1　　　　［大阪大］

直線 $y=x$ を l で，直線 $y=-x$ を l' で表す。直線 l, l' のどちらの上にもない点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ をとる。点 A を通る直線 m が 2 直線 l, l' とそれぞれ点 P，P′ で交わるとする。点 Q を，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を満たすようにとる。ただし，O は xy 平面の原点である。直線 m を変化させるとき，点 Q の軌跡は l と l' を漸近線とする双曲線となることを示せ。

2　　［北海道大］

空間内に，3 点 $\mathrm{A}_0(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}_1(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{A}_2(1,\ 0,\ 1)$ を通る平面 α と，3 点 $\mathrm{B}_0(2,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}_1(2,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}_2\left(\dfrac{5}{2},\ 0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を通る平面 β を考える。

(1)　空間の基本ベクトルを $\overrightarrow{e_1}=(1,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{e_2}=(0,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{e_3}=(0,\ 0,\ 1)$ とおくとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}_0}$，$\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1}$，$\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_2}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}_0}$，$\overrightarrow{\mathrm{B}_0\mathrm{B}_1}$，$\overrightarrow{\mathrm{B}_0\mathrm{B}_2}$ を $\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_3}$ で表せ。ただし, O は空間の原点を表す。

(2)　原点 O と α 上の点 P を通る直線が β 上の点 P′ も通っているとする。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_0}+a\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1}+b\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_2}\ ,\quad \overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}_0}+p\overrightarrow{\mathrm{B}_0\mathrm{B}_1}+q\overrightarrow{\mathrm{B}_0\mathrm{B}_2}$$

とおくとき, a, b を p, q で表せ。

(3)　点 P が α 上の点 A_0 を中心とする半径 1 の円 C の円周上を動くとき，点 P′ が動いてできる図形 C' の方程式を(2)の p, q で表し，C' が楕円であることを示せ。

3　　［北海道大］

楕円 $C_1 : \dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ と双曲線 $C_2 : \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を考える。C_1 と C_2 の焦点が一致しているならば，C_1 と C_2 の交点でそれぞれの接線は直交することを示せ。

4　　　　　［金沢大］

$-1<t<1$ を満たす t に対して，xy 平面上の直線 $y=t$ と楕円 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ の交点を $\mathrm{Q}(-s,\ t)$，$\mathrm{R}(s,\ t)$ $(s>0)$ とする。点 $\mathrm{P}(0,\ 1)$ に対して，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積を $S(t)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$S(t)$ を求めよ。また，$-1<t<1$ における $S(t)$ の最大値とそのときの点 R の座標を求めよ。

(2)　(1)で求めた点 R における楕円 C の接線 l と x 軸との交点を T とするとき，$\cos\angle\mathrm{PRT}$ の値を求めよ。

(3)　楕円 C で囲まれる図形は直線 PR によって 2 つの部分に分割される。このうち原点が属さない方の面積を，(1)で求めた点 R に対して求めよ。

$\boxed{5}$ ［東京工大］

平面の原点 O を端点とし，x 軸となす角がそれぞれ $-\alpha$，α $\left(ただし 0<\alpha<\dfrac{\pi}{3}\right)$ である半直線を L_1，L_2 とする。L_1 上に点 P，L_2 上に点 Q を線分 PQ の長さが 1 となるようにとり，点 R を，直線 PQ に対し原点 O の反対側に△PQR が正三角形になるようにとる。

(1) 線分 PQ が x 軸と直交するとき，点 R の座標を求めよ。

(2) 2 点 P，Q が，線分 PQ の長さを 1 に保ったまま L_1，L_2 上を動くとき，点 R の軌跡はある楕円の一部であることを示せ。

$\boxed{6}$ ［筑波大］

点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が双曲線 $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$ 上を動くとき，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ と点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ との距離の最小値を $f(a)$ とする。

(1)　$f(a)$ を a で表せ。

(2)　$f(a)$ を a の関数とみなすとき, ab 平面上に曲線 $b=f(a)$ の概形をかけ。

7　　［大阪大］

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。2 つの曲線

$$C_1 : x^2+3y^2=3, \quad C_2 : \frac{x^2}{\cos^2\theta}-\frac{y^2}{\sin^2\theta}=2$$

