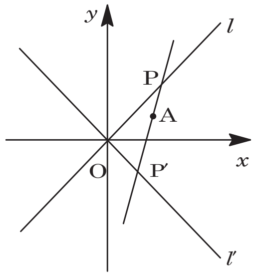
$\boxed{1}$ ［大阪大］

$\mathrm{P}(p,\ p)$，$\mathrm{P}'(p',\ -p')$，$\mathrm{Q}(x,\ y)$とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$より，

$$p+p'=a+x,\ \ p-p'=b+y$$



よって，$p=\dfrac{1}{2}(a+b+x+y)$ ………①

$$p'=\frac{1}{2}(a-b+x-y)\ \cdots\cdots\cdots②$$

また, kを実数として，$\overrightarrow{\mathrm{AP'}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$より，

$$(p'-a,\ -p'-b)=k(p-a,\ p-b)$$

よって，$(p'-a)(p-b)+(p'+b)(p-a)=0$ ………③

①②を③に代入して，

$$\frac{1}{4}(-a-b+x-y)(a-b+x+y)+\frac{1}{4}(a+b+x-y)(-a+b+x+y)=0$$

$$(x-b)^2-(y+a)^2+(x+b)^2-(y-a)^2=0$$

まとめると，$x^2-y^2=a^2-b^2$

点$\mathrm{A}(a,\ b)$は$y=x$，$y=-x$上にないことより，$b\neq\pm a$から$a^2-b^2\neq0$であり，

$$\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{y^2}{a^2-b^2}=1$$

したがって，点Qの軌跡は$l:y=x$と$l':y=-x$を漸近線とする双曲線となる。

［解 説］

文系にlとl'がx軸，y軸となっている類題が出ています。しかし，本問に出合ったとき，座標系の回転を思いつくのは，容易なことではありません。

2　　　　［北海道大］

(1)　$A_0(1,\ 0,\ 0)$，$A_1(1,\ 1,\ 0)$，$A_2(1,\ 0,\ 1)$ より，

$$\overrightarrow{OA_0}=(1,\ 0,\ 0)=\overrightarrow{e_1},\quad \overrightarrow{A_0A_1}=(0,\ 1,\ 0)=\overrightarrow{e_2},\quad \overrightarrow{A_0A_2}=(0,\ 1,\ 1)=\overrightarrow{e_3}$$

また，$B_0(2,\ 0,\ 0)$，$B_1(2,\ 1,\ 0)$，$B_2\left(\frac{5}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ より，

$$\overrightarrow{OB_0}=(2,\ 0,\ 0)=2\overrightarrow{e_1},\quad \overrightarrow{B_0B_1}=(0,\ 1,\ 0)=\overrightarrow{e_2}$$

$$\overrightarrow{B_0B_2}=\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{e_1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{e_3}$$

(2)　条件より，O，P，P′ が同一直線上にあるので，t を実数として，

$$\overrightarrow{OP'}=t\overrightarrow{OP},\quad \overrightarrow{OB_0}+p\overrightarrow{B_0B_1}+q\overrightarrow{B_0B_2}=t\left(\overrightarrow{OA_0}+a\overrightarrow{A_0A_1}+b\overrightarrow{A_0A_2}\right)$$

(1)より，$2\overrightarrow{e_1}+p\overrightarrow{e_2}+q\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{e_1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{e_3}\right)=t\left(\overrightarrow{e_1}+a\overrightarrow{e_2}+b\overrightarrow{e_3}\right)$

$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_3}$ は 1 次独立なので，

$$2+\frac{1}{2}q=t\ \cdots\cdots\cdots①,\quad p=ta\ \cdots\cdots\cdots②,\quad \frac{\sqrt{3}}{2}q=tb\ \cdots\cdots\cdots③$$

①②より，$p=\left(2+\frac{1}{2}q\right)a$，すなわち $2p=(4+q)a$ となる。

ここで，$q=-4$ のときは①から $t=0$ となり，③が成立しないことより，

$$a=\frac{2p}{4+q}\ \cdots\cdots\cdots④$$

①③より，$\frac{\sqrt{3}}{2}q=\left(2+\frac{1}{2}q\right)b$ となり，$b=\frac{\sqrt{3}q}{4+q}\ \cdots\cdots\cdots⑤$

