1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［大阪大］

(1)　$y = x\sin^2 x$ ……①，$y = x$ ……②に対して, x 座標が正の共有点は,

$$x\sin^2 x = x\,,\ \ \sin^2 x = 1\,,\ \ \sin x = \pm 1$$

これより，$x_1 = \dfrac{\pi}{2}$，$x_{n+1} = x_n + \pi$ となり，

$$x_n = \frac{\pi}{2} + (n-1)\pi = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi$$

さて，①より，$y' = \sin^2 x + 2x\sin x\cos x = \sin^2 x + x\sin 2x$

そこで，$x = \left(n - \dfrac{1}{2}\right)\pi$ において，

$$y' = \sin^2\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi + \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\sin(2n-1)\pi = (\pm 1)^2 = 1$$

よって，曲線①と直線②は，点 A_n において接している。

(2)　$0 \leqq \sin^2 x \leqq 1$ から，$x > 0$ において $x\sin^2 x \leqq x$ となり，線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$ と曲線①で囲まれる部分の面積 S は,

$$S = \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x\sin^2 x)\,dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} x\cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_{x_n}^{x_{n+1}} x(1 + \cos 2x)\,dx$$

ここで, (1)より，$x_n = \left(n - \dfrac{1}{2}\right)\pi$，$x_{n+1} = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\pi$ なので,

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_n}^{x_{n+1}} = \frac{1}{2}({x_{n+1}}^2 - {x_n}^2) = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2n\pi\cdot\pi = n\pi^2$$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} x\cos 2x\,dx = \left[\frac{1}{2}x\sin 2x\right]_{x_n}^{x_{n+1}} - \frac{1}{2}\int_{x_n}^{x_{n+1}} \sin 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}(x_{n+1}\sin 2x_{n+1} - x_n\sin 2x_n) + \frac{1}{4}\left[\cos 2x\right]_{x_n}^{x_{n+1}}$$

$$= \frac{1}{4}(\cos 2x_{n+1} - \cos 2x_n) = \frac{1}{4}(\cos(2n+1)\pi - \cos(2n-1)\pi)$$

$$= \frac{1}{4}(-1+1) = 0$$

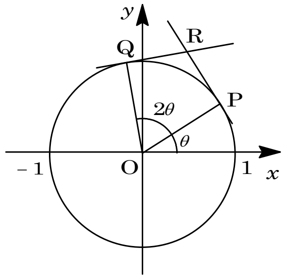
したがって，$S = \dfrac{1}{2}n\pi^2$ である。

［解　説］

微積分の総合問題です。曲線①と直線②の位置関係は明らかなので，図を描くまでもありません。

$\boxed{2}$ ［岡山大］

(1) 点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{Q}(\cos 3\theta,\ \sin 3\theta)$ における接線の方程式は，それぞれ，



$$x\cos\theta + y\sin\theta = 1,\ x\cos 3\theta + y\sin 3\theta = 1$$

この 2 本の接線の交点 $\mathrm{R}(\alpha,\ \beta)$ は，

$$\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta = 1,\ \alpha\cos 3\theta + \beta\sin 3\theta = 1$$

まとめると，$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \cos 3\theta & \sin 3\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

さて，$\Delta = \cos\theta\sin 3\theta - \sin\theta\cos 3\theta = \sin(3\theta - \theta) = \sin 2\theta$

すると，$\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ より，$\sin 2\theta > 0$ なので，

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin 2\theta}\begin{pmatrix} \sin 3\theta & -\sin\theta \\ -\cos 3\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって，$\alpha = \dfrac{1}{\sin 2\theta}(\sin 3\theta - \sin\theta) = \dfrac{1}{2\sin\theta\cos\theta}\cdot 2\cos 2\theta\sin\theta = \dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$

$$\beta = \frac{1}{\sin 2\theta}(-\cos 3\theta + \cos\theta) = \frac{1}{\sin 2\theta}\cdot 2\sin 2\theta\sin\theta = 2\sin\theta$$

(2) (1)より，$x = \dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$，$y = 2\sin\theta$ となり，

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{-2\sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

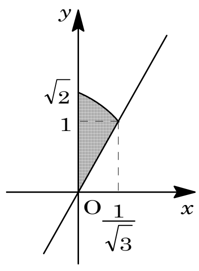
$$= \frac{-4\sin\theta\cos^2\theta + (2\cos^2\theta - 1)\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{-\sin\theta(2\cos^2\theta + 1)}{\cos^2\theta}$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 2\cos\theta$$

θ	$\dfrac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$
$\dfrac{dx}{d\theta}$		$-$	
x	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\searrow$	0
$\dfrac{dy}{d\theta}$		$+$	
y	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$

よって，点 R の軌跡は右図のようになり，求める網点部の面積を S とすると，



$$S = \int_1^{\sqrt{2}} x\,dy + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}\cdot 2\cos\theta\,d\theta + \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$= \Big[\sin 2\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} + \frac{\sqrt{3}}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

［解 説］

和積公式を利用して，点 R の座標を整理しておかないと，積分の実行が困難になってきます。また，(2)の面積計算は，計算量を考えると，y 軸方向で積分すべきです。

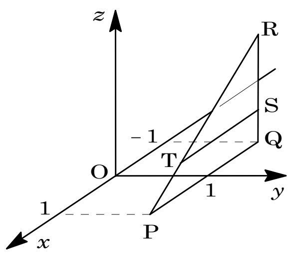
$\boxed{3}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［神戸大］

(1)　P(1, 1, 0)，Q(−1, 1, 0)，R(−1, 1, 2) のとき，

まず線分 QR は xy 平面に垂直なので，平面 $z=t$ との交点 S の座標は，S(−1, 1, t) である。

また，線分 PR と平面 $z=t$ との交点 T は，線分 PR を $t:2-t$ に内分する点より，

$$\mathrm{T}\left(\frac{-t+2-t}{t+(2-t)},\ \frac{t+2-t}{t+(2-t)},\ t\right)=(1-t,\ 1,\ t)$$

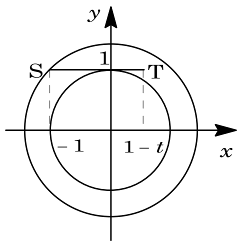


(2)　点 T の x 座標の符号で場合分けをする。

(i)　$1-t\geqq 0$ $(0\leqq t\leqq 1)$ のとき

線分 ST を z 軸のまわりに回転したときにできるドーナツ状の図形は，外径が $\sqrt{2}$，内径が 1 であるので，その面積 $S(t)$ は，

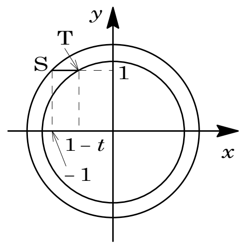
$$S(t)=\pi(\sqrt{2})^2-\pi\cdot 1^2=\pi$$



(ii)　$1-t\leqq 0$ $(1\leqq t\leqq 2)$ のとき

線分 ST を z 軸のまわりに回転したときにできるドーナツ状の図形は，外径が $\sqrt{2}$，内径が $\sqrt{(1-t)^2+1^2}$ であるので，その面積 $S(t)$ は，

$$S(t)=\pi(\sqrt{2})^2-\pi\left(\sqrt{(1-t)^2+1^2}\right)^2=\pi(2t-t^2)$$



(i)(ii)より，△PQR の z 軸まわりの回転体の体積 V は，

$$V=\int_0^2 S(t)\,dt=\pi\int_0^1 dt+\pi\int_1^2(2t-t^2)\,dt=\pi+\pi\left[t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_1^2=\frac{5}{3}\pi$$

［解 説］

平面図形の回転体の体積を求める頻出題です。回転軸に垂直な回転体の切り口がドーナツ形であることがわかれば，積分計算は難しくありません。

$\boxed{4}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［筑波大］

(1)　条件より，立体 $R : |x| \leqq z^2 \cdots\cdots\cdots①$

l を中心軸とする半径 1 の円柱 C の方程式は,

$C : y^2 + (z-1)^2 \leqq 1 \cdots\cdots\cdots②$

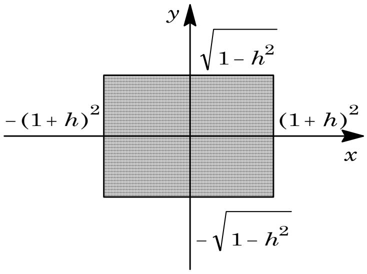
また，点 $(0,\ 0,\ 1+h)$ を通り z 軸に垂直な平面の方程式は,

$z = 1 + h \cdots\cdots\cdots③$

③を①に代入して，$|x| \leqq (1+h)^2$，$-(1+h)^2 \leqq x \leqq (1+h)^2$

③を②に代入して，$y^2 + h^2 \leqq 1$，$-\sqrt{1-h^2} \leqq y \leqq \sqrt{1-h^2}$

R と C の共通部分 T を平面③で切断したときの切り口を図示すると，右図の網点部となる。その面積 $S(h)$ は,



$$S(h) = 2(1+h)^2 \cdot 2\sqrt{1-h^2}$$
$$= 4(1+h)^2\sqrt{1-h^2}$$

(2)　T の体積を V とすると,

$$V = \int_{-1}^{1} S(h)\,dh = \int_{-1}^{1} 4(1+h)^2\sqrt{1-h^2}\,dh$$
$$= 4\int_{-1}^{1}\sqrt{1-h^2}\,dh + 8\int_{-1}^{1} h\sqrt{1-h^2}\,dh + 4\int_{-1}^{1} h^2\sqrt{1-h^2}\,dh$$
$$= 8\int_{0}^{1}\sqrt{1-h^2}\,dh + 8\int_{0}^{1} h^2\sqrt{1-h^2}\,dh$$

ここで，原点が中心で，半径 1 の四分円の面積は $\dfrac{\pi}{4}$ より,

$$\int_0^1 \sqrt{1-h^2}\,dh = \frac{\pi}{4}$$

また，$h = \sin\theta \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと,

$$\int_0^1 h^2\sqrt{1-h^2}\,dh = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta\,d\theta$$
$$= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4\theta)\,d\theta = \frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{16}$$

以上より，$V = 8\times\dfrac{\pi}{4} + 8\times\dfrac{\pi}{16} = \dfrac{5}{2}\pi$ である。

［解 説］

10 年以上も前，旧旧課程の頃に頻出していた共通部分の体積を求める問題です。ここ数年は，空間図形の内容が削減されたため，散見される程度でしたが，やや風向きが変わってきたのでしょうか。

$\boxed{5}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［神戸大］

(1)　$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$x = \sin t$，$y = \sin 2t$ に対して, $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$ となり，

$$y = 2\sin t\cos t = 2x\sqrt{1-x^2}$$

(2)　(1)より，$y' = 2\sqrt{1-x^2} + \dfrac{2x\cdot(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}$

$$= \frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

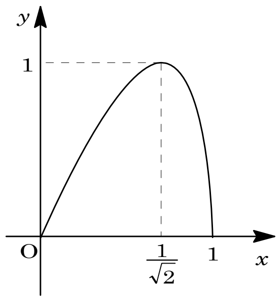
x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
y'	2	＋	0	－	×
y	0	↗	1	↘	0

よって，曲線 C の概形は右下図のようになる。

そこで，x 軸と C で囲まれる図形 D の面積 S は，$u = 1-x^2$ とおくと，

$$S = \int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_1^0 \sqrt{u}\,(-du)$$

$$= \int_0^1 \sqrt{u}\,du = \Big[\,\frac{2}{3}u\sqrt{u}\,\Big]_0^1 = \frac{2}{3}$$



(3)　D を y 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積 V は，$x = \sin t$ とおくと，

$$V = \int_0^1 2\pi x\cdot 2x\sqrt{1-x^2}\,dx = 4\pi\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt = 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t\,dt$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\,dt = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t)\,dt = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$

［解 説］

(1)を誘導として, (2)の面積, (3)の体積を計算しています。(1)の設問がなければ, パラメータ表示のまま, S と V を計算していたことでしょう。なお, y 軸回転体の体積は, いわゆる円筒分割を利用しています。

$\boxed{6}$ 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［千葉大］

(1)　$f(x)=\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}\log|x|+\dfrac{3}{4}$ に対して，$f'(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2x}=\dfrac{x^2+1}{2x}$

さて，接点の x 座標を $x=\alpha$，$\beta\ (\alpha<\beta)$ とおくとき，接線の傾きはそれぞれ $f'(\alpha)$，$f'(\beta)$ なので, 2 接線が互いに垂直である条件は,

$$f'(\alpha)\cdot f'(\beta)=\frac{\alpha^2+1}{2\alpha}\cdot\frac{\beta^2+1}{2\beta}=-1$$

これより，$(\alpha^2+1)(\beta^2+1)=-4\alpha\beta$，$\alpha^2\beta^2+\alpha^2+\beta^2+1+4\alpha\beta=0$

$$(\alpha\beta+1)^2+(\alpha+\beta)^2=0$$

すると，$\alpha\beta+1=0$ かつ $\alpha+\beta=0$ より，$\alpha=-1$，$\beta=1$ となる。

$\alpha=-1$ のとき，$f'(-1)=-1$，$f(-1)=1$ より，接線の方程式は,

$$y-1=-(x+1),\quad y=-x$$

$\beta=1$ のとき，$f'(1)=1$，$f(1)=1$ より，接線の方程式は,

$$y-1=x-1,\quad y=x$$

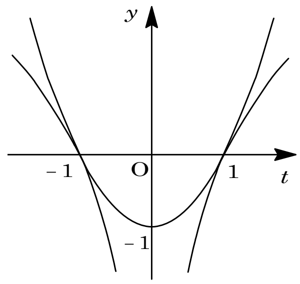
(2)　接点を $(t,\ f(t))$ とおくと，接線の方程式は，$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

原点を通ることより，$-f(t)=f'(t)(-t)$

$$-\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{2}\log|t|-\frac{3}{4}=\frac{t^2+1}{2t}\cdot(-t)$$

$$t^2+2\log|t|+3=2(t^2+1)$$

$$t^2-1=2\log|t|\cdots\cdots\cdots(*)$$



すると，右図より，$(*)$の解は $t=\pm1$ となり，(1)から傾きが正となる接線 l の方程式は $y=x$ である。

(3)　$f''(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2x^2}=\dfrac{x^2-1}{2x^2}$ より，$x>0$ において，曲線 $y=f(x)$ の概形は右図のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	×	＋		＋
$f''(x)$	×	－	0	＋
$f(x)$	×	↗	1	↗

