$ を通るものとする。C の中心を $\mathrm{P}(X,\ Y)$ として，以下の問いに答えよ。

(1)　X, Y を a を用いて表せ。

(2)　a が動くときの点 P の軌跡と直線 $y=1$ で囲まれる図形の面積を求めよ。

22　［大阪大］

実数θが動くとき，xy 平面上の動点$\mathrm{P}(0,\ \sin\theta)$および$\mathrm{Q}(8\cos\theta,\ 0)$を考える。$\theta$が$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$の範囲を動くとき，平面内で線分 PQ が通過する部分をDとする。Dをx軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積Vを求めよ。

$\boxed{23}$ ［熊本大］

xyz 空間内の 3 点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{Q}(0,\ 0,\ -1)$，$\mathrm{R}(t,\ t^2-t+1,\ 0)$ を考える。t が $0 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動くとき，三角形 PQR が通過してできる立体を K とする。以下の問いに答えよ。

(1) K を xy 平面で切ったときの断面積を求めよ。

(2) K の体積を求めよ。

$\boxed{24}$　　　　［名古屋大］

$-\dfrac{1}{4}<s<\dfrac{1}{3}$ とする。xyz 空間内の平面 $z=0$ の上に長方形

$$R_s=\{(x,\ y,\ 0)\mid 1\leqq x\leqq 2+4s,\ 1\leqq y\leqq 2-3s\}$$

がある。長方形 R_s を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を K_s とする。

(1)　立体 K_s の体積 $V(s)$ が最大となるときの s の値，およびそのときの $V(s)$ の値を求めよ。

(2)　s を(1)で求めた値とする。このときの立体 K_s を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体 L の体積を求めよ。

25 ［千葉大］

以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ は第 2 次導関数 $f''(x)$ が連続で，ある $a<b$ に対して，$f'(a)=f'(b)=0$ を満たしているものとする。このとき

$$f(b)-f(a)=\int_a^b \left(\frac{a+b}{2}-x\right)f''(x)\,dx$$

が成り立つことを示せ。

(2) 直線道路上における車の走行を考える。ある信号で停止していた車が, 時刻 0 で発進後, 距離 L だけ離れた次の信号に時刻 T で到達し再び停止した。この間にこの車の加速度の絶対値が $\dfrac{4L}{T^2}$ 以上である瞬間があることを示せ。

26　　［千葉大］

xy 平面において，長さ 1 の線分 AB を点 A が原点，点 B が点 $(1,\ 0)$ に重なるように置く。点 A を y 軸に沿って点 $(0,\ 1)$ まで移動させ，線分 AB の長さを 1 に保ったまま点 B を x 軸に沿って原点まで移動させる。このとき線分 AB が通る領域を D とする。$0 \leqq x \leqq 1$ となる実数 x に対して，点 $(x,\ y)$ が領域 D に含まれるような y の最大値を $f(x)$ とする。

(1)　$f(x)$ を x の式で表せ。

(2)　領域 D を x 軸を中心に回転させた立体の体積 V を求めよ。

27　　［東京医歯大］

$a^2+b^2=1$を満たす正の実数 a, b の組$(a,\ b)$の全体を S とする。S に含まれる$(a,\ b)$に対し，xyz 空間内に 3 点$\mathrm{P}(a,\ b,\ b)$，$\mathrm{Q}(-a,\ b,\ b)$，$\mathrm{R}(0,\ 0,\ b)$をとる。また原点を O とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　三角形 OPQ を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体をF_1とする。$(a,\ b)$が S の中を動くとき，F_1の体積の最大値を求めよ。

(2)　三角形 PQR を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体をF_2とする。$a=b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，F_2の xy 平面による切り口の周を xy 平面上に図示せよ。

(3)　三角形 OPR を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体をF_3とする。$(a,\ b)$が S の中を動くとき，F_3の体積の最大値を求めよ。

28 ［大阪大］

xyz 空間に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ \sqrt{3},\ 1)$ がある。平面 $z=0$ に含まれ，中心が O，半径が 1 の円を W とする。点 P が線分 OA 上を，点 Q が円 W の周および内部を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を満たす点 R 全体がつくる立体を V_A とおく。同様に点 P が線分 OB 上を，点 Q が円 W の周および内部を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を満たす点 R 全体がつくる立体を V_B とおく。さらに V_A と V_B の重なり合う部分を V とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　平面 $z=\cos\theta\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ による立体 V の切り口の面積を θ を用いて表せ。

(2)　立体 V の体積を求めよ。

29　　　　［東京工大］

xyz 空間に 4 点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 2)$，$\mathrm{A}(0,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{B}(\sqrt{3},\ -1,\ 0)$，$\mathrm{C}(-\sqrt{3},\ -1,\ 0)$ をとる。四面体 PABC の $x^2+y^2 \geqq 1$ を満たす部分の体積を求めよ。

30　　［長崎大］

半径 1 の円と長さ 2 の線分がある。この線分を一方の端点を，円の中心に合わせて円上に固定した図形を考える。線分の端点で，円の中心とは異なるものを P とする。この図形を図 1 のように xy 平面上におく。すなわち，中心が点$(0,\ 1)$，P が点$(0,\ -1)$と一致するようにおく。