(3)　条件より，$|\overrightarrow{A_0P}|=1$ から，$|a\overrightarrow{A_0A_1}+b\overrightarrow{A_0A_2}|=1$ となり，$|a\overrightarrow{e_2}+b\overrightarrow{e_3}|=1$

$a\overrightarrow{e_2}+b\overrightarrow{e_3}=(0,\ a,\ b)$ なので，$a^2+b^2=1$

④⑤を代入すると，$\left(\frac{2p}{4+q}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}q}{4+q}\right)^2=1$，$2p^2+q^2-4q=8$

$$\frac{p^2}{6}+\frac{(q-2)^2}{12}=1\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

さて，$\overrightarrow{B_0P}=p\overrightarrow{B_0B_1}+q\overrightarrow{B_0B_2}$ であり，

$$|\overrightarrow{B_0B_1}|=|\overrightarrow{B_0B_2}|=1,\quad \overrightarrow{B_0B_1}\cdot\overrightarrow{B_0B_2}=0$$

そこで，B_0 を原点とし，$\overrightarrow{B_0B_1}$ を p 軸の基本ベクトル，$\overrightarrow{B_0B_2}$ を q 軸の基本ベクトルとして，平面 β 上で直交座標系をつくることができる。このとき，点 P′ の座標は $(p,\ q)$ となるので，⑥より，点 P′ が動いてできる図形 C' は楕円である。

［解 説］

大学入試に久々の登場ですが，空間内の楕円を表現する問題です。一度は演習した方がよい問題です。

3　　　　　　　　　　　　　　　　　　［北海道大］

楕円 $C_1 : \dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ と双曲線 $C_2 : \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の焦点が一致することより，

$$\alpha^2-\beta^2=a^2+b^2 \quad (\alpha^2>\beta^2) \cdots\cdots\cdots ①$$

さて，C_1 と C_2 の交点の座標を $(p,\ q)$ とおくと，

$$\frac{p^2}{\alpha^2}+\frac{q^2}{\beta^2}=1,\ \beta^2p^2+\alpha^2q^2=\alpha^2\beta^2 \cdots\cdots\cdots ②$$

$$\frac{p^2}{a^2}-\frac{q^2}{b^2}=1,\ b^2p^2-a^2q^2=a^2b^2 \cdots\cdots\cdots ③$$

ここで，交点 $(p,\ q)$ における C_1 と C_2 の接線をそれぞれ l_1，l_2 とおくと，

$$l_1 : \frac{px}{\alpha^2}+\frac{qy}{\beta^2}=1,\ l_2 : \frac{px}{a^2}-\frac{qy}{b^2}=1$$

これより，l_1，l_2 の法線ベクトル $\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$ は，$\overrightarrow{n_1}=\left(\dfrac{p}{\alpha^2},\ \dfrac{q}{\beta^2}\right)$，$\overrightarrow{n_2}=\left(\dfrac{p}{a^2},\ -\dfrac{q}{b^2}\right)$

ここで，②③をまとめると，$\begin{pmatrix}\beta^2 & \alpha^2\\ b^2 & -a^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p^2\\ q^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^2\beta^2\\ a^2b^2\end{pmatrix}$ となり，

$$\begin{pmatrix}p^2\\ q^2\end{pmatrix}=\frac{1}{-a^2\beta^2-\alpha^2b^2}\begin{pmatrix}-a^2 & -\alpha^2\\ -b^2 & \beta^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha^2\beta^2\\ a^2b^2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{a^2\beta^2+\alpha^2b^2}\begin{pmatrix}a^2\alpha^2\beta^2+a^2\alpha^2b^2\\ \alpha^2b^2\beta^2-a^2b^2\beta^2\end{pmatrix}$$

すると，$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=\dfrac{p^2}{\alpha^2a^2}-\dfrac{q^2}{\beta^2b^2}=\dfrac{1}{a^2\beta^2+\alpha^2b^2}(\beta^2+b^2)-\dfrac{1}{a^2\beta^2+\alpha^2b^2}(\alpha^2-a^2)$

$$=\frac{1}{a^2\beta^2+\alpha^2b^2}(-\alpha^2+\beta^2+a^2+b^2)$$

①より，$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$ となるので, 2 接線 l_1，l_2 は直交する。