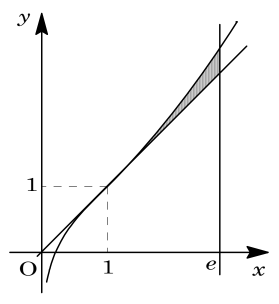
すると，曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $x=e$，$y=x$ で囲まれた図形の面積 S は,

$$S=\int_1^e\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\log x+\frac{3}{4}-x\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{2}(x\log x-x)+\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}x^2\right]_1^e$$

$$=\frac{1}{12}(e^3-1)+\frac{1}{2}e+\frac{1}{4}(e-1)-\frac{1}{2}(e^2-1)$$

$$=\frac{1}{12}e^3-\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{4}e+\frac{1}{6}$$



［解　説］

(1)で，α，β の値が求まるだろうかという懸念は杞憂に過ぎませんでした。

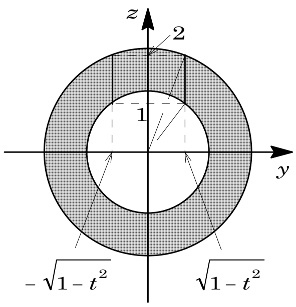
$\boxed{7}$ ［東北大］

点$(1,\ 0,\ 1)$と点$(1,\ 0,\ 2)$を結ぶ線分 l を, z 軸のまわりに 1 回転してできる円筒形 A の方程式は,

$$x^2+y^2=1,\ 1\leqq z\leqq 2$$

ここで, 円筒形 A を x 軸に垂直な平面 $x=t$ $(-1\leqq t\leqq 1)$ で切断すると, その切り口は線分となり,

$$t^2+y^2=1,\ 1\leqq z\leqq 2$$
$$y=\pm\sqrt{1-t^2},\ 1\leqq z\leqq 2$$



ここで, この 2 本の線分を x 軸のまわりに 1 回転してできるドーナツ状の図形について, その外径を R, 内径を r とおき, その面積を $S(t)$ とすると,

$$\begin{aligned}S(t)&=\pi R^2-\pi r^2\\&=\pi\left\{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^2+2^2\right\}-\pi\left\{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^2+1^2\right\}\\&=\pi(5-t^2)-\pi(2-t^2)=3\pi\end{aligned}$$

よって, A を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V とおくと,

$$V=\int_{-1}^{1}S(t)\,dt=\int_{-1}^{1}3\pi\,dt=6\pi$$

［解　説］

立体を回転してできる回転体の求積という, 2 代前の課程のころ, よく出題された問題です。回転軸に垂直な断面積を考えるのがポイントです。なお, 円柱側面の方程式については, 「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

8　　［東京工大］

(1)　$f_n(x)=a_n(x-n)(n+1-x)$ に対して，

$$f_n{}'(x)=a_n\{(n+1-x)-(x-n)\}=a_n(-2x+2n+1)$$

また，$y=e^{-x}$ に対して，$y'=-e^{-x}$

さて，2 曲線 $y=a_n(x-n)(n+1-x)$ と $y=e^{-x}$ が $x=t_n$ で接するとすると，

$$a_n(-2t_n+2n+1)=-e^{-t_n}\cdots\cdots\cdots①,\quad a_n(t_n-n)(n+1-t_n)=e^{-t_n}\cdots\cdots\cdots②$$

$a_n>0$ より，①②から，$2t_n-2n-1=(t_n-n)(n+1-t_n)$

$$t_n{}^2-(2n-1)t_n+n^2-n-1=0$$

よって，$t_n=\dfrac{2n-1\pm\sqrt{(2n-1)^2-4(n^2-n-1)}}{2}=\dfrac{2n-1\pm\sqrt{5}}{2}$

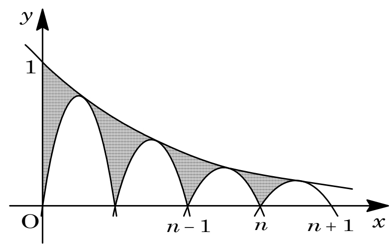
$n<t_n<n+1$ から，$t_n=\dfrac{2n-1+\sqrt{5}}{2}$ となり，①に代入すると，

$$a_n=\frac{-1}{-(2n-1+\sqrt{5})+2n+1}e^{-\frac{2n-1+\sqrt{5}}{2}}=(2+\sqrt{5})e^{-\frac{2n-1+\sqrt{5}}{2}}$$

(2)　まず，$y=f_n(x)$ と x 軸によって囲まれる部分の面積は，

$$\int_n^{n+1}a_n(x-n)(n+1-x)\,dx=\frac{a_n}{6}(n+1-n)^3=\frac{a_n}{6}$$

ここで，$0\leqq x\leqq n$ において，曲線 $y=e^{-x}$ と $y=f_0(x)$，$y=f_1(x)$，…，$y=f_{n-1}(x)$ によってはさまれた部分の面積を T_n とおくと，



$$T_n=\int_0^n e^{-x}dx-\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{n-1}a_k$$

$$=-\Big[e^{-x}\Big]_0^n-\frac{2+\sqrt{5}}{6}\sum_{k=0}^{n-1}e^{-\frac{2n-1+\sqrt{5}}{2}}$$

$$=-e^{-n}+1-\frac{2+\sqrt{5}}{6}e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\cdot\frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}}$$

さて，条件より，$T_n<S_0+S_1+\cdots+S_n<T_{n+1}$ であり，

$$\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}T_{n+1}=1-\frac{2+\sqrt{5}}{6}e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\cdot\frac{1}{1-e^{-1}}=1-\frac{2+\sqrt{5}}{6(e-1)}e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

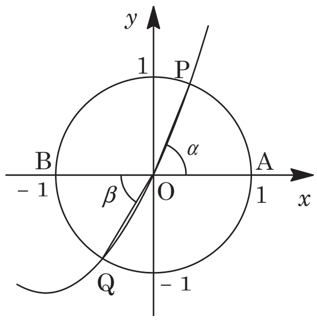
よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(S_0+S_1+\cdots+S_n)=1-\frac{2+\sqrt{5}}{6(e-1)}e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$

［解　説］

(2)では，最初，S_n を定積分で立式しましたが，とうてい計算を実行する気になれません。そこで，$\dfrac{1}{6}$ 公式が登場したわけです。

9

［東北大］



(1)　$f(x)=x^2+2kx$ に対し，点 $\mathrm{P}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ が曲線 $y=f(x)$ 上にあるので,

$$\sin\alpha=\cos^2\alpha+2k\cos\alpha$$

よって，$k=\dfrac{\sin\alpha-\cos^2\alpha}{2\cos\alpha}=\dfrac{1}{2}(\tan\alpha-\cos\alpha)$

(2)　まず, 弧 PQ に対する扇形の面積 S_1 は,

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\frac{\pi}{2}+\beta\right)=\frac{1}{2}(\pi-\alpha+\beta)$$

また, 線分 OP : $y=x\tan\alpha$ と曲線 $y=f(x)$ に囲まれた部分の面積 S_2 は,

$$S_2=\int_0^{\cos\alpha}\{x\tan\alpha-f(x)\}dx=\int_0^{\cos\alpha}-x(x-\cos\alpha)dx=\frac{1}{6}\cos^3\alpha$$

同様にして，$\mathrm{Q}(-\cos\beta,\ -\sin\beta)$ から，線分 OQ : $y=x\tan\beta$ と曲線 $y=f(x)$ に囲まれた部分の面積 S_3 は,

$$S_3=\int_{-\cos\beta}^{0}\{x\tan\beta-f(x)\}dx=\int_{-\cos\beta}^{0}-x(x+\cos\beta)dx=\frac{1}{6}\cos^3\beta$$

よって，$S(k)=S_1+S_2+S_3=\dfrac{1}{2}(\pi-\alpha+\beta)+\dfrac{1}{6}(\cos^3\alpha+\cos^3\beta)$

(3)　まず, (1)より，$k+\dfrac{1}{2}\cos\alpha=\dfrac{1}{2}\tan\alpha$ であり，$|\cos\alpha|\leqq 1$ より，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ において, $k\to\infty$ のとき $\alpha\to\dfrac{\pi}{2}$ である。

また, 点 $\mathrm{Q}(-\cos\beta,\ -\sin\beta)$ が曲線 $y=f(x)$ 上にあるので,

$$-\sin\beta=\cos^2\beta-2k\cos\beta$$

よって，$k=\dfrac{\sin\beta+\cos^2\beta}{2\cos\beta}=\dfrac{1}{2}(\tan\beta+\cos\beta)$ より，$k-\dfrac{1}{2}\cos\beta=\dfrac{1}{2}\tan\beta$

すると, 同様にして, $k\to\infty$ のとき $\beta\to\dfrac{\pi}{2}$ である。

以上より，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}S(k)=\lim_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{2}(\pi-\alpha+\beta)+\frac{1}{6}(\cos^3\alpha+\cos^3\beta)\right\}=\frac{1}{2}\pi$

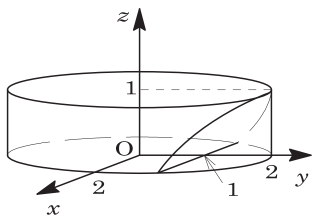
［解 説］

計算量も適度な, 微積分の総合問題です。なお, (3)の結論は, 図からの予測と一致するものです。

10　　［京都大］

　xy 平面上の直線 $y=1$ を含み，xy 平面と $45°$ の角をなす平面 H の方程式は，

$$z=y-1$$



　円柱 C を平面 H で分けた下方の部分を A としたとき，A を表す不等式は，

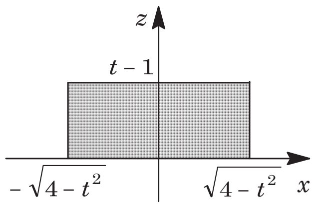
$$x^2+y^2 \leqq 4,\quad 0 \leqq z \leqq 1,\quad z \leqq y-1$$

　ここで, A を $y=t$ $(1 \leqq t \leqq 2)$ で切断したとき，その切り口は，$y=t$ 上で,

$$x^2 \leqq 4-t^2,\quad 0 \leqq z \leqq 1,\quad z \leqq t-1$$

　$1 \leqq t \leqq 2$ より，$4-t^2 \geqq 0$，$0 \leqq t-1 \leqq 1$ から,

$$-\sqrt{4-t^2} \leqq x \leqq \sqrt{4-t^2},\quad 0 \leqq z \leqq t-1$$



　この切り口の面積を $S(t)$ とおくと,

$$S(t)=2(t-1)\sqrt{4-t^2}$$

　よって, A の体積を V とすると,

$$V=\int_1^2 S(t)\,dt=\int_1^2 2t\sqrt{4-t^2}\,dt-2\int_1^2 \sqrt{4-t^2}\,dt$$

$$=\left[-\frac{2}{3}(4-t^2)\sqrt{4-t^2}\,\right]_1^2-2\left(\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi+\sqrt{3}=3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$$

［解　説］

　非回転体の体積を求める頻出問題です。京大では必須の平面の方程式を利用しています。なお，積分の第 2 項は，半径 2 の円を用いて，面積として計算しています。

11 ［筑波大］

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(\cos\theta-1,\ 2+\sin\theta,\ -1)$ より，直線 PQ は, u を実数として，

$$(x,\ y,\ z)=(1,\ 0,\ 1)+u(\cos\theta-1,\ 2+\sin\theta,\ -1)$$

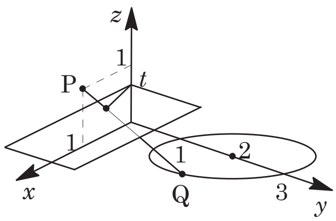
さて，平面 $z=t$ と交わるのは，$1-u=t$ より，$u=1-t$ のときであり，このとき，

$$x=1+(1-t)(\cos\theta-1)=(1-\cos\theta)t+\cos\theta,\quad y=(1-t)(2+\sin\theta)$$

条件より，交点を $(\alpha,\ \beta,\ t)$ とおくと，

$$\alpha^2+\beta^2=\{(1-\cos\theta)t+\cos\theta\}^2+(2+\sin\theta)^2(1-t)^2$$
$$=(6+4\sin\theta-2\cos\theta)t^2+(-10-8\sin\theta+2\cos\theta)t+(5+4\sin\theta)$$

(2)　線分 PQ を z 軸のまわりに 1 回転させてできる曲面を，平面 $z=t$ で切断したときにできる切り口は，中心が $(0,\ 0,\ t)$ で，半径が $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ の円である。



その断面積を $S(t)$ とおくと，

$$S(t)=\pi(\alpha^2+\beta^2)$$

よって，求める立体の体積 V は, (1)より，

$$V=\int_0^1 S(t)\,dt=\pi\int_0^1(\alpha^2+\beta^2)\,dt$$
$$=\pi\left\{\frac{1}{3}(6+4\sin\theta-2\cos\theta)+\frac{1}{2}(-10-8\sin\theta+2\cos\theta)+(5+4\sin\theta)\right\}$$
$$=\frac{\pi}{3}(6+4\sin\theta+\cos\theta)$$

(3)　α を $\cos\alpha=\dfrac{4}{\sqrt{17}}$，$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{17}}$ を満たす角と決めると, (2)より，

$$V=\frac{\pi}{3}\{6+\sqrt{17}\sin(\theta+\alpha)\}$$

すると，$0\leqq\theta<2\pi$ より，$-1\leqq\sin(\theta+\alpha)\leqq1$ となり，V の最大値は $\dfrac{\pi}{3}(6+\sqrt{17})$，最小値は $\dfrac{\pi}{3}(6-\sqrt{17})$ である。

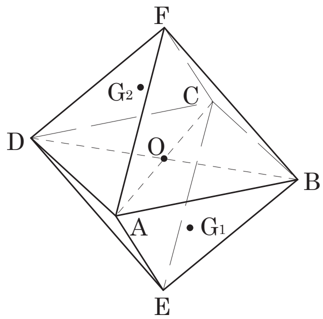
［解 説］

軸とねじれの位置にある線分を回転したときにできる曲面で囲まれた立体の体積を求める頻出問題です。ただ，本問は計算量が多めです。

12　　［東京大］

(1)　1 辺の長さが 1 の正八面体 ABCDEF において，正方形 ABCD の対角線の交点を O とすると，

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \cdots\cdots\cdots①$$

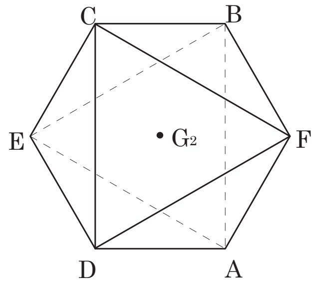


また，$\triangle$ACE は $\angle\mathrm{AEC}=90^\circ$ の直角二等辺三角形であるので，

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OE}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \cdots\cdots\cdots②$$