の交点のうち，x 座標と y 座標がともに正であるものを P とする。P における C_1，C_2 の接線をそれぞれ l_1，l_2 とし，y 軸と l_1，l_2 の交点をそれぞれ Q，R とする。θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，線分 QR の長さの最小値を求めよ。

8　　［筑波大］

d を正の定数とする。2 点 $\mathrm{A}(-d,\ 0)$，$\mathrm{B}(d,\ 0)$ からの距離の和が $4d$ である点 P の軌跡として定まる楕円 E を考える。点 A, 点 B, 原点 O から楕円 E 上の点 P までの距離をそれぞれ AP, BP, OP とかく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　楕円 E の長軸と短軸の長さを求めよ。

(2)　$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2$ および $\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}$ を，OP と d を用いて表せ。

(3)　点 P が楕円 E 全体を動くとき，$\mathrm{AP}^3+\mathrm{BP}^3$ の最大値と最小値を d を用いて表せ。

9　　［岡山大］

Oを原点とする座標平面における曲線$C: \dfrac{x^2}{4}+y^2=1$上に，点$\mathrm{P}\left(1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$をとる。

(1)　Cの接線で直線OPに平行なものをすべて求めよ。

(2)　点QがC上を動くとき，△OPQの面積の最大値と，最大値を与えるQの座標をすべて求めよ。

10　［筑波大］

2 つの双曲線 $C: x^2-y^2=1$，$H: x^2-y^2=-1$ を考える。双曲線 H 上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ に対して，方程式 $sx-ty=1$ で定まる直線を l とする。

(1)　直線 l は点 P を通らないことを示せ。

(2)　直線 l と双曲線 C は異なる 2 点 Q，R で交わることを示し，△PQR の重心 G の座標を s, t を用いて表せ。

(3)　(2)における 3 点 G, Q, R に対して，△GQR の面積は点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ の位置によらず一定であることを示せ。

11　　［筑波大］

楕円 $C:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ の，直線 $y=mx$ と平行な 2 接線を l_1，$l_1{}'$ とし，l_1，$l_1{}'$ に直交する C の 2 接線を l_2，$l_2{}'$ とする。

(1)　l_1，$l_1{}'$ の方程式を m を用いて表せ。

(2)　l_1 と $l_1{}'$ の距離 d_1 および l_2 と $l_2{}'$ の距離 d_2 をそれぞれ m を用いて表せ。ただし，平行な 2 直線 l，l' の距離とは，l 上の 1 点と直線 l' の距離である。

(3)　$(d_1)^2+(d_2)^2$ は m によらず一定であることを示せ。

(4)　l_1，$l_1{}'$，l_2，$l_2{}'$ で囲まれる長方形の面積 S を d_1 を用いて表せ。さらに m が変化するとき，S の最大値を求めよ。

12　　　　［東京工大］

a, b を正の実数とし，円 $C_1 : (x-a)^2+y^2=a^2$ と楕円 $C_2 : x^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を考える。

(1)　C_1 が C_2 に内接するための a, b の条件を求めよ。

(2)　$b=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とし，C_1 が C_2 に内接しているとする。このとき，第 1 象限における C_1 と C_2 の接点の座標 $(p,\ q)$ を求めよ。

(3)　(2)の条件のもとで，$x \geqq p$ の範囲において，C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{13}$ ［筑波大］

xy 平面上に楕円 $C_1 : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{9}=1\ (a>\sqrt{13})$，および双曲線 $C_2 : \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (b>0)$ があり，C_1 と C_2 は同一の焦点をもつとする。また C_1 と C_2 の交点 $\mathrm{P}\left(2\sqrt{1+\dfrac{t^2}{b^2}},\ t\right)$ $(t>0)$ における C_1，C_2 の接線をそれぞれ l_1，l_2 とする。

(1)　a と b の間に成り立つ関係式を求め，点 P の座標を a を用いて表せ。

(2)　l_1 と l_2 が直交することを示せ。

(3)　a が $a>\sqrt{13}$ を満たしながら動くときの点 P の軌跡を図示せよ。