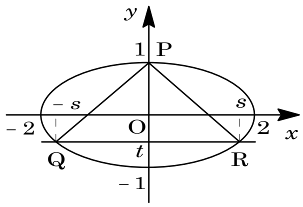
［解 説］

文字が多くて計算は簡単ではありませんが，楕円と双曲線についての有名問題です。

4　　［金沢大］

(1)　△PQR の面積 $S(t)$ は,

$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot 2s(1-t)=s(1-t)$$



ここで, $\dfrac{s^2}{4}+t^2=1$ より, $s=2\cos\theta$, $t=\sin\theta$ とおける。すると, $s>0$, $-1<t<1$ から, $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ となり, $S(t)=f(\theta)$ とすると,

$$f(\theta)=2\cos\theta(1-\sin\theta)$$

$$f'(\theta)=-2\sin\theta(1-\sin\theta)-2\cos^2\theta=4\sin^2\theta-2\sin\theta-2$$

$$=2(2\sin\theta+1)(\sin\theta-1)$$

θ	$-\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	$-\dfrac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		＋	0	−	
$f(\theta)$		↗	$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	

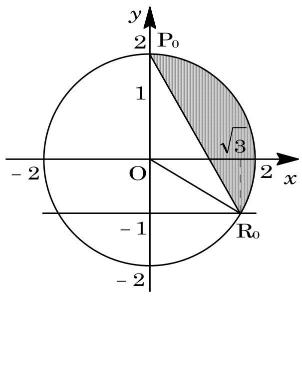
よって, 右表より $S(t)$ は最大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ をとる。このとき, $\theta=-\dfrac{\pi}{6}$ から $s=\sqrt{3}$, $t=-\dfrac{1}{2}$ となり, $\mathrm{R}\left(\sqrt{3},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ である。

(2)　R における接線 l は $\dfrac{\sqrt{3}}{4}x-\dfrac{1}{2}y=1$ となり, x 軸との交点は $\mathrm{T}\left(\dfrac{4}{\sqrt{3}},\ 0\right)$ である。

これより, $\overrightarrow{\mathrm{RT}}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\left(-\sqrt{3},\ \dfrac{3}{2}\right)$ となり,

$$\cos\angle\mathrm{PRT}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{RT}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{RT}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{RP}}|}=\frac{-1+\dfrac{3}{4}}{\sqrt{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}}\sqrt{3+\dfrac{9}{4}}}=-\frac{1}{7}$$

(3)　楕円 C を y 軸方向に 2 倍拡大すると, 点 P は $\mathrm{P}_0(0,\ 2)$, 点 R は $\mathrm{R}_0(\sqrt{3},\ -1)$ に移り, $\angle\mathrm{P}_0\mathrm{OR}_0=\dfrac{2}{3}\pi$ となる。



ここで, 右図の弓形の面積を S_0 とおくと,

$$S_0=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\cdot 2^2\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$$

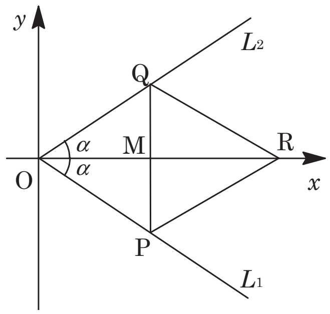
すると, 直線 PR によって分割される楕円 C の原点を含まない部分の面積 S は,

$$S=\frac{1}{2}S_0=\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

［解 説］

楕円についての基本的な問題です。(3)では, 楕円を円にいったん変換して, 面積を計算しました。

5　　　　［東京工大］



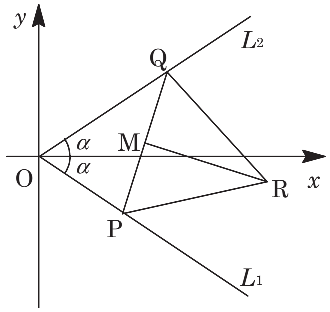
(1)　線分PQが x 軸と直交するとき，$\mathrm{PQ}=1$ より，

$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2\tan\alpha},\ -\frac{1}{2}\right),\ \mathrm{Q}\left(\frac{1}{2\tan\alpha},\ \frac{1}{2}\right)$$

さて, PQの中点Mは，$\mathrm{M}\left(\frac{1}{2\tan\alpha},\ 0\right)$となり,

$$\mathrm{MR}=\mathrm{MP}\tan\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，$\mathrm{R}\left(\frac{1}{2\tan\alpha}+\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$である。