すると，四面体 OABE において，底面の正三角形 ABE の重心を $\mathrm{G_1}$ とおくと，①②より，線分 $\mathrm{OG_1}$ は平面 ABE に垂直である。

同様に，正三角形 CDF の重心を $\mathrm{G_2}$ とおくと，線分 $\mathrm{OG_2}$ は平面 CDF に垂直である。さらに，平面 ABE と平面 CDF は平行であることより，3 点 $\mathrm{G_1}$，O，$\mathrm{G_2}$ は一直線上にある。



これより，$\triangle$ABE の面を水平な台に置き，真上から見ると，正三角形 ABE を $\mathrm{G_2}$($\mathrm{G_1}$)のまわりに180° だけ回転すると正三角形 CDF の位置になっている。

したがって，正八面体を真上から見た図は，正六角形 AFBCED を外形とする右図である。

(2)　直線 $\mathrm{G_1G_2}$ を軸としてこの正八面体を 1 回転させてできる立体を R とすると，その外形は，辺 AF を $\mathrm{G_1G_2}$ のまわりに回転したものに等しい。

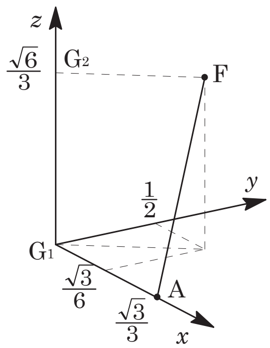
さて，辺 BE の中点を M とおき，$\triangle$OAM において，

$$\mathrm{AG_1}=\frac{2}{3}\mathrm{AM}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\mathrm{G_1G_2}=2\mathrm{OG_1}=2\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{AG_1}^2}=2\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

ここで，$\mathrm{G_1}$ を原点とし，平面 ABE を xy 平面とする座標系を設定する。さらに，$\mathrm{G_1A}$ を x 軸，$\mathrm{G_1G_2}$ を z 軸とすると，

$$\mathrm{G_1}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{G_2}\left(0,\ 0,\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right),\ \mathrm{A}\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ 0,\ 0\right)$$



また，点 F の x 座標と y 座標は，

$$x=\frac{\sqrt{3}}{3}\cos60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{6},\quad y=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin60^\circ=\frac{1}{2}$$

よって，$\mathrm{F}\left(\frac{\sqrt{3}}{6},\ \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{6},\ \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right)=\frac{1}{6}(-\sqrt{3},\ 3,\ 2\sqrt{6})$$

これより，直線 AF のパラメータ表示は，

$$(x,\ y,\ z)=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ 0,\ 0\right)+t(-\sqrt{3},\ 3,\ 2\sqrt{6})\cdots\cdots\cdots③$$

直線③と平面 $z=k\ \left(0\leqq k\leqq\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ との交点は，$2\sqrt{6}t=k$ より $t=\frac{\sqrt{6}}{12}k$ となり，

$$x=\frac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{12}k=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{4}k,\quad y=3\cdot\frac{\sqrt{6}}{12}k=\frac{\sqrt{6}}{4}k$$

よって，立体 R を平面 $z=k$ で切断したときの切り口の面積を $S(k)$ とおくと，

$$S(k)=\pi(x^2+y^2)=\pi\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{4}k\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{4}k\right)^2\right\}=\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{6}}{6}k+\frac{1}{2}k^2\right)$$

これより，立体 R の体積 V は，

$$V=\pi\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}}S(k)\,dk=\pi\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}}\left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{6}}{6}k+\frac{1}{2}k^2\right)dk$$

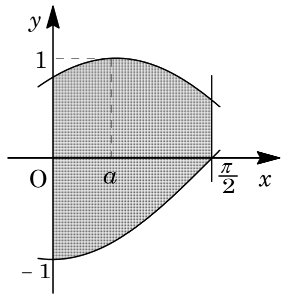
$$=\pi\left[\frac{1}{3}k-\frac{\sqrt{6}}{12}k^2+\frac{1}{6}k^3\right]_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}}=\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{9}-\frac{\sqrt{6}}{18}+\frac{\sqrt{6}}{27}\right)=\frac{5}{54}\sqrt{6}\pi$$

[解 説]

ありふれた素材をもとにしたものですが，内容は本格的な求積問題です。東大らしい構図です。

$\boxed{13}$ ［神戸大］

(1)　2 直線 $x=0$ と $x=\dfrac{\pi}{2}$，2 曲線 $y=\cos(x-a)$ と $y=-\cos x$ によって囲まれる図形 G の面積 S は,



$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{\cos(x-a)+\cos x\}dx$$

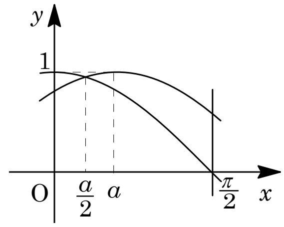
$$=\Big[\sin(x-a)+\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\sin\Big(\frac{\pi}{2}-a\Big)-\sin(-a)+1=\cos a+\sin a+1$$

(2)　(1)から，$S=\sqrt{2}\sin\Big(a+\dfrac{\pi}{4}\Big)+1$

そこで，$0\leqq a<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\dfrac{\pi}{4}\leqq a+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3\pi}{4}$ から，$a+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $a=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，S は最大値 $\sqrt{2}+1$ をとる。

(3)　まず，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において，曲線 $y=-\cos x$ を x 軸に関して折り返し, x 軸の上側に対称移動すると，曲線 $y=\cos x$ となる。そして，$0<a<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，2 曲線 $y=\cos(x-a)$，$y=\cos x$ の交点は,



$$\cos(x-a)=\cos x,\quad x-a=-x,\quad x=\frac{a}{2}$$

図形 G を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体は，$0\leqq x\leqq\dfrac{a}{2}$ では $y=\cos x$，$\dfrac{a}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ では $y=\cos(x-a)$ を 1 回転させたものに等しく，その体積 V は,

$$V=\pi\int_0^{\frac{a}{2}}\cos^2x\,dx+\pi\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(x-a)\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{a}{2}}(1+\cos 2x)\,dx+\frac{\pi}{2}\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\{1+\cos 2(x-a)\}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx+\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{a}{2}}\cos 2x\,dx+\frac{\pi}{2}\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2(x-a)\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\Big[\frac{\sin 2x}{2}\Big]_0^{\frac{a}{2}}+\frac{\pi}{2}\Big[\frac{\sin 2(x-a)}{2}\Big]_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi}{4}\sin a+\frac{\pi}{4}\sin(\pi-2a)-\frac{\pi}{4}\sin(-a)=\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi}{2}\sin a+\frac{\pi}{4}\sin 2a$$

なお，この式は $a=0$ のときも成立する。

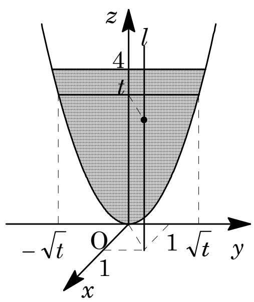
［解 説］

(3)でも利用したように，回転体の体積を求めるとき，回転軸の一方の側に曲線を対称移動してまとめると，ミスが少なくなります。

$\boxed{14}$ ［筑波大］

(1)　まず，平面図形 $D: x=0,\ \ y^2 \leqq z \leqq 4$ と平面 $z=t$ との交わり D_t は，線分となり，

$$x=0\,,\ -\sqrt{t} \leqq y \leqq \sqrt{t}\,,\ z=t \cdots\cdots\cdots(*)$$



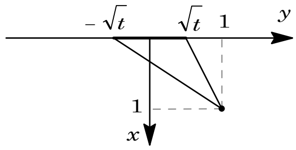
また，直線 l と平面 $z=t$ との交わりは点 $(1,\ 1,\ t)$ である。

さて，$(*)$上の点 P と点 $(1,\ 1,\ t)$ との距離の最大値を M，最小値を m とおくと，

(i)　$0 \leqq t \leqq 1$ のとき

$$M=\sqrt{(1+\sqrt{t}\,)^2+1^2}=\sqrt{2+2\sqrt{t}+t}$$

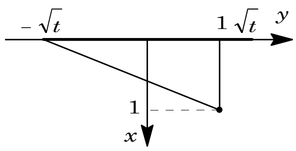
$$m=\sqrt{(1-\sqrt{t}\,)^2+1^2}=\sqrt{2-2\sqrt{t}+t}$$



(ii)　$1 \leqq t \leqq 4$ のとき

$$M=\sqrt{(1+\sqrt{t}\,)^2+1^2}=\sqrt{2+2\sqrt{t}+t}$$

$$m=1$$

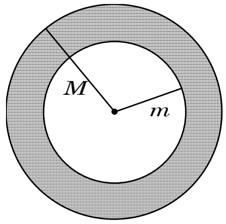


(2)　D を l のまわりに 1 回転させてできる立体 E を，平面 $z=t$ によって切断したとき，その切り口の面積 $S(t)$ は，

$$S(t)=\pi(M^2-m^2)$$

(i)　$0 \leqq t \leqq 1$ のとき

$$S(t)=\pi\{(2+2\sqrt{t}+t)-(2-2\sqrt{t}+t)\}=4\pi\sqrt{t}$$



(ii)　$1 \leqq t \leqq 4$ のとき

$$S(t)=\pi\{(2+2\sqrt{t}+t)-1\}=\pi(1+2\sqrt{t}+t)$$

(3)　E の体積 V は，

$$V=\int_0^4 S(t)\,dt=4\pi\int_0^1 \sqrt{t}\,dt+\pi\int_1^4(1+2\sqrt{t}+t)\,dt$$

$$=4\pi\Big[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1+\pi\Big[t+\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}t^2\Big]_1^4=\frac{8}{3}\pi+\Big(3+\frac{28}{3}+\frac{15}{2}\Big)\pi=\frac{45}{2}\pi$$

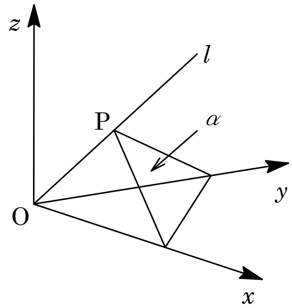
［解 説］

平面図形を回転したときにできる立体の体積を求めるものです。回転軸に垂直な断面がドーナツ形になるので，その外径と内径を求めるところがポイントです。

15　　［東京工大］

(1)　原点と点$(1,\ 1,\ 1)$を通る直線lの方程式は,

$x=y=z$ ………①



これより, 点$\mathrm{P}\left(\frac{t}{3},\ \frac{t}{3},\ \frac{t}{3}\right)$を通り$l$と垂直な平面$\alpha$は,

$\left(x-\frac{t}{3}\right)+\left(y-\frac{t}{3}\right)+\left(z-\frac{t}{3}\right)=0$, $x+y+z=t$

この平面とxy平面との交線は, $z=0$を代入して,

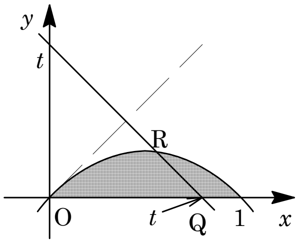
$x+y=t$, $z=0$

(2)　xy 平面上で, $x+y=t$ ……②と$y=x(1-x)$ ……③を連立すると,

$t-x=x-x^2$, $x^2-2x+t=0$ ………④

②と③が共有点をもつ条件は,

$D/4=1-t\geqq 0$, $t\leqq 1$

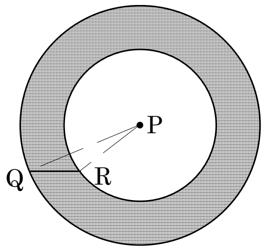


よって, 直線②と領域$D: 0\leqq y\leqq x(1-x)$が共有点をもつ条件は, $0\leqq t\leqq 1$である。

このとき, 右図のように共有点をQ, Rとおくと, ④から, $\mathrm{Q}(t,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{R}(1-\sqrt{1-t},\ t-1+\sqrt{1-t},\ 0)$となる。

また, 直線lをxy平面へ正射影すると, 直線$x=y$, $z=0$となり, この直線は放物線③の原点における接線と一致する。

これより, 平面α上で点Pを中心として線分QRを回転してできるドーナツ状の図形の外径はPQ, 内径はPRとなり, その面積$S(t)$は,



$$\mathrm{PQ}^2=\left(-\frac{2}{3}t\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^2=\frac{2}{3}t^2$$

$$\mathrm{PR}^2=\left(\frac{t}{3}-1+\sqrt{1-t}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}t+1-\sqrt{1-t}\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^2$$

$$=\frac{2}{3}t^2-4(t-1)-2(2-t)\sqrt{1-t}$$

$$S(t)=\pi(\mathrm{PQ}^2-\mathrm{PR}^2)=\pi\{4(t-1)+2(2-t)\sqrt{1-t}\}$$

さて, 直線lの$x\geqq 0, y\geqq 0, z\geqq 0$の部分を正とする$l$軸を設定し, $l=\mathrm{OP}$とおくと, $t\geqq 0$において,

$$l=\sqrt{\left(\frac{t}{3}\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}t$$

よって, $\frac{dl}{dt}=\frac{1}{\sqrt{3}}$となり, 求める回転体の体積$V$は,

$$V=\int_0^1 S(t)\frac{dl}{dt}dt=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\int_0^1\{4(t-1)+2(2-t)\sqrt{1-t}\}dt$$

ここで，$1-t=u$ とおくと，

$$V=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\int_1^0\{-4u+2(u+1)\sqrt{u}\}(-du)=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\int_0^1(-4u+2u\sqrt{u}+2\sqrt{u})\,du$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\Big[-2u^2+\frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\Big(-2+\frac{4}{5}+\frac{4}{3}\Big)=\frac{2\sqrt{3}}{45}\pi$$

［解 説］

過去問を探す気分にはなりませんが，20 年以上も前には，よく見かけた問題です。ドーナツ状の断面の外径がいつも PQ，内径がいつも PR で，場合分けが必要ないのにはホッとします。なお，空間における直線や平面の方程式については「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