図1

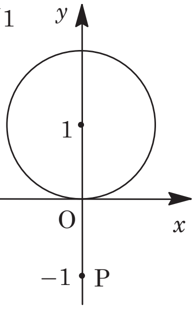
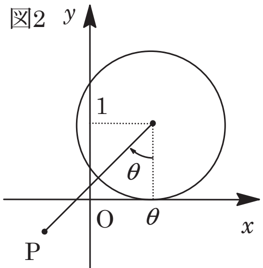


図2



次に，x 軸上で正の方向に，すべらないように円を半回転させる。図 2 は円が θ だけ回転したときの状態を表している。$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で，点 P が描く曲線 C について考察する。次の問いに答えよ。

(1)　図 2 における点 P の x 座標と y 座標を，それぞれ θ を用いて表せ。

(2)　曲線 C 上にあって，x 座標が最小となる点，最大となる点，y 座標が最小となる点，最大となる点について，それぞれの座標を求めよ。

(3)　曲線 C と 2 直線 $y=-1$ および $x=\pi$ によって囲まれた図形の面積 S を求めよ。

31　　［東北大］

半径 1 の円を底面とする高さ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の直円柱がある。底面の円の中心を O とし，直径を 1 つ取り AB とおく。AB を含み底面と 45° の角度をなす平面でこの直円柱を 2 つの部分に分けるとき，体積の小さい方の部分を V とする。

(1)　直径 AB と直交し，O との距離が t $(0 \leqq t \leqq 1)$ であるような平面で V を切ったときの断面積 $S(t)$ を求めよ。

(2)　V の体積を求めよ。

32　　［大阪大］

xyz 空間内の 3 点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(1,\ 1,\ 0)$ を頂点とする三角形 OAB を x 軸のまわりに 1 回転させてできる円錐を V とする。円錐 V を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

33　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大］

座標空間において，xy 平面内で不等式 $|x|\leqq 1$，$|y|\leqq 1$ により定まる正方形 S の 4 つの頂点を $\mathrm{A}(-1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ -1,\ 0)$，$\mathrm{D}(-1,\ -1,\ 0)$ とする。正方形 S を，直線 BD を軸として回転させてできる立体を V_1，直線 AC を軸として回転させてできる立体を V_2 とする。

(1)　$0\leqq t<1$ を満たす実数 t に対し，平面 $x=t$ による V_1 の切り口の面積を求めよ。

(2)　V_1 と V_2 の共通部分の体積を求めよ。

34　　［金沢大］

関数 $y=\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$ のグラフ C について，次の問いに答えよ。

(1)　C の変曲点のうち，x 座標が最大となる点 P の x 座標を求めよ。

(2)　(1)で求めた P の x 座標を b とするとき，$\tan\theta=e^b$ を満たす θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ に対し，$\tan 2\theta$ および θ の値を求めよ。

(3)　上の b に対する直線 $x=b$ と x 軸，y 軸および C で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{35}$ ［長崎大］

区間$0 \leqq x \leqq \pi$において，関数$f(x)$と関数$g(x)$を

$$f(x)=\frac{1}{2}\cos x,\quad g(x)=\cos\frac{x}{2}+c$$

と定義する。cは定数である。次の問いに答えよ。

(1) 区間$0 \leqq x \leqq \pi$において，2 曲線$y=f(x)$と$y=g(x)$が$x=0$以外の点で接するようにcの値を定め，接点$(p,\ q)$を求めよ。また，そのとき，区間$0 \leqq x \leqq \pi$における関数$f(x)$と関数$g(x)$の大小関係を調べよ。

(2) 定数cと接点$(p,\ q)$は(1)で求めたものとする。そのとき，区間$0 \leqq x \leqq p$において，y軸および 2 曲線$y=f(x)$，$y=g(x)$によって囲まれた図形をDとする。Dをy軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積Vを求めよ。

36　　　　［東京工大］

点$\mathrm{P}(t,\ s)$が$s=\sqrt{2}t^2-2t$を満たしながらxy平面上を動くときに，点Pを原点を中心として45°回転した点 Q の軌跡として得られる曲線を C とする。さらに，曲線 C とx軸で囲まれた図形をDとする。

(1)　点$\mathrm{Q}(x,\ y)$の座標を，tを用いて表せ。

(2)　直線$y=a$と曲線Cがただ1つの共有点をもつような定数aの値を求めよ。

(3)　図形Dをy軸のまわりに1回転してできる回転体の体積Vを求めよ。

$\boxed{37}$ ［名古屋大］

　空間内にある半径１の球（内部を含む）を B とする。直線 l と B が交わっており，その交わりは長さ $\sqrt{3}$ の線分である。

(1) B の中心と l との距離を求めよ。

(2) l のまわりに B を１回転してできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{38}$ ［大阪大］

半径 1 の 2 つの球 S_1 と S_2 が 1 点で接している。互いに重なる部分のない等しい半径をもつ n 個 $(n \geqq 3)$ の球 T_1, T_2, $\cdots$, T_n があり，次の条件(ア)(イ)を満たす。

(ア)　T_i は S_1, S_2 にそれぞれ 1 点で接している $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$。

(イ)　T_i は T_{i+1} に 1 点で接しており $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$，そして T_n は T_1 に 1 点で接している。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　T_1, T_2, $\cdots$, T_n の共通の半径 r_n を求めよ。

(2)　S_1 と S_2 の中心を結ぶ直線のまわりに T_1 を回転してできる回転体の体積を V_n とし，T_1, T_2, $\cdots$, T_n の体積の和を W_n とするとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{W_n}{V_n}$ を求めよ。