(2)　半直線 L_1，L_2 の方向ベクトルの成分は，それぞれ $(\cos\alpha,\ -\sin\alpha)$，$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ とすることができるので, $p>0$, $q>0$ として,

$$\mathrm{P}(p\cos\alpha,\ -p\sin\alpha),\ \mathrm{Q}(q\cos\alpha,\ q\sin\alpha)$$

すると，$\mathrm{PQ}=1$ より，

$$(p-q)^2\cos^2\alpha+(p+q)^2\sin^2\alpha=1 \cdots\cdots\cdots ①$$

さて, PQの中点Mは,

$$\mathrm{M}\left(\frac{p\cos\alpha+q\cos\alpha}{2},\ \frac{-p\sin\alpha+q\sin\alpha}{2}\right)$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=(p\cos\alpha-q\cos\alpha,\ -p\sin\alpha-q\sin\alpha)$，$|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$ より,

$$\overrightarrow{\mathrm{MR}}=\frac{\sqrt{3}}{2}(p\sin\alpha+q\sin\alpha,\ p\cos\alpha-q\cos\alpha)$$

そこで，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MR}}$ より，$\mathrm{R}(x,\ y)$ とおくと,

$$x=\frac{1}{2}(p\cos\alpha+q\cos\alpha)+\frac{\sqrt{3}}{2}(p\sin\alpha+q\sin\alpha)$$
$$=\frac{1}{2}(\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha)(p+q)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)(p+q)\cdots\cdots ②$$

$$y=\frac{1}{2}(-p\sin\alpha+q\sin\alpha)+\frac{\sqrt{3}}{2}(p\cos\alpha-q\cos\alpha)$$
$$=\frac{1}{2}(-\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha)(p-q)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)(p-q)\cdots\cdots ③$$

$0<\alpha<\frac{\pi}{3}$ より，$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)>0$，$\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)>0$ となり，②③を①に代入すると,

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}x^2+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}y^2=1$$

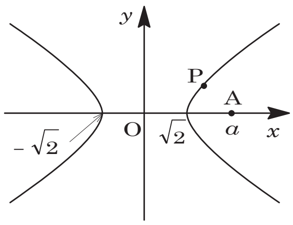
よって，点Rの軌跡は楕円の一部である。

［解 説］

図形と方程式の重要題の１つで，単位ベクトルの効用が実感できる問題です。

6　　[筑波大]

(1)　$\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$ より，$y^2=\dfrac{x^2}{2}-1$ ……(＊)となり，



$$\mathrm{AP}^2=(x-a)^2+y^2=(x-a)^2+\frac{x^2}{2}-1$$
$$=\frac{3}{2}x^2-2ax+a^2-1$$
$$=\frac{3}{2}\left(x-\frac{2}{3}a\right)^2+\frac{1}{3}a^2-1$$

ここで，(＊)から，$\dfrac{x^2}{2}-1\geqq 0$ より，$x\leqq-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}\leqq x$

(i)　$\dfrac{2}{3}a\leqq-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}\leqq\dfrac{2}{3}a$ $\left(a\leqq-\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\leqq a\right)$のとき

$x=\dfrac{2}{3}a$ で AP^2 は最小となり，AP の最小値 $f(a)=\sqrt{\dfrac{1}{3}a^2-1}$

(ii)　$-\sqrt{2}<\dfrac{2}{3}a<0$ $\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}<a<0\right)$のとき

$x=-\sqrt{2}$ で AP^2 は最小となり，AP の最小値 $f(a)=\sqrt{(-\sqrt{2}-a)^2}=|a+\sqrt{2}|$

(iii)　$0\leqq\dfrac{2}{3}a<\sqrt{2}$ $\left(0\leqq a<\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$のとき

$x=\sqrt{2}$ で AP^2 は最小となり，AP の最小値 $f(a)=\sqrt{(\sqrt{2}-a)^2}=|a-\sqrt{2}|$

(2)　曲線 $b=f(a)$ に対して，(1)より，

(i)　$a\leqq-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\leqq a$ のとき

曲線 $b=\sqrt{\dfrac{1}{3}a^2-1}$ は，$b^2=\dfrac{1}{3}a^2-1$ から，双曲線 $\dfrac{1}{3}a^2-b^2=1$ の上半分となる。

また，漸近線は，$b=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}a$ である。

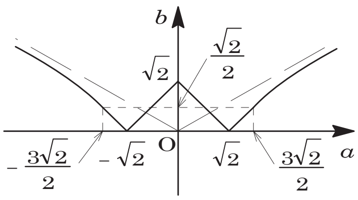
(ii)　$-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}<a<0$ のとき