16　　［筑波大］

(1)　$C_1: y=\sin x$ ……①，$C_2: y=\cos x$ ……②，$C_3: y=\tan x$ ……③に対し，

まず，C_1 と C_2 の交点は，①②から，$\sin x=\cos x$ より，$\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

$0\leqq x<\frac{\pi}{2}$ より，$x=\frac{\pi}{4}$，$y=\frac{\sqrt{2}}{2}$

また，C_2 と C_3 の交点は，②③から，$\cos x=\tan x$ より，

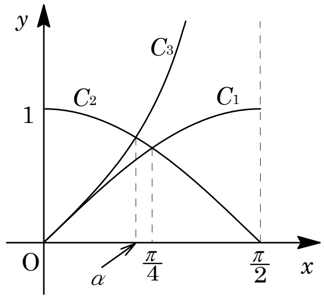
$$\cos^2 x=\sin x,\ \sin^2 x+\sin x-1=0$$

$0\leqq x<\frac{\pi}{2}$ における解を $x=\alpha$ とおくと，$\sin\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$$y=\cos\alpha=\sqrt{\sin\alpha}=\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

さらに，C_3 と C_1 の交点は，③①から，$\tan x=\sin x$ より，$\sin x(\cos x-1)=0$

$0\leqq x<\frac{\pi}{2}$ より，$x=0$，$y=0$



(2)　C_1，C_2，C_3 によって囲まれる図形の面積 S は，

$$S=\int_0^{\alpha}\tan x\,dx+\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}}\cos x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\,dx$$

$$=\Big[-\log|\cos x|\Big]_0^{\alpha}+\Big[\sin x\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}}+\Big[\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=-\log(\cos\alpha)+\log 1+\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}-1$$

$$=-\log\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+\sqrt{2}-1$$

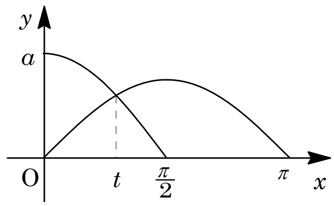
$$=-\frac{1}{2}\log\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+\sqrt{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}$$

［解　説］

基本的な求積問題です。まったく同じ問題を解いたという記憶はあるものの，出典は思い浮かびません。

17 ［京都大］

曲線 $y=\sin x\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積 S は,



$$S=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=-\Big[\cos x\Big]_0^{\pi}=2 \cdots\cdots\cdots ①$$

また，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における曲線 $y=\sin x$，$y=a\cos x$ の交点を $x=t$ とおくと,

$$\sin t=a\cos t \cdots\cdots\cdots ②$$

すると, 2 曲線 $y=\sin x$，$y=a\cos x$ と x 軸で囲まれた図形の面積 T は,

$$T=\int_0^{t}\sin x\,dx+\int_t^{\frac{\pi}{2}}a\cos x\,dx=-\Big[\cos x\Big]_0^{t}+a\Big[\sin x\Big]_t^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\cos t+1+a(1-\sin t)=-a\sin t-\cos t+a+1 \cdots\cdots\cdots ③$$

さて，条件より $S:T=3:1$ なので，$S=3T$ となり，①③から,

$$2=3(-a\sin t-\cos t+a+1)，\ 3a\sin t+3\cos t-3a-1=0 \cdots\cdots\cdots ④$$

②④より，$3(a^2+1)\cos t=3a+1$ となり,

$$\cos t=\frac{3a+1}{3(a^2+1)}，\ \sin t=\frac{a(3a+1)}{3(a^2+1)} \cdots\cdots\cdots ⑤$$

⑤を，$\sin^2 t+\cos^2 t=1$ に代入すると，$\dfrac{a^2(3a+1)^2}{9(a^2+1)^2}+\dfrac{(3a+1)^2}{9(a^2+1)^2}=1$

$$\frac{(3a+1)^2}{9(a^2+1)}=1，\ 9a^2+6a+1=9a^2+9$$

よって，$a=\dfrac{4}{3}$ となり，この値は $a>0$ を満たす。

［解 説］

交点の x 座標を文字でおき，その条件②を用いて，間接的に解き進めるタイプの有名問題です。演習必須の 1 題です。

$\boxed{18}$ ［東京大］

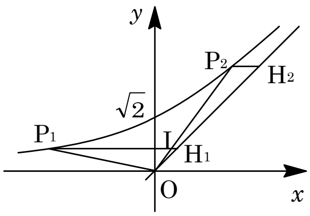
(1)　$C: y=\dfrac{1}{2}x+\sqrt{\dfrac{1}{4}x^2+2}=\dfrac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+8}\right)\cdots\cdots(*)$に対して，

$$y'=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+8}}\right)>0,\quad y''=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+8-x^2}{(x^2+8)\sqrt{x^2+8}}=\frac{4}{(x^2+8)\sqrt{x^2+8}}>0$$

また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+8}\right)=\infty$であり，

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\left(-x+\sqrt{x^2+8}\right)=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{8}{x+\sqrt{x^2+8}}=0$$

さらに，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\left(-x+\sqrt{x^2+8}\right)=0$



よって，曲線Cは下に凸であり，x軸および直線$y=x$を漸近線としてもつ。

さて，$P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$から，$H_1(y_1,\ y_1)$，$H_2(y_2,\ y_2)$となり，

$$\triangle OP_1H_1=\frac{1}{2}(y_1-x_1)y_1=\frac{1}{8}\left(-x_1+\sqrt{x_1{}^2+8}\right)\left(x_1+\sqrt{x_1{}^2+8}\right)=1$$

同様に，$\triangle OP_2H_2=1$となるので，$\triangle OP_1H_1=\triangle OP_2H_2$である。

(2)　2直線P_1H_1とOP_2の交点をIとおくとき，$\triangle OP_1H_1=\triangle OP_2H_2$から，

$$\triangle OP_1H_1-\triangle OIH_1=\triangle OP_2H_2-\triangle OIH_1$$

これより，Cと線分P_1O，P_2Oとで囲まれる図形の面積Sは，Cと線分P_1H_1，P_2H_2，および直線$y=x$とで囲まれる図形の面積に等しい。

ここで，$(*)$より，$2y=x+\sqrt{x^2+8}$から，$(2y-x)^2=x^2+8$

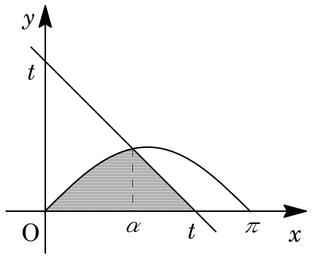
$$y^2-yx=2,\quad x=y-\frac{2}{y}$$

よって，$\displaystyle S=\int_{y_1}^{y_2}\left\{y-\left(y-\frac{2}{y}\right)\right\}dy=\int_{y_1}^{y_2}\frac{2}{y}dy=2\Big[\log y\Big]_{y_1}^{y_2}=2\log\frac{y_2}{y_1}$

［解 説］

曲線の概形を描くのに，時間がかかります。なお，Sはxで積分することによっても求められます。ただ，(1)を利用して，置換積分を実行しても，3倍程度の記述量が必要です。最初はこの解法でしたが，書き直しました。

19　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東北大］



領域$0 \leqq y \leqq \sin x$ ……①，$0 \leqq x \leqq t-y$ ……②に対して，$0<t<3$ より，①の境界線$y=\sin x$と②の境界線$y=t-x$の交点はただ１つ存在し，それを$x=\alpha$とおくと，

$$\sin\alpha = t-\alpha\,,\ t=\alpha+\sin\alpha \cdots\cdots\cdots③$$

このとき，右図の網点部を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積$V(t)$は，③を利用すると，

$$V(t)=\pi\int_0^\alpha \sin^2 x\,dx+\frac{1}{3}\pi(t-\alpha)\sin^2\alpha=\pi\int_0^\alpha \sin^2 x\,dx+\frac{1}{3}\pi\sin^3\alpha \cdots\cdots\cdots④$$

ここで，③から，$\dfrac{dt}{d\alpha}=1+\cos\alpha$ となり，④より，

$$\frac{d}{dt}V(t)=\frac{d}{d\alpha}V(t)\frac{d\alpha}{dt}=(\pi\sin^2\alpha+\pi\sin^2\alpha\cos\alpha)\cdot\frac{1}{1+\cos\alpha}=\pi\sin^2\alpha$$

さて，条件より，$\dfrac{d}{dt}V(t)=\dfrac{\pi}{4}$ なので，$\sin^2\alpha=\dfrac{1}{4}$

$0<\alpha<3$から，$\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$となり，$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi$である。

$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$のとき，③より$t=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2}<3$から適する。

$\alpha=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき，③より$t=\dfrac{5}{6}\pi+\dfrac{1}{2}>\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}=3$から適さない。

よって，$t=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2}$であり，このとき，④より，

$$V(t)=\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2 x\,dx+\frac{1}{3}\pi\sin^3\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos 2x)\,dx+\frac{1}{24}\pi$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[x-\frac{1}{2}\sin 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}+\frac{1}{24}\pi=\frac{\pi^2}{12}-\Big(\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{24}\Big)\pi$$

［解　説］

$0<x<\pi$ において，$y=\sin x$ のグラフは上に凸であり，$x=\pi$ における接線の傾きが-1であることから，$y=\sin x$ と $y=t-x$ の交点はただ 1 つであることがわかります。また，$0<\alpha<\pi$ において，t はαの単調増加関数なので，αはtの関数になっています。

$\boxed{20}$ ［大阪大］

条件より，球 T_1，T_2 の中心をそれぞれ $(0,\ 0,\ 0)$，$(2,\ 0,\ 0)$ とすると，

$$T_1 : x^2+y^2+z^2=9,\ T_2 : (x-2)^2+y^2+z^2=1$$

また，球 S の中心を $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ とおくと，

$$S : (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=1$$

さて, S は T_1 の内部にあるか T_1 に内接していることより，

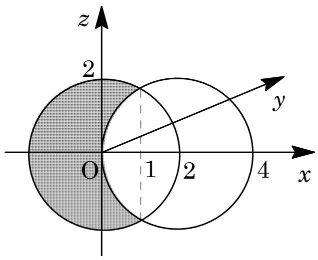
$$\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2+{z_0}^2} \leqq 3-1,\ {x_0}^2+{y_0}^2+{z_0}^2 \leqq 4 \cdots\cdots\cdots ①$$

また, S は T_2 の外部にあるか T_2 に外接していることより，

$$\sqrt{(x_0-2)^2+{y_0}^2+{z_0}^2} \geqq 1+1,\ (x_0-2)^2+{y_0}^2+{z_0}^2 \geqq 4 \cdots\cdots\cdots ②$$

よって, S の中心が存在しうる範囲 D は，①②より，

$$x^2+y^2+z^2 \leqq 4 \cdots\cdots\cdots ①'$$
$$(x-2)^2+y^2+z^2 \geqq 4 \cdots\cdots\cdots ②'$$



ここで，平面 $x=k\ (0 \leqq k \leqq 1)$ で①′②′の共通範囲を切断すると，

$$y^2+z^2 \leqq 4-k^2 \cdots\cdots\cdots ①'$$
$$y^2+z^2 \geqq 4-(k-2)^2 \cdots\cdots\cdots ②'$$

これより，切り口は，x 軸上に中心があり，外径が $\sqrt{4-k^2}$，内径が $\sqrt{4-(k-2)^2}$ のドーナツ形であり，その面積 $S(k)$ は，

$$S(k)=\pi(4-k^2)-\pi\{4-(k-2)^2\}=\pi(4-4k)$$

これより，立体 D の体積 V は，

$$V=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 2^3+\int_0^1 S(k)\,dk=\frac{16}{3}\pi+\int_0^1 \pi(4-4k)\,dk=\frac{16}{3}\pi+2\pi=\frac{22}{3}\pi$$

［解 説］

平面図形では頻出の内接と外接を題材にした問題です。対象が空間図形でも同じように考えることができます。なお，球面の方程式などについては「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

$\boxed{21}$ ［東北大・理］

(1) 円 C の中心 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ は，点 $(a,\ -a)$ を通り，接線 $y=-x$ に垂直な直線上にあり，

$$Y+a=X-a\ ,\ \ X=Y+2a\cdots\cdots\cdots①$$

また，点 P と点 $(a,\ -a)$ の距離と，点 P と点 $(0,\ 1)$ の距離は等しいので，

$$(X-a)^2+(Y+a)^2=X^2+(Y-1)^2\ ,\ \ -2aX+2(a+1)Y+2a^2=1\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$-2a(Y+2a)+2(a+1)Y+2a^2=1$，$2Y=2a^2+1$ となり，

$$Y=\frac{2a^2+1}{2}\ ,\ \ X=\frac{2a^2+1}{2}+2a=\frac{2a^2+4a+1}{2}$$

(2) (1)より，点 P の軌跡は，$x=\dfrac{2a^2+4a+1}{2}$，$y=\dfrac{2a^2+1}{2}$ から，

$$\frac{dx}{da}=2a+2\ ,\ \ \frac{dy}{da}=2a$$

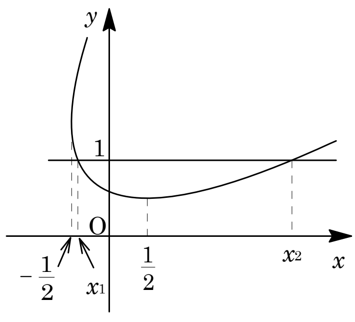
すると，x, y の増減は右表のようになる。

a	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$\dfrac{dx}{da}$	$-$	0	$+$		$+$
x	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$
$\dfrac{dy}{da}$	$-$		$-$	0	$+$
y	$\searrow$	$\dfrac{3}{2}$	$\searrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$

また，点 P の軌跡と直線 $y=1$ との交点は，

$$\frac{2a^2+1}{2}=1\ ,\ \ a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

これより，点 P の軌跡と直線 $y=1$ とで囲まれる図形の面積 S は，



$$\begin{aligned}
S&=\int_{x_1}^{x_2}(1-y)\,dx\\
&=\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\Big(1-\frac{2a^2+1}{2}\Big)(2a+2)\,da\\
&=\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(-2a^3-2a^2+a+1)\,da\\
&=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(-2a^2+1)\,da\\
&=2\Big[-\frac{2}{3}a^3+a\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2}{3}\sqrt{2}
\end{aligned}$$