曲線 $b=|a+\sqrt{2}|$ は，折れ線 $b=|a|$ を a 軸方向に $-\sqrt{2}$ だけ平行移動したもの。

(iii)　$0\leqq a<\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ のとき

曲線 $b=|a-\sqrt{2}|$ は，折れ線 $b=|a|$ を a 軸方向に $\sqrt{2}$ だけ平行移動したもの。

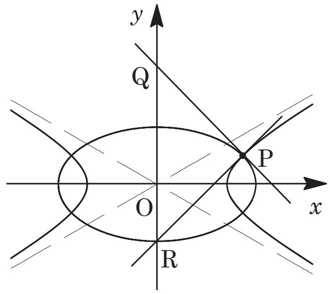
以上より，曲線 $b=f(a)$ の概形は，右図のようになる。



[解　説]

最初に双曲線のグラフを書き，「当たり」をつけておくとミスが防げます。

7　　　　[大阪大]



$C_1 : x^2 + 3y^2 = 3 \cdots\cdots$①，$C_2 : \dfrac{x^2}{\cos^2\theta} - \dfrac{y^2}{\sin^2\theta} = 2 \cdots\cdots$②

の交点の座標を求める。

まず，②は，$x^2\sin^2\theta - y^2\cos^2\theta = 2\sin^2\theta\cos^2\theta$ となり，

①と連立すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \sin^2\theta & -\cos^2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2\sin^2\theta\cos^2\theta \end{pmatrix}$$

ここで，$\varDelta = -\cos^2\theta - 3\sin^2\theta = -1 - 2\sin^2\theta < 0$ から，

$$\begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{1+2\sin^2\theta}\begin{pmatrix} -\cos^2\theta & -3 \\ -\sin^2\theta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2\sin^2\theta\cos^2\theta \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{1+2\sin^2\theta}\begin{pmatrix} 3\cos^2\theta + 6\sin^2\theta\cos^2\theta \\ 3\sin^2\theta - 2\sin^2\theta\cos^2\theta \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{1+2\sin^2\theta}\begin{pmatrix} 3\cos^2\theta(1+2\sin^2\theta) \\ \sin^2\theta(1+2\sin^2\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cos^2\theta \\ \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ から $\sin\theta > 0$，$\cos\theta > 0$ であり，第 1 象限の交点 P は $\mathrm{P}(\sqrt{3}\cos\theta,\ \sin\theta)$

となる。点 P における C_1，C_2 の接線をそれぞれ l_1，l_2 とすると，

$$l_1 : \sqrt{3}x\cos\theta + 3y\sin\theta = 3,\quad l_2 : \frac{\sqrt{3}x}{\cos\theta} - \frac{y}{\sin\theta} = 2$$

y 軸と l_1 の交点は $\mathrm{Q}\left(0,\ \dfrac{1}{\sin\theta}\right)$，$l_2$ の交点は $\mathrm{R}(0,\ -2\sin\theta)$ となり，

$$\mathrm{QR} = \frac{1}{\sin\theta} + 2\sin\theta \geqq 2\sqrt{\frac{1}{\sin\theta}\cdot 2\sin\theta} = 2\sqrt{2}$$

等号は，$\dfrac{1}{\sin\theta} = 2\sin\theta \ \left(\theta = \dfrac{\pi}{4}\right)$ のときに成立する。

よって, QR の長さの最小値は $2\sqrt{2}$ である。

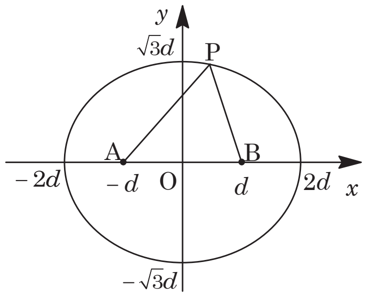
[解 説]

楕円周上の点をパラメータ表示することからスタートしました。延々と計算をして，結局，交点は $\mathrm{P}(\sqrt{3}\cos\theta,\ \sin\theta)$ であることがわかり，書き直したのが上の解です。

8　　[筑波大]