［解 説］

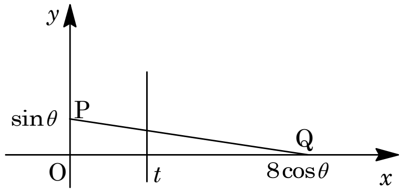
(2)では，最初，パラメータを消去しようとしましたが，交点の座標の値をみて，考え直しました。その結果が，上の解答例です。

$\boxed{22}$ ［大阪大］

まず，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，線分 PQ を表す方程式は，$x=0$　$(0\leqq y\leqq 1)$ である。

また，$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，線分 PQ を表す方程式は，

$$y=-\frac{\tan\theta}{8}x+\sin\theta\quad(0\leqq x\leqq 8\cos\theta)$$



さて，直線 $x=t$ $(0\leqq t\leqq 8\cos\theta)$ 上における y のとりうる値の範囲を求める。

ここで，$f(\theta)=-\dfrac{t}{8}\tan\theta+\sin\theta$ とおくと，

$$f'(\theta)=-\frac{t}{8}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}+\cos\theta=\frac{8\cos^3\theta-t}{8\cos^2\theta}$$

すると，$0\leqq t\leqq 8\cos\theta$ から $0\leqq\sqrt[3]{t}\leqq 2\sqrt[3]{\cos\theta}$ となり，$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt[3]{t}}{2}$ となる α がただ 1 つ存在する。また，$8\cos\beta=t$ $\left(\cos\beta=\dfrac{t}{8}\right)$ とおくと，$\dfrac{\sqrt[3]{t}}{2}\geqq\dfrac{t}{8}$ から，$\alpha\leqq\beta$ である。

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	β
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$	0	↗		↘	0

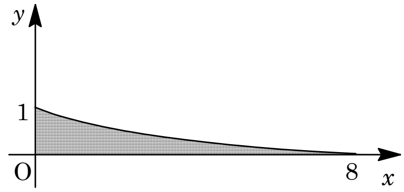
これより，$f(\theta)$ の増減は右表のようになり，

$$f(\alpha)=-\frac{t}{8}\tan\alpha+\sin\alpha=\sin\alpha\left(-\frac{t}{8\cos\alpha}+1\right)=\sqrt{1-\frac{t^{\frac{2}{3}}}{4}}\left(-\frac{t^{\frac{2}{3}}}{4}+1\right)$$

$$=\frac{\left(4-t^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{2}\cdot\frac{4-t^{\frac{2}{3}}}{4}=\frac{1}{8}\left(4-t^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

よって，線分 PQ が通過する部分 D は，

$$0\leqq y\leqq\frac{1}{8}\left(4-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$



したがって，D を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は，

$$V=\pi\int_0^8\frac{1}{64}\left(4-x^{\frac{2}{3}}\right)^3dx=\frac{\pi}{64}\int_0^8\left(64-48x^{\frac{2}{3}}+12x^{\frac{4}{3}}-x^2\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{64}\left[64x-48\cdot\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+12\cdot\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^8=\frac{\pi}{64}\left(2^9-\frac{9}{5}\cdot 2^9+\frac{9}{7}\cdot 2^9-\frac{1}{3}\cdot 2^9\right)$$

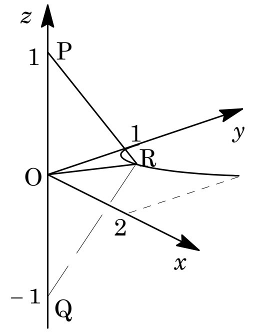
$$=2^3\pi\left(1-\frac{9}{5}+\frac{9}{7}-\frac{1}{3}\right)=\frac{128}{105}\pi$$

［解　説］

線分の通過領域を求める際に，1 文字を固定して処理する有名問題です。なお，定積分の数値計算が面倒なので，変数を取り直した方がよかったかもしれません。

$\boxed{23}$　［熊本大］

(1)　まず，$\triangle$PQR の xy 平面での切り口は，線分 OR である。すると，立体 K を xy 平面で切ったときの断面は，線分 OR の通過領域として求められる。



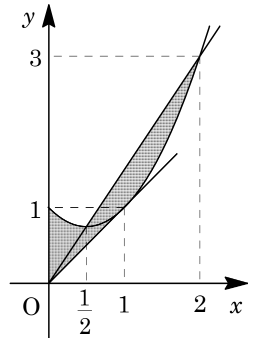
さて，$0\leqq t\leqq 2$ のとき，点 $\mathrm{R}(t,\ t^2-t+1,\ 0)$ は，xy 平面上で放物線 $y=x^2-x+1\ (0\leqq x\leqq 2)$ ……①を描く。

以下，xy 平面上で考えると，①から，$y'=2x-1$ となり，点 $(a,\ a^2-a+1)$ における接線の方程式は，

$$y-(a^2-a+1)=(2a-1)(x-a)\ \cdots\cdots\cdots②$$

原点を通るとき，$-(a^2-a+1)=-a(2a-1)$，$a^2-1=0$

$0\leqq a\leqq 2$ から $a=1$ であり，このとき②は，$y=x$ となる。



さらに，$t=2$ のとき $\mathrm{R}(2,\ 3)$ で，直線 $\mathrm{OR}: y=\dfrac{3}{2}x$ と放物線①との交点は，$x^2-x+1=\dfrac{3}{2}x$ より，

$$2x^2-5x+2=0\,,\ \ x=\frac{1}{2},\ 2$$

以上より，線分 OR の通過領域は，右図の網点部となり，その面積を S_0 とすると，

$$S_0=\int_0^1(x^2-x+1)\,dx-\frac{1}{2}\times 1^2+\int_{\frac{1}{2}}^2\Bigl\{\frac{3}{2}x-(x^2-x+1)\Bigr\}dx$$

$$=\Bigl[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\Bigr]_0^1-\frac{1}{2}+\int_{\frac{1}{2}}^2-\Bigl(x-\frac{1}{2}\Bigr)(x-2)\,dx$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\Bigl(2-\frac{1}{2}\Bigr)^3=\frac{43}{48}$$

(2)　まず，立体 K を z 軸に垂直な平面で切ったときの断面は，K を xy 平面で切ったときの断面と相似である。

そこで，$0\leqq k\leqq 1$ のとき，K を平面 $z=k$ で切ったときの断面積を S_k とおくと，相似比が $1-k:1$ であることから，$S_k:S_0=(1-k)^2:1$ となり，

$$S_k=(1-k)^2S_0=\frac{43}{48}(1-k)^2$$

立体 K は xy 平面について対称なので，その体積 V は，

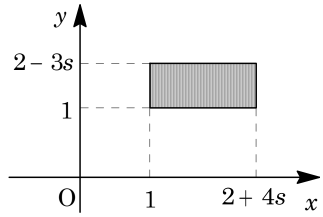
$$V=2\int_0^1S_k\,dk=\frac{43}{24}\int_0^1(k-1)^2\,dk=\frac{43}{72}\Bigl[(k-1)^3\Bigr]_0^1=\frac{43}{72}$$

［解　説］

設問(1)の定点通過する線分 OR の通過領域は，図形的に解いています。

$\boxed{24}$ ［名古屋大］

(1)　右図の長方形 R_s を x 軸のまわりに1回転してできる立体 K_s の体積 $V(s)$ は,



$$V(s)=\pi\{(2-3s)^2-1^2\}(2+4s-1)$$
$$=3\pi(3s^2-4s+1)(4s+1)$$
$$V'(s)=3\pi\{(6s-4)(4s+1)+4(3s^2-4s+1)\}$$
$$=6\pi s(18s-13)$$

すると，$-\frac{1}{4}<s<\frac{1}{3}$ における $V(s)$ の増減は右表のようになる。

s	$-\frac{1}{4}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$
$V'(s)$		$+$	0	$-$	
$V(s)$		↗	3π	↘	

よって，$V(s)$ は，$s=0$ のとき最大値 3π をとる。

(2)　$s=0$ のとき，長方形 $R_s:1\leqq x\leqq 2,\ 1\leqq y\leqq 2$ となり，立体 K_s を表す式は,

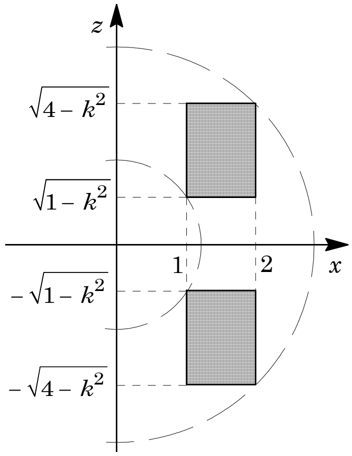
$$1\leqq y^2+z^2\leqq 4,\ 1\leqq x\leqq 2$$

さて，立体 K_s を，平面 $y=k$ で切断したときの断面は,

$$1-k^2\leqq z^2\leqq 4-k^2\cdots\cdots\text{①},\ 1\leqq x\leqq 2\cdots\cdots\text{②}$$

ここで，断面の存在する k の範囲は，$-2\leqq k\leqq 2$ であるが，xz 平面に関する対称性から，以下，$0\leqq k\leqq 2$ で考える。

(i)　$0\leqq k\leqq 1$ のとき



①より，$\sqrt{1-k^2}\leqq|z|\leqq\sqrt{4-k^2}$

②と合わせると，断面は右図のようになる。

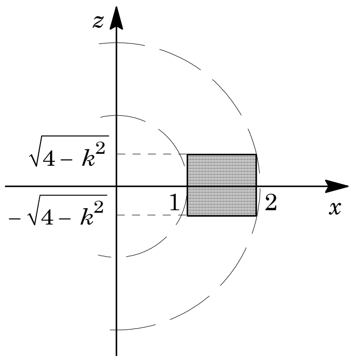
この断面を y 軸のまわりに1回転してできるドーナツ形の図形の外径を R，内径を r とすると,

$$R^2=2^2+\left(\sqrt{4-k^2}\right)^2=8-k^2$$
$$r^2=1^2+\left(\sqrt{1-k^2}\right)^2=2-k^2$$

よって，このドーナツ形の面積 $S(k)$ は,

$$S(k)=\pi(R^2-r^2)=6\pi$$

(ii)　$1\leqq k\leqq 2$ のとき



$1-k^2\leqq 0$ より，①から，$-\sqrt{4-k^2}\leqq z\leqq\sqrt{4-k^2}$

②と合わせると，断面は右図のようになる。

この断面を y 軸のまわりに1回転してできるドーナツ形の図形の外径を R，内径を r とすると,

$$R^2=2^2+\left(\sqrt{4-k^2}\right)^2=8-k^2,\ r^2=1^2$$

よって，この図形の面積 $S(k)$ は，$S(k)=\pi(R^2-r^2)=\pi(7-k^2)$

(i)(ii)より，立体 L の体積 V は,

$$V=2\int_0^2 S(k)\,dk=2\int_0^1 6\pi\,dk+2\int_1^2 \pi(7-k^2)\,dk=12\pi+2\pi\Big[7k-\frac{k^3}{3}\Big]_1^2$$

$$=12\pi+\frac{28}{3}\pi=\frac{64}{3}\pi$$

［解　説］

立体の回転体の体積を求める問題で，20 年ほど前にはよく見かけました。回転軸に垂直に切った断面の形状を考えることがポイントです。なお，上の解答例で用いた円柱面の方程式については「ピンポイント　レクチャー」を参照してください。

$\boxed{25}$ ［千葉大］

(1)　$a<b$ に対して，$f'(a)=f'(b)=0$ より，

$$\int_a^b\left(\frac{a+b}{2}-x\right)f''(x)\,dx=\left[\left(\frac{a+b}{2}-x\right)f'(x)\right]_a^b-\int_a^b -f'(x)\,dx$$
$$=\frac{a-b}{2}f'(b)-\frac{b-a}{2}f'(a)+\Big[f(x)\Big]_a^b$$
$$=f(b)-f(a)$$

(2)　車が時刻 0 で発進後，時刻 t での位置を $x(t)$ とすると，$0<T$ に対して，

$$L=\left|\int_0^T x'(t)\,dt\right|=\left|x(T)-x(0)\right|\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，条件より，$x'(0)=x'(T)=0$ なので, (1)から,

$$x(T)-x(0)=\int_0^T\left(\frac{T}{2}-t\right)x''(t)\,dt\cdots\cdots\cdots②$$

さて，$\left|x''(t)\right|<\dfrac{4L}{T^2}$ と仮定すると，①②より，

$$L=\left|\int_0^T\left(\frac{T}{2}-t\right)x''(t)\,dt\right|\leqq\int_0^T\left|\left(\frac{T}{2}-t\right)x''(t)\right|dt=\int_0^T\left|\frac{T}{2}-t\right|\left|x''(t)\right|dt$$
$$<\frac{4L}{T^2}\int_0^T\left|\frac{T}{2}-t\right|dt=\frac{4L}{T^2}\left(\frac{T^2}{8}+\frac{T^2}{8}\right)=L$$

すると，$L<L$ となり成立しない。

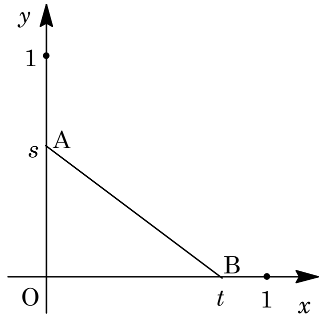
よって，この車の加速度の絶対値 $\left|x''(t)\right|$ は，ある瞬間に $\dfrac{4L}{T^2}$ 以上である。

［解 説］

速度，加速度が題材になっているユニークな問題です。(1)の結論を利用すると，(2)の背理法へとスムーズに繋がります。なお，定積分の計算は，記述を省略しましたが，面積を対応させて値を求めています。

26　　［千葉大］

(1)　A$(0,\ s)$，B$(t,\ 0)$ とおくと，線分 AB の方程式は，$0 \leqq x \leqq t$ として，



$$\frac{x}{t}+\frac{y}{s}=1,\quad y=s\left(1-\frac{x}{t}\right)\cdots\cdots\cdots①$$

ただし，$s^2+t^2=1\quad(s>0,\ t>0)\cdots\cdots\cdots②$

②より，$s=\sqrt{1-t^2}$ となり，①に代入すると，

$$y=\sqrt{1-t^2}\left(1-\frac{x}{t}\right)\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，x の値を固定し，$x \leqq t<1$ において，t の値を変化させると，

$$\frac{dy}{dt}=\frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}\left(1-\frac{x}{t}\right)+\sqrt{1-t^2}\cdot\frac{x}{t^2}$$
$$=\frac{-t^2(t-x)+x(1-t^2)}{t^2\sqrt{1-t^2}}=\frac{-(t^3-x)}{t^2\sqrt{1-t^2}}$$

t	x	$\cdots$	$\sqrt[3]{x}$	$\cdots$	1
$\dfrac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	
y	0	↗		↘	0

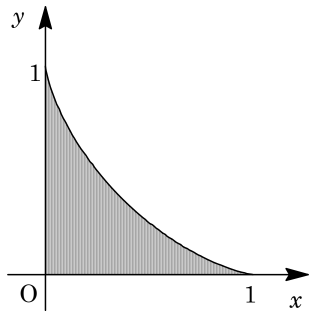
これより，y の値の増減は右表のようになる。

すると，$t=\sqrt[3]{x}$ において y は最大となり，その最大値 $f(x)$ は，

$$f(x)=\sqrt{1-\sqrt[3]{x^2}}\left(1-\frac{x}{\sqrt[3]{x}}\right)=\sqrt{1-\sqrt[3]{x^2}}\left(1-\sqrt[3]{x^2}\right)=\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

なお，$s=0$ のときは線分 AB : $y=0\quad(0 \leqq x \leqq 1)$，$t=0$ のときは線分 AB : $x=0$ $(0 \leqq y \leqq 1)$ となり，$f(x)$ は成立している。

(2)　領域 D は右図の網点部となり，これを x 軸を中心に回転させた立体の体積 V は，



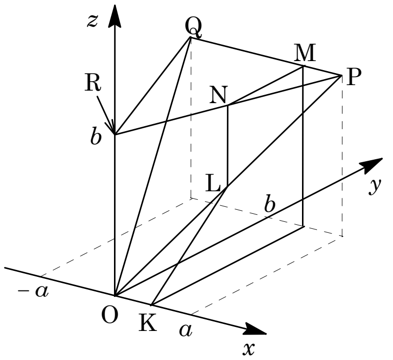
$$V=\pi\int_0^1\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^3dx$$
$$=\pi\int_0^1\left(1-3x^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{4}{3}}-x^2\right)dx$$
$$=\pi\left[x-\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}+\frac{9}{7}x^{\frac{7}{3}}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$
$$=\pi\left(1-\frac{9}{5}+\frac{9}{7}-\frac{1}{3}\right)=\frac{16}{105}\pi$$

［解　説］

アステロイドの出現する有名な問題です。1 文字 x を固定して，y のとる値の範囲を求めています。

$\boxed{27}$　　［東京医歯大］

(1) △OPQ を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体 F_1 を，点 $K(k,\ 0,\ 0)$ を通り x 軸に垂直な平面 $x=k$ で切断したときの切り口を考える。ただし，yz 平面に関する対称性より，$0 \leqq k \leqq a$ とする。



ここで，辺 OP と平面 $x=k$ との交点を L とおくと，点 L は線分 OP を $k:a-k$ に内分することより，$L\left(k,\ \dfrac{b}{a}k,\ \dfrac{b}{a}k\right)$ となる。

また，辺 PQ と平面 $x=k$ との交点を M とおくと，$M(k,\ b,\ b)$ である。

これより，切り口は外径 KM，内径 KL のドーナツ形となり，その面積 $S_1(k)$ は，

$$S_1(k)=\pi(KM^2-KL^2)=\pi\left\{(b^2+b^2)-\left(\frac{b^2}{a^2}k^2+\frac{b^2}{a^2}k^2\right)\right\}=\frac{2b^2}{a^2}\pi(a^2-k^2)$$

すると，立体 F_1 の体積 V_1 は，

$$V_1=2\int_0^a S_1(k)\,dk=\frac{4b^2}{a^2}\pi\int_0^a(a^2-k^2)\,dk=\frac{4b^2}{a^2}\pi\left[a^2k-\frac{k^3}{3}\right]_0^a=\frac{8}{3}\pi ab^2$$

条件より，$a^2+b^2=1\ (a>0,\ b>0)$ なので，$b^2=1-a^2\ (0<a<1)$ となり，

$$V_1=\frac{8}{3}\pi a(1-a^2)=\frac{8}{3}\pi(a-a^3)$$

$$\frac{dV_1}{da}=\frac{8}{3}\pi(1-3a^2)$$

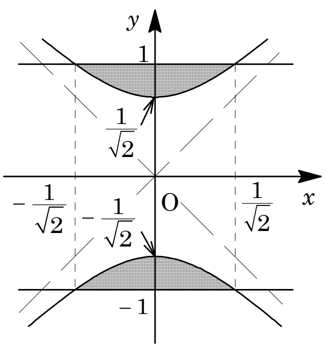
a	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$\dfrac{dV_1}{da}$		$+$	0	$-$	
V_1		$\nearrow$	$\dfrac{16}{27}\sqrt{3}\pi$	$\searrow$	

よって，V_1 の増減は右表のようになり，$a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき最大値 $\dfrac{16}{27}\sqrt{3}\pi$ をとる。

(2) 辺 RP と平面 $x=k$ との交点を N とおくと，点 N は線分 RP を $k:a-k$ に内分することより，$N\left(k,\ \dfrac{b}{a}k,\ b\right)$ となる。

これより，△PQR を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体 F_2 を平面 $x=k$ で切断したときの切り口は，外径 KM，内径 KN のドーナツ形となり，その式は，$KM^2=2b^2$，$KN^2=\dfrac{b^2}{a^2}k^2+b^2$ から，

$$x=k,\ \frac{b^2}{a^2}k^2+b^2 \leqq y^2+z^2 \leqq 2b^2$$



すると，k を消去することで，立体 F_2 を表す式は，$\dfrac{b^2}{a^2}x^2+b^2 \leqq y^2+z^2 \leqq 2b^2$ となり，$a=b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，

$$x^2+\frac{1}{2} \leqq y^2+z^2 \leqq 1$$

F_2 の xy 平面による切り口は，$z=0$ を代入して，$x^2+\dfrac{1}{2}\leqq y^2\leqq 1$ から，

$$2x^2-2y^2\leqq -1,\quad -1\leqq y\leqq 1$$

よって，切り口の周は右上図の網点部の周である。

(3) △OPR を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体 F_3 を平面 $x=k$ で切断したときの切り口は，外径 KN，内径 KL のドーナツ形となる。その面積 $S_3(k)$ は，

$$S_3(k)=\pi(\mathrm{KN}^2-\mathrm{KL}^2)=\pi\left\{\left(\frac{b^2}{a^2}k^2+b^2\right)-\left(\frac{b^2}{a^2}k^2+\frac{b^2}{a^2}k^2\right)\right\}$$
$$=\frac{b^2}{a^2}\pi(a^2-k^2)$$

すると，立体 F_3 の体積 V_3 は，$0\leqq k\leqq a$ から，

$$V_3=\int_0^a S_3(k)\,dk=\frac{b^2}{a^2}\pi\int_0^a(a^2-k^2)\,dk=\frac{2}{3}\pi ab^2=\frac{1}{4}V_1$$

よって，(1)より，V_3 は $a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，最大値 $\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{16}{27}\sqrt{3}\pi=\dfrac{4}{27}\sqrt{3}\pi$ をとる。

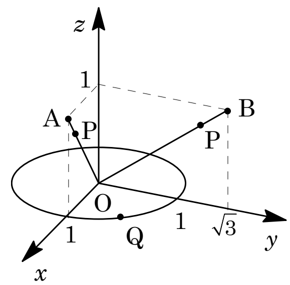
［解　説］

図形の回転体の体積を求める有名問題です。ただ，同じような設問が 3 題続くと，食傷気味になってしまいます。

28　　　　［大阪大］

(1)　$0 \leqq a \leqq 1$，$0 \leqq b \leqq 1$ とし，線分 OA 上の点 P を P_a，線分 OB 上の点 P を P_b とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_a} = a\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (a,\ 0,\ a)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_b} = b\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (0,\ \sqrt{3}b,\ b)$$



また，点 Q は円 W の周および内部にあるので，φ を任意の実数，$0 \leqq r \leqq 1$ として，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ 0)$

さて，立体 V_A 上の点 $\mathrm{R}(x,\ y,\ z)$ は，

$$(x,\ y,\ z) = \overrightarrow{\mathrm{OP}_a} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (a,\ 0,\ a) + (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ 0)$$
$$= (a + r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ a) \cdots\cdots\cdots ①$$

同様に，立体 V_B 上の点 $\mathrm{R}(x,\ y,\ z)$ は，

$$(x,\ y,\ z) = \overrightarrow{\mathrm{OP}_b} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (0,\ \sqrt{3}b,\ b) + (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ 0)$$
$$= (r\cos\varphi,\ \sqrt{3}b + r\sin\varphi,\ b) \cdots\cdots\cdots ②$$

そこで，立体 V_A と V_B の平面 $z = \cos\theta$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ による切り口を求める。

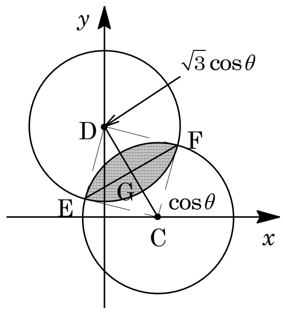
①より，$a = \cos\theta$ から，$x = \cos\theta + r\cos\varphi$，$y = r\sin\varphi$，$z = \cos\theta$

これより，立体 V_A の切り口は，平面 $z = \cos\theta$ 上で，$(x - \cos\theta)^2 + y^2 = r^2$ となり，中心 $\mathrm{C}(\cos\theta,\ 0,\ \cos\theta)$，半径 1 の円の周および内部である。

同様に，②より，$b = \cos\theta$ から，$x = r\cos\varphi$，$y = \sqrt{3}\cos\theta + r\sin\varphi$，$z = \cos\theta$

これより，立体 V_B の切り口は，平面 $z = \cos\theta$ 上で，$x^2 + (y - \sqrt{3}\cos\theta)^2 = r^2$ となり，中心 $\mathrm{D}(0,\ \sqrt{3}\cos\theta,\ \cos\theta)$，半径 1 の円の周および内部である。

よって，V_A と V_B の共通部分 V を，平面 $z = \cos\theta$ によって切断した切り口は，右図の網点部となる。



ここで，2 円の交点を E, F とし，線分 EF と CD の交点を G とおくと，中心間距離 $\mathrm{CD} = 2\cos\theta$ となることより，$\mathrm{CG} = \mathrm{DG} = \cos\theta$ である。

すると，$\angle\mathrm{ECG} = \angle\mathrm{FCG} = \angle\mathrm{EDG} = \angle\mathrm{FDG} = \theta$ となり，網点部の面積を S とすると，

$$S = 2\left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot 2\theta - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin 2\theta\right) = 2\theta - \sin 2\theta$$

(2)　立体 V の体積 U は，$U = \displaystyle\int_0^1 S\,dz$ と表せ，$z = \cos\theta$ とおくと，$dz = -\sin\theta\,d\theta$ となり，$z = 0 \to 1$ のとき $\theta = \dfrac{\pi}{2} \to 0$ である。

$$U = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (2\theta - \sin 2\theta)(-\sin\theta)\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\theta\sin\theta - \sin 2\theta\sin\theta)\,d\theta$$

ここで, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\sin\theta\,d\theta = -\Big[\,\theta\cos\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta = \Big[\,\sin\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta\sin\theta\,d\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 3\theta - \cos\theta)\,d\theta = -\frac{1}{2}\Big[\,\frac{1}{3}\sin 3\theta - \sin\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{1}{6}\cdot(-1) + \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{2}{3}$$

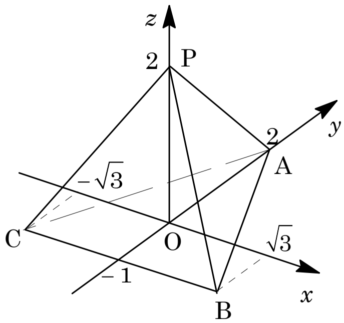
以上より, 立体 V の体積は, $U = 2 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$ である。

［解 説］

断面積を積分することによって体積を求める問題です。数式的に処理をして断面図を描きましたが, 図形的に意味を考える方がすばやく結論に到達します。ただ, プロセスの述べ方が難ですが。

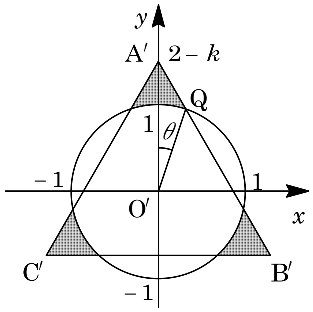
29　　　　［東京工大］

まず，四面体 PABC を平面 $z=k$ $(0 \leqq k \leqq 2)$ で切断したとき，切り口は△ABC と相似な正三角形となる。そして，辺 PA との交点は，PA を $2-k:k$ に内分することより，その座標は $(0,\ 2-k,\ k)$ である。



さて，不等式 $x^2+y^2 \geqq 1$ で表される円柱側面の外部領域と，切り口の正三角形が共通部分をもつ条件は，$2-k \geqq 1$ すなわち $0 \leqq k \leqq 1$ である。

そこで，$0 \leqq k \leqq 1$ において，平面 $z=k$ での切り口を図示すると右図のようになる。



$\angle \mathrm{A'O'Q}=\theta$，網点部の面積を $S(k)$ とおき，対称性を考えると，

$$S(k)=6\left\{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(2-k)\sin\theta-\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\theta\right\}$$
$$=3(2-k)\sin\theta-3\theta$$

さらに，$\triangle \mathrm{O'QA'}$ に正弦定理を適用すると，

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{2-k}{\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)},\quad 2-k=2\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)\cdots\cdots\cdots(*)$$

よって，$S(k)=6\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)\sin\theta-3\theta$

以上より，求める部分の体積を V とおくと，$V=\int_0^1 S(k)dk$ である。

すると，$(*)$から，$dk=2\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)d\theta$，$k=0\to 1$ のとき $\theta=\frac{\pi}{3}\to 0$ となり，

$$V=\int_{\frac{\pi}{3}}^{0}\left\{6\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)\sin\theta-3\theta\right\}\cdot 2\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)d\theta$$
$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{0}\left\{6\sin\left(\frac{5}{3}\pi-2\theta\right)\sin\theta-6\theta\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)\right\}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left\{3\cos\left(\frac{5}{3}\pi-\theta\right)-3\cos\left(\frac{5}{3}\pi-3\theta\right)+6\theta\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)\right\}d\theta$$