(1)　焦点が$A(-d,\ 0)$，$B(d,\ 0)$より，楕円Eの中心は原点となるので，

$$E : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a^2-b^2=d^2)$$



条件より，$2a=4d$から，$a=2d$となり，

$$b^2=a^2-d^2=3d^2,\ b=\sqrt{3}d$$

これより，長軸の長さは$2a=4d$，短軸の長さは$2b=2\sqrt{3}d$となる。

(2)　$P(x,\ y)$とおくと，

$$AP^2+BP^2=(x+d)^2+y^2+(x-d)^2+y^2=2(x^2+y^2)+2d^2$$
$$=2OP^2+2d^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

また，$AP+BP=4d$なので，①より，

$$2OP^2+2d^2=(AP+BP)^2-2AP\cdot BP=16d^2-2AP\cdot BP$$

よって，$AP\cdot BP=8d^2-OP^2-d^2=7d^2-OP^2 \cdots\cdots\cdots ②$

(3)　$AP^3+BP^3=(AP+BP)(AP^2+BP^2-AP\cdot BP)$なので，①②より，

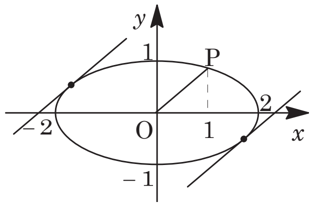
$$AP^3+BP^3=4d(2OP^2+2d^2-7d^2+OP^2)=4d(3OP^2-5d^2) \cdots\cdots\cdots ③$$

ここで，$\sqrt{3}d \leqq OP \leqq 2d$から$3d^2 \leqq OP^2 \leqq 4d^2$であり，③より，$AP^3+BP^3$の最大値は$4d(12d^2-5d^2)=28d^3$，最小値は$4d(9d^2-5d^2)=16d^3$となる。

[解 説]

楕円の定義について，基本事項を確認する問題です。なお，①式は中線定理です。

9　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［岡山大］



(1) $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上の接点を，$(2\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおくと，

接線の方程式は，$\dfrac{2x\cos\theta}{4}+y\sin\theta=1$ から，

$$x\cos\theta+2y\sin\theta=2\cdots\cdots\cdots(*)$$

すると，$(*)$の法線ベクトルは $\vec{n}=(\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ となり，条件より $\vec{n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ は垂直なので，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0$ から，

$$\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=0,\ 2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=0$$

$0\leqq\theta<2\pi$ とすると，$\theta+\dfrac{\pi}{6}=\pi,\ 2\pi$ となり，$\theta=\dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$

よって，OP に平行な接線の方程式は，$(*)$から，

$$x\cos\frac{5}{6}\pi+2y\sin\frac{5}{6}\pi=2,\ x\cos\frac{11}{6}\pi+2y\sin\frac{11}{6}\pi=2$$

したがって，$-\sqrt{3}x+2y=4$，$\sqrt{3}x-2y=4$ である。

(2) $\theta=\dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$ のとき接点は，それぞれ $\mathrm{Q}_1\left(-\sqrt{3},\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\mathrm{Q}_2\left(\sqrt{3},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ となる。

ここで，点 Q が C 上を動くとき，△OPQ の面積が最大値をとるのは，Q における接線と OP が平行である点 Q_1 または Q_2 においてである。

$$\triangle\mathrm{OPQ}_1=\frac{1}{2}\left|1\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}\right|=1,\ \triangle\mathrm{OPQ}_2=\frac{1}{2}\left|\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot1\right|=1$$

以上より，△OPQ の面積の最大値は 1 となり，このとき点 Q の座標は，$\mathrm{Q}\left(-\sqrt{3},\ \dfrac{1}{2}\right)$ または $\mathrm{Q}\left(\sqrt{3},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ である。

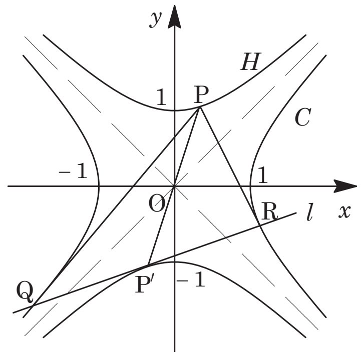
［解 説］

上の解答例以外に，y 軸方向に 2 倍拡大して，楕円 C を円 $x^2+y^2=4$ に対応させる解法もあります。この方法では，計算は暗算程度になります。

10　　［筑波大］

(1)　$C: x^2-y^2=1$ ……①，$H: x^2-y^2=-1$ ……②

に対して，H 上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ の原点対称の点を $\mathrm{P}'(-s,\ -t)$ とおくと，P' における H の接線の方程式は，