ここで，$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\left(\frac{5}{3}\pi-\theta\right)d\theta=-\left[\sin\left(\frac{5}{3}\pi-\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\left(\frac{5}{3}\pi-3\theta\right)d\theta=-\frac{1}{3}\left[\sin\left(\frac{5}{3}\pi-3\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

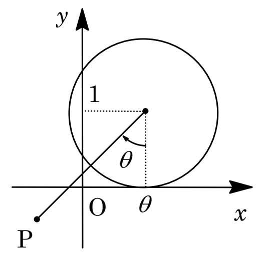
$$I_3=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\theta\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)d\theta=-\left[\theta\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)d\theta$$
$$=-\frac{\pi}{3}+\left[\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって，$V=3I_1-3I_2+6I_3=-3\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)+6\left(-\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=4\sqrt{3}-2\pi$

［解 説］

座標軸に垂直な平面での断面積をもとに計算を進める求積問題です。z 軸に垂直な平面で考えるか，y 軸に垂直な平面で考えるか，と迷います。計算量が少ないと予測した前者を選択しましたが，それでも相当な計算量が必要でした。なお，1998 年の東大で類題が出ていますが，そのときも z 軸に垂直な平面で四角錐を切断していました。

$\boxed{30}$ ［長崎大］



(1)　円が θ だけ回転したとき，円の中心の座標は $(\theta,\ 1)$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(\theta,\ 1)+2\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right),\ \sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)\right)$$

$$=(\theta,\ 1)+2(-\sin\theta,\ -\cos\theta)$$

$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，$x=\theta-2\sin\theta$，$y=1-2\cos\theta$

(2)　(1)より，$\dfrac{dx}{d\theta}=1-2\cos\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta}=2\sin\theta$

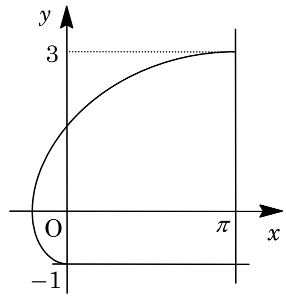
すると，$0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲で，x と y の増減は右表のようになる。

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$\dfrac{dx}{d\theta}$		$-$	0	$+$	
x	0	↘	$\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}$	↗	π
$\dfrac{dy}{d\theta}$		$+$		$+$	
y	-1	↗	0	↗	3

これより，点 P が描く曲線 C 上にあって，x 座標が最小となるのは点$\left(\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3},\ 0\right)$，最大となるのは点$(\pi,\ 3)$である。

また，y 座標が最小となるのは点$(0,\ -1)$，最大となるのは点$(\pi,\ 3)$である。

(3)　曲線 C と 2 直線 $y=-1$ および $x=\pi$ によって囲まれた図形の面積 S は,



$$S=\int_{-1}^{3}(\pi-x)dy=\int_{0}^{\pi}(\pi-\theta+2\sin\theta)2\sin\theta d\theta$$

$$=2\int_{0}^{\pi}(\pi-\theta)\sin\theta d\theta+4\int_{0}^{\pi}\sin^2\theta d\theta$$

ここで，$I_1=\displaystyle\int_{0}^{\pi}(\pi-\theta)\sin\theta d\theta$，$I_2=\displaystyle\int_{0}^{\pi}\sin^2\theta d\theta$ とおくと,

$$I_1=-\Big[(\pi-\theta)\cos\theta\Big]_0^{\pi}+\int_{0}^{\pi}(-\cos\theta)d\theta=\pi$$

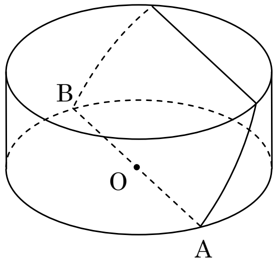
$$I_2=\int_{0}^{\pi}\frac{1-\cos2\theta}{2}d\theta=\frac{1}{2}\pi$$

したがって，$S=2I_1+4I_2=4\pi$ である。

［解 説］

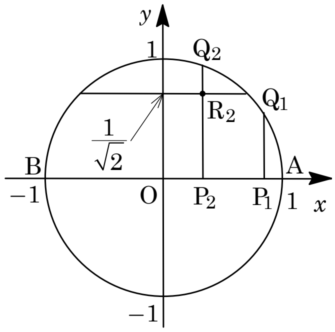
(3)では，曲線の概形を描き，y 軸方向に積分という方針を立てました。そして，三角関数の周期性を利用して計算を行っています。なお，同じパラメータ曲線が，今年は千葉大・医，名大・理でも出題されました。

$\boxed{31}$　　[東北大]



(1)　半径 1 の円を底面とする高さ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の直円柱を，底面の直径 AB を含み底面と45°の角度をなす平面で切断したときできる部分のうち，体積の小さい方を V とする。

さて，点 O を原点，A(1, 0, 0)，B(−1, 0, 0) とおく。さらに，直径 AB 上に $0 \leqq t \leqq 1$ として点 $\mathrm{P}(t,\ 0,\ 0)$ をとり，P を通り AB と直交する平面で立体 V を切断する。



(i)　$\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq t \leqq 1$ のとき

$\mathrm{P_1}(t,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{Q_1}(t,\ \sqrt{1-t^2},\ 0)$ とおくと，切り口は，直角をはさむ辺の長さが $\mathrm{P_1Q_1}=\sqrt{1-t^2}$ の直角二等辺三角形となり，その面積 $S(t)$ は，

$$S(t)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-t^2}\right)^2=\frac{1}{2}(1-t^2)$$

(ii)　$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

$\mathrm{P_2}(t,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{Q_2}(t,\ \sqrt{1-t^2},\ 0)$，$\mathrm{R_2}\left(t,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$ とおくと，切り口は，上底の長さ $\mathrm{R_2Q_2}=\sqrt{1-t^2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，下底の長さ $\mathrm{P_2Q_2}=\sqrt{1-t^2}$，高さ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の台形となり，その面積 $S(t)$ は，

$$S(t)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-t^2}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{1-t^2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4}$$

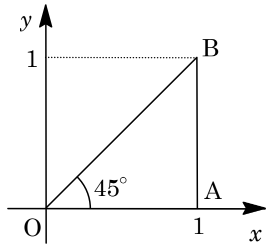
(2)　V の体積を W とおくと，対称性より，

$$\begin{aligned}W&=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4}\right)dt+2\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{1}{2}(1-t^2)\,dt\\&=\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{1-t^2}\,dt-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}dt+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}(1-t^2)\,dt\\&=\sqrt{2}\left\{\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}-\frac{1}{2\sqrt{2}}+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\\&=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi-\frac{5}{12}\sqrt{2}+\frac{2}{3}\end{aligned}$$

[解 説]

教科書などでよく見かけるタイプですが，本問では，低い直円柱という「ひねり」が加わっています。

32　　［大阪大］

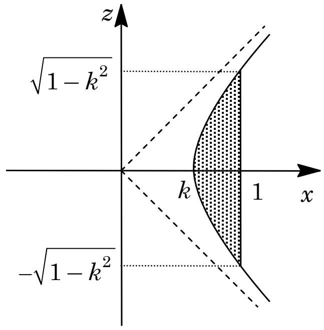


3 点 O(0, 0, 0)，A(1, 0, 0)，B(1, 1, 0) を頂点とする三角形 OAB を x 軸のまわりに 1 回転させてできる円錐 V の側面上の任意の点を P$(x,\ y,\ z)$ とすると,

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos 45^\circ$$

$$x=1\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\quad(0\leqq x\leqq 1)$$

$$x^2=y^2+z^2\quad(0\leqq x\leqq 1)$$



この円錐 V を y 軸に垂直な平面 $y=k$ $(0\leqq k\leqq 1)$ で切断すると, その切り口は,

$$x^2=k^2+z^2,\ x^2-z^2=k^2\quad(0\leqq x\leqq 1)$$

そこで, この切り口を y 軸のまわりに 1 回転させると, その形状はドーナツ形になり, その外径を R, 内径を r とおくと,

$$R=\sqrt{1^2+(\sqrt{1-k^2})^2}=\sqrt{2-k^2}\ ,\ r=k$$

すると, 切り口の面積 $S(k)$ は,

$$S(k)=\pi(R^2-r^2)=\pi(2-k^2-k^2)=2\pi(1-k^2)$$

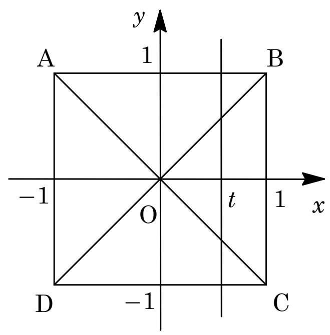
よって, 円錐 V を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積は, xz 平面に関する対称性から,

$$2\int_0^1 S(k)dk=4\pi\int_0^1(1-k^2)dk=4\pi\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{3}\pi$$

［解　説］

阪大頻出の立体の求積問題です。円錐の回転体が題材ですが, 内容は基本事項の組合せです。なお, 円錐面の方程式については「ピンポイント レクチャー」を参照してください。

33　　［東京大］



(1)　正方形 S を直線 BD を軸として回転させてできる立体 V_1 は，中心 O で半径 $\sqrt{2}$ の円を底面とし，高さ $\sqrt{2}$ の直円錐を底面で 2 つ結合したものである。ここで，点 B を頂点とする円錐面上の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BO}}=|\overrightarrow{\mathrm{BP}}||\overrightarrow{\mathrm{BO}}|\cos 45^\circ\quad(x+y\geqq 0)\cdots\cdots①$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x-1,\ y-1,\ z)$，$\overrightarrow{\mathrm{BO}}=(-1,\ -1,\ 0)$ なので，①より，

$$-(x-1)-(y-1)=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-x-y+2=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}$$

$-x-y+2\geqq 0$ として，両辺を 2 乗すると，

$$2xy-4x-4y+4=-2x-2y+z^2+2$$

$$z^2-2xy+2x+2y-2=0\quad(0\leqq x+y\leqq 2)\cdots\cdots\cdots②$$

次に，点 D を頂点とする直円錐面上の点を $\mathrm{Q}(x,\ y,\ z)$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{DQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DO}}=|\overrightarrow{\mathrm{DQ}}||\overrightarrow{\mathrm{DO}}|\cos 45^\circ\quad(x+y\leqq 0)\cdots\cdots\cdots③$$

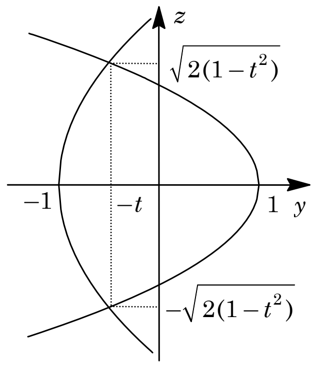
ここで，$\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=(x+1,\ y+1,\ z)$，$\overrightarrow{\mathrm{DO}}=(1,\ 1,\ 0)$ なので，③より，同様にして，

$$x+y+2=\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2+z^2}$$

$x+y+2\geqq 0$ として，両辺を 2 乗すると，

$$z^2-2xy-2x-2y-2=0\quad(-2\leqq x+y\leqq 0)\cdots\cdots\cdots④$$

さて，平面 $x=t$ $(0\leqq t<1)$ による V_1 の切り口を考える。



②より，$z^2-2ty+2t+2y-2=0$ $(0\leqq t+y\leqq 2)$ から，

$$z^2=-(2-2t)(y-1)$$

$$y-1=-\frac{z^2}{2-2t}\quad(-t\leqq y\leqq 2-t)\cdots\cdots\cdots⑤$$

④より，$z^2-2ty-2t-2y-2=0$ $(-2\leqq t+y\leqq 0)$ から，

$$z^2=(2+2t)(y+1)$$

$$y+1=\frac{z^2}{2+2t}\quad(-2-t\leqq y\leqq -t)\cdots\cdots\cdots⑥$$

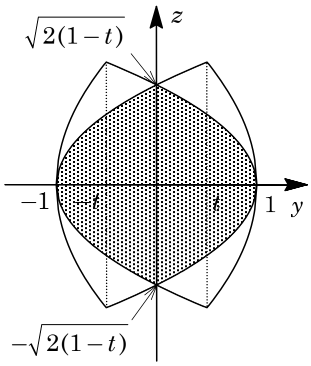
平面 $x=t$ による V_1 の切り口の面積 $S_1(t)$ は，対称性を考えて，

$$S_1(t)=2\int_0^{\sqrt{2(1-t^2)}}\left\{\left(1-\frac{z^2}{2-2t}\right)-\left(-1+\frac{z^2}{2+2t}\right)\right\}dz$$

$$=2\int_0^{\sqrt{2(1-t^2)}}\left(2-\frac{z^2}{1-t^2}\right)dz=2\left[2z-\frac{z^3}{3(1-t^2)}\right]_0^{\sqrt{2(1-t^2)}}$$

$$= 4\sqrt{2(1-t^2)} - \frac{4}{3}\sqrt{2(1-t^2)} = \frac{8\sqrt{2}}{3}\sqrt{1-t^2}$$

(2)　立体をV_1と直線 AC を軸として回転させてできる立体V_2は xz 平面に関して対称となるので，V_1とV_2の共通部分を，平面$x=t$ $(0 \leqq t < 1)$で切断した切り口は右図の網点部のようになる。



この面積を$S(t)$とすると，

$$S(t) = 4\int_0^{\sqrt{2(1-t)}} \left\{1 - \frac{z^2}{2(1-t)}\right\} dz$$

$$= 4\left[z - \frac{z^3}{6(1-t)}\right]_0^{\sqrt{2(1-t)}}$$

$$= 4\sqrt{2(1-t)} - \frac{4}{3}\sqrt{2(1-t)} = \frac{8\sqrt{2}}{3}\sqrt{1-t}$$

V_1とV_2はyz平面について対称なので，この共通部分の体積Vは，

$$V = 2\int_0^1 S(t)\,dt = \frac{16\sqrt{2}}{3}\left[-\frac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{32}{9}\sqrt{2}$$

［解　説］

東大で頻出している立体の体積を求める問題です。ただ，今年のものは計算量がかなり多めとなっています。なお，円錐面の方程式については，「ピンポイント レクチャー」を参照してください。

34　　　　［金沢大］

(1)　$y=\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$ に対して，$y'=-\dfrac{e^x-e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2}$ となり，

$$y''=-\frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})\cdot 2(e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^4}$$

$$=-\frac{(e^x+e^{-x})^2-2(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^3}=\frac{e^{2x}-6+e^{-2x}}{(e^x+e^{-x})^3}=\frac{e^{4x}-6e^{2x}+1}{e^{2x}(e^x+e^{-x})^3}$$

ここで，$y''=0$ とすると，$e^{2x}=3\pm 2\sqrt{2}$ となり，

$$x=\frac{1}{2}\log(3\pm 2\sqrt{2})=\frac{1}{2}\log(\sqrt{2}\pm 1)^2=\log(\sqrt{2}\pm 1)$$

この x の値の前後で y'' の符号は変わり，x 座標の大きい方の変曲点 P の x 座標は $\log(\sqrt{2}+1)$ である。

(2)　条件より，$b=\log(\sqrt{2}+1)$，$\tan\theta=e^b=\sqrt{2}+1$ なので，

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2(\sqrt{2}+1)}{1-(3+2\sqrt{2})}=-1$$

これより，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ なので $2\theta=\dfrac{3}{4}\pi$ となり，$\theta=\dfrac{3}{8}\pi$ である。

(3)　直線 $x=b$ と x 軸，y 軸および C で囲まれた図形の面積を S とする。

ここで，$y=\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}>0$ なので，$S=\displaystyle\int_0^b\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx=\int_0^b\frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$ である。

(2)より，$e^x=\tan\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$e^x dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ より，

$$dx=\frac{1}{\tan\theta\cos^2\theta}d\theta=\frac{1+\tan^2\theta}{\tan\theta}d\theta$$

すると，$S=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi}\frac{\tan\theta}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1+\tan^2\theta}{\tan\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi}d\theta=\frac{3}{8}\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$

［解　説］

(2)の設問が(3)の定積分の計算への誘導となっています。(2)がない場合は $e^x=t$ とおいた後，$t=\tan\theta$ とするので，結局，同じことになります。ただ，上端の値がちょっとわかりにくいですが。

$\boxed{35}$ ［長崎大］

(1)　$f(x)=\dfrac{1}{2}\cos x$，$g(x)=\cos\dfrac{x}{2}+c$　$(0\leqq x\leqq\pi)$に対し，曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が，$p\neq 0$ として，点$(p,\ q)$で接することより，

$$f(p)=g(p)\cdots\cdots\cdots①,\ \ f'(p)=g'(p)\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$\dfrac{1}{2}\cos p=\cos\dfrac{p}{2}+c\cdots\cdots\cdots③$

②より，$-\dfrac{1}{2}\sin p=-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{p}{2}$，$2\sin\dfrac{p}{2}\cos\dfrac{p}{2}=\sin\dfrac{p}{2}\cdots\cdots\cdots④$

④から，$\sin\dfrac{p}{2}\neq 0$ なので，$\cos\dfrac{p}{2}=\dfrac{1}{2}$，$p=\dfrac{2}{3}\pi$ となり，$q=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{2}{3}\pi=-\dfrac{1}{4}$

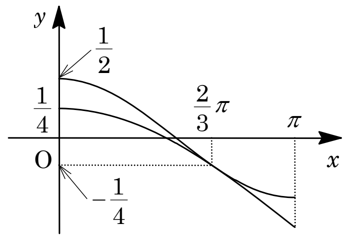
③から，$c=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{2}{3}\pi-\cos\dfrac{1}{3}\pi=-\dfrac{3}{4}$

よって，接点$(p,\ q)=\left(\dfrac{2}{3}\pi,\ -\dfrac{1}{4}\right)$となり，さらに区間$0\leqq x\leqq\pi$において，

$$\begin{aligned}f(x)-g(x)&=\frac{1}{2}\cos x-\left(\cos\frac{x}{2}-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}\left(2\cos^2\frac{x}{2}-1\right)-\cos\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\\&=\cos^2\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{4}=\left(\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)^2\geqq 0\end{aligned}$$

すなわち，$f(x)\geqq g(x)$ $\left(\text{等号は } x=\dfrac{2}{3}\pi \text{ のとき成立}\right)$である。

(2)　区間 $0\leqq x\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ において，y 軸および 2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$によって囲まれた図形 D を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 Vは,



$$\begin{aligned}V&=2\pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi}x\{f(x)-g(x)\}dx\\&=2\pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi}x\left(\frac{1}{2}\cos x-\cos\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right)dx\\&=\pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi}x\left(\cos x-2\cos\frac{x}{2}\right)dx+\frac{3}{2}\pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi}x\,dx\\&=\pi\left[x\left(\sin x-4\sin\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}-\pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\left(\sin x-4\sin\frac{x}{2}\right)dx+\frac{3}{2}\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}\\&=\frac{2}{3}\pi^2\left(-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)-\pi\left[-\cos x+8\cos\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}+\frac{\pi^3}{3}\\&=-\sqrt{3}\pi^2-\pi\left(\frac{9}{2}-7\right)+\frac{\pi^3}{3}=\frac{\pi^3}{3}-\sqrt{3}\pi^2+\frac{5}{2}\pi\end{aligned}$$

［解 説］

2 曲線が接するという定義は，解答例の①かつ②です。また，(2)の求積は，いわゆる円筒分割の手法を用いています。

$\boxed{36}$ ［東京工大］

(1)　点 $\mathrm{P}(t,\ s)$ を原点を中心として 45° 回転した点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ に対して，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} t-s \\ t+s \end{pmatrix}$$

ここで，$s=\sqrt{2}t^2-2t$ より，$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(t-\sqrt{2}t^2+2t)=-t^2+\dfrac{3}{\sqrt{2}}t$ ………①

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}(t+\sqrt{2}t^2-2t)=t^2-\frac{1}{\sqrt{2}}t \cdots\cdots\cdots ②$$

(2)　②と $y=a$ を連立すると，$a=t^2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}t$ となり，$a=\left(t-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2-\dfrac{1}{8}$

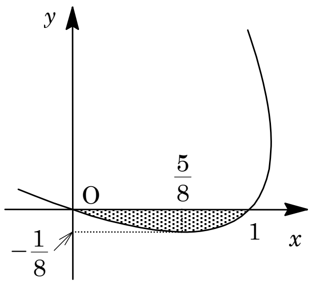
よって，直線 $y=a$ と点 Q の軌跡である曲線 C がただ 1 つの共有点をもつのは，実数 t の値がただ 1 つ存在するときより，$a=-\dfrac{1}{8}$ である。

(3)　x 軸の下側のある曲線 C の $0\leqq x\leqq\dfrac{5}{8}$ の部分を $x=x_1$，$\dfrac{5}{8}\leqq x\leqq 1$ の部分を $x=x_2$ とする。①②から，$x=f(t)$，$y=g(t)$ とおくと，

$$(f(0),\ g(0))=(0,\ 0)$$

$$\left(f\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right),\ g\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\right)=\left(\frac{5}{8},\ -\frac{1}{8}\right)$$

$$\left(f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)=(1,\ 0)$$



そこで，右図の網点部 D を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V は，

$$V=\pi\int_{-\frac{1}{8}}^{0}{x_2}^2dy-\pi\int_{-\frac{1}{8}}^{0}{x_1}^2dy$$

$$=\pi\int_{\frac{1}{2\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\{f(t)\}^2g'(t)dt-\pi\int_{\frac{1}{2\sqrt{2}}}^{0}\{f(t)\}^2g'(t)dt$$

$$=\pi\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\{f(t)\}^2g'(t)dt=\pi\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(-t^2+\frac{3}{\sqrt{2}}t\right)^2\left(2t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)dt$$

ここで，$\sqrt{2}t=u$ とおくと，$\sqrt{2}\,dt=du$ となり，

$$V=\pi\int_0^1\left(-\frac{1}{2}u^2+\frac{3}{2}u\right)^2\left(\sqrt{2}u-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}du$$

$$=\frac{1}{8}\pi\int_0^1(-u^2+3u)^2(2u-1)du=\frac{1}{8}\pi\int_0^1(2u^5-13u^4+24u^3-9u^2)du$$

$$=\frac{1}{8}\pi\left(\frac{2}{6}-\frac{13}{5}+\frac{24}{4}-\frac{9}{3}\right)=\frac{11}{120}\pi$$

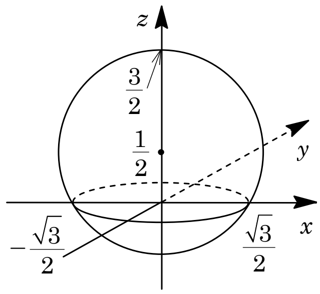
［解　説］

パラメータ積分によって体積を求める頻出問題です。

37　　［名古屋大］

(1)　半径 1 の球 B の中心から直線 l に垂線を下ろすと，その足は長さ $\sqrt{3}$ の線分の中点となり，B の中心と l との距離 d は，

$$d=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$$



(2)　直線 l を x 軸とすると，(1)から B の球面は，

$$x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=1 \cdots\cdots\cdots ①$$

さて，B を x 軸に垂直な平面 $x=k$ ……②で切断したときの断面は，①②を連立して，

$$y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=1-k^2$$

これより，断面は平面 $x=k$ 上で，点 $\left(k,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\sqrt{1-k^2}$ の円であることがわかる。なお，yz 平面に関する対称性より，以下，$0 \leqq k \leqq 1$ で考える。

(i)　$0 \leqq k \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき

断面を平面 $x=k$ 上で，x 軸のまわりに 1 回転すると，半径 $\frac{1}{2}+\sqrt{1-k^2}$ の円板となり，その面積 $S(k)$ は，

$$S(k)=\pi\left(\frac{1}{2}+\sqrt{1-k^2}\right)^2=\pi\left(\frac{5}{4}-k^2+\sqrt{1-k^2}\right)$$

(ii)　$\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq k \leqq 1$ のとき

断面を平面 $x=k$ 上で，x 軸のまわりに 1 回転すると，外径 $\frac{1}{2}+\sqrt{1-k^2}$ で内径 $\frac{1}{2}-\sqrt{1-k^2}$ のドーナツ形となり，その面積 $S(k)$ は，

$$S(k)=\pi\left(\frac{1}{2}+\sqrt{1-k^2}\right)^2-\pi\left(\frac{1}{2}-\sqrt{1-k^2}\right)^2=2\pi\sqrt{1-k^2}$$

(i)(ii)より，求める立体の体積を V とすると，対称性を考えて，

$$V=2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{5}{4}-k^2+\sqrt{1-k^2}\right)dk+2\pi\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}2\sqrt{1-k^2}\,dk$$

$$=2\pi\left[\frac{5}{4}k-\frac{k^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}+2\pi\left(\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)+4\pi\left(\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$$

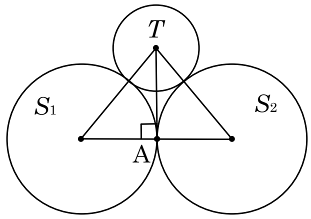
$$=\sqrt{3}\pi+\pi\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)+\pi\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pi\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

［解　説］

立体の回転体の求積についての頻出問題です。要演習の 1 題です。

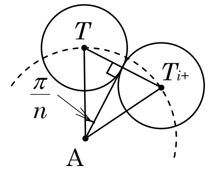
$\boxed{38}$　［大阪大］

(1) 半径 1 の球S_1，S_2の接点を A とし，A と半径r_nの球T_iの中心との距離をx_nとすると，



$$x_n=\sqrt{(1+r_n)^2-1^2}=\sqrt{{r_n}^2+2r_n}\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，$r_n=x_n\sin\dfrac{\pi}{n}$より，$x_n=\dfrac{r_n}{\sin\dfrac{\pi}{n}}\ \cdots\cdots\cdots②$



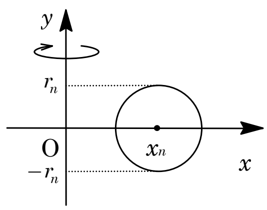
①②より，$\dfrac{r_n}{\sin\dfrac{\pi}{n}}=\sqrt{{r_n}^2+2r_n}$となり，

$${r_n}^2=({r_n}^2+2r_n)\sin^2\frac{\pi}{n},\ \left(1-\sin^2\frac{\pi}{n}\right)r_n=2\sin^2\frac{\pi}{n}$$

よって，$r_n=\dfrac{2\sin^2\dfrac{\pi}{n}}{1-\sin^2\dfrac{\pi}{n}}=\dfrac{2\sin^2\dfrac{\pi}{n}}{\cos^2\dfrac{\pi}{n}}=2\tan^2\dfrac{\pi}{n}$

(2) まず，T_1，T_2，…，T_nの体積の和W_nは，$W_n=\dfrac{4}{3}n\pi{r_n}^3$

次に，S_1とS_2の中心を結ぶ直線のまわりにT_1を回転してできる回転体を，中心$(x_n,\ 0)$，半径r_nの円をy軸のまわりに 1 回転してつくる考え，



$$(x-x_n)^2+y^2={r_n}^2,\ x=x_n\pm\sqrt{{r_n}^2-y^2}$$

すると，$y=k$における回転体の断面積$S(k)$は，

$$S(k)=\pi\left\{(x_n+\sqrt{{r_n}^2-k^2})^2-(x_n-\sqrt{{r_n}^2-k^2})^2\right\}=4\pi x_n\sqrt{{r_n}^2-k^2}$$

その体積V_nは，対称性から，

$$V_n=2\int_0^{r_n}S(k)dk=8\pi x_n\int_0^{r_n}\sqrt{{r_n}^2-k^2}\,dk=8\pi x_n\cdot\frac{1}{4}\pi{r_n}^2=2\pi^2x_n{r_n}^2$$

②より，$\dfrac{W_n}{V_n}=\dfrac{\dfrac{4}{3}n\pi{r_n}^3}{2\pi^2x_n{r_n}^2}=\dfrac{2n}{3\pi}\cdot\dfrac{r_n}{x_n}=\dfrac{2n}{3\pi}\sin\dfrac{\pi}{n}$となり，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{W_n}{V_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{\dfrac{\pi}{n}}=\frac{2}{3}$$

［解 説］

空間図形とその体積についての総合問題です。計算量も妥当なものです。