$$-sx-(-t)y=-1,\ sx-ty=1 \cdots\cdots\cdots ③$$

よって，直線 $l: sx-ty=1$ は点 P を通らない。

(2)　①③を連立して，$x^2-\dfrac{1}{t^2}(sx-1)^2=1$ となり，

$$(t^2-s^2)x^2+2sx-t^2-1=0$$

点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ は H 上の点から，$s^2-t^2=-1$ ……④となり，

$$x^2+2sx-t^2-1=0 \cdots\cdots\cdots ⑤$$

⑤は，$D/4=s^2+t^2+1>0$ となるので，異なる 2 実数解をもつ。すなわち，直線 l と双曲線 C は異なる 2 点 Q, R で交わる。

そこで，⑤の解を $x=\alpha,\ \beta$ とおくと，$\mathrm{Q}\left(\alpha,\ \dfrac{s}{t}\alpha-\dfrac{1}{t}\right)$，$\mathrm{R}\left(\beta,\ \dfrac{s}{t}\beta-\dfrac{1}{t}\right)$ と表せ，

$$\alpha+\beta=-2s,\ \frac{\alpha+\beta}{2}=-s$$

これより，線分 QR の中点は P' となり，△PQR の重心 G は線分 PP' を $2:1$ に内分する点である。

よって，$\mathrm{G}\left(\dfrac{-2s+s}{3},\ \dfrac{-2t+t}{3}\right)$ から，$\mathrm{G}\left(\dfrac{-s}{3},\ \dfrac{-t}{3}\right)$ である。

(3)　$\triangle\mathrm{OQR}=\dfrac{1}{2}\left|\alpha\left(\dfrac{s}{t}\beta-\dfrac{1}{t}\right)-\beta\left(\dfrac{s}{t}\alpha-\dfrac{1}{t}\right)\right|=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{\beta-\alpha}{t}\right|=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{s^2+t^2+1}}{|t|}$

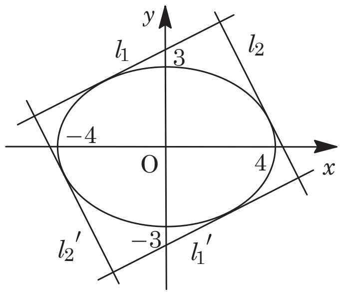
④より，$\triangle\mathrm{OQR}=\dfrac{\sqrt{t^2-1+t^2+1}}{|t|}=\dfrac{\sqrt{2t^2}}{|t|}=\sqrt{2}$

以上より，$\triangle\mathrm{GQR}=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{2}{3}\triangle\mathrm{OQR}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ となり，点 P の位置によらず一定の値をとる。

［解 説］

(1)は普通に連立して計算をしてもよいのですが，直線 l の方程式が，いかにも意味ありげなので工夫をしました。そして，図形的に結論を記しています。

11　　［筑波大］



(1)　$C:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ から，$9x^2+16y^2=9\cdot16$ ………①

直線 $y=mx$ に平行な直線を $y=mx+n$ ……②とおき，①に代入すると，

$$9x^2+16(mx+n)^2=9\cdot16$$
$$(9+16m^2)x^2+32mnx+16n^2-9\cdot16=0$$

①②が接することより，

$$D/4=16^2m^2n^2-(9+16m^2)(16n^2-9\cdot16)=0$$
$$16m^2n^2-(9+16m^2)(n^2-9)=0,\quad n^2-9-16m^2=0$$

よって，$n=\pm\sqrt{16m^2+9}$ から，l_1，$l_1{}'$ の方程式は，$y=mx\pm\sqrt{16m^2+9}$

(2)　原点と l_1，$l_1{}'$ の距離はともに $\dfrac{\sqrt{16m^2+9}}{\sqrt{m^2+1}}$ なので，l_1 と $l_1{}'$ の距離 d_1 は，

$$d_1=\frac{2\sqrt{16m^2+9}}{\sqrt{m^2+1}}\ \cdots\cdots\cdots③$$

また，l_2 と $l_2{}'$ の距離 d_2 は，$m\neq0$ のとき，③において m を $-\dfrac{1}{m}$ に置き換え，

$$d_2=\frac{2\sqrt{16\left(-\frac{1}{m}\right)^2+9}}{\sqrt{\left(-\frac{1}{m}\right)^2+1}}=\frac{2\sqrt{9m^2+16}}{\sqrt{m^2+1}}\ \cdots\cdots\cdots④$$

なお，$m=0$ のときは $d_2=8$ となるが，このときも④は成立している。

(3)　$(d_1)^2+(d_2)^2=\dfrac{4(16m^2+9)}{m^2+1}+\dfrac{4(9m^2+16)}{m^2+1}=100$

(4)　l_1，$l_1{}'$，l_2，$l_2{}'$ で囲まれる長方形の面積 S は，$S=d_1d_2=d_1\sqrt{100-(d_1)^2}$

ここで，$d_1=t$ とおくと，$6\leqq t<8$ となり，

$$S=t\sqrt{100-t^2}=\sqrt{100t^2-t^4}=\sqrt{-(t^2-50)^2+2500}$$

よって，$36\leqq t^2<64$ から，$t^2=50$ のとき S は最大値 $\sqrt{2500}=50$ をとる。

［解 説］

楕円の有名問題です。誘導が非常に細かく付いています。

12　　[東京工大]

(1) 円 $C_1:(x-a)^2+y^2=a^2$ 上の任意の点を $(a+a\cos\theta,\ a\sin\theta)$ とおくと，C_1 が楕円 $C_2:x^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ に内接する条件は，ある θ において等号が成り立ち，

$$(a+a\cos\theta)^2+\frac{a^2\sin^2\theta}{b^2}\leqq 1,\ \ a^2b^2(1+\cos\theta)^2+a^2(1-\cos^2\theta)\leqq b^2\ \cdots\cdots\cdots①$$

①を変形し，$a^2(b^2-1)\cos^2\theta+2a^2b^2\cos\theta+a^2b^2+a^2-b^2\leqq 0$

ここで，$t=\cos\theta$ とおくと，$-1\leqq t\leqq 1$ において，

$$a^2(b^2-1)t^2+2a^2b^2t+a^2b^2+a^2-b^2\leqq 0\ \cdots\cdots\cdots②$$

ただし，ある t $(-1\leqq t\leqq 1)$ で等号が成り立つ。

以下，$a>0$，$b>0$ のもとで，②が成り立つ条件を求める。
まず，$f(t)=a^2(b^2-1)t^2+2a^2b^2t+a^2b^2+a^2-b^2$ とおき，

(i)　$b>1$ のとき

$f(-1)=-b^2<0$ となるので，求める条件は，$f(1)=4a^2b^2-b^2=0$

よって，$(4a^2-1)b^2=0$ から，$a=\dfrac{1}{2}$

(ii)　$b=1$ のとき

$f(t)=2a^2t+2a^2-1$ となり，求める条件は，$f(1)=4a^2-1=0$

よって，$a=\dfrac{1}{2}$

(iii)　$0<b<1$ のとき

$$f(t)=a^2(b^2-1)\left(t+\frac{b^2}{b^2-1}\right)^2-\frac{a^2b^4}{b^2-1}+a^2b^2+a^2-b^2$$

ここで，$-\dfrac{b^2}{b^2-1}=\dfrac{b^2}{1-b^2}>0$ に注意して，

(iii-i)　$0<-\dfrac{b^2}{b^2-1}\leqq 1\left(0<b\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ のとき

求める条件は，$f\left(-\dfrac{b^2}{b^2-1}\right)=-\dfrac{a^2b^4}{b^2-1}+a^2b^2+a^2-b^2=0$ から，

$$-a^2b^4+(b^2-1)(a^2b^2+a^2-b^2)=0,\ \ a^2+b^4-b^2=0$$

よって，$a=\sqrt{b^2-b^4}=b\sqrt{1-b^2}$

(iii-ii)　$-\dfrac{b^2}{b^2-1}>1\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}<b<1\right)$ のとき

求める条件は，$f(1)=4a^2b^2-b^2=0$ から，$a=\dfrac{1}{2}$

(i)〜(iii)より，C_1 が C_2 に内接するための条件は，

$$a=b\sqrt{1-b^2}\ \left(0<b\leqq\frac{\sqrt{2}}{2}\text{のとき}\right),\ \ a=\frac{1}{2}\left(b>\frac{\sqrt{2}}{2}\text{のとき}\right)$$

(2)　$b=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき，$0<b\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ を満たすので，$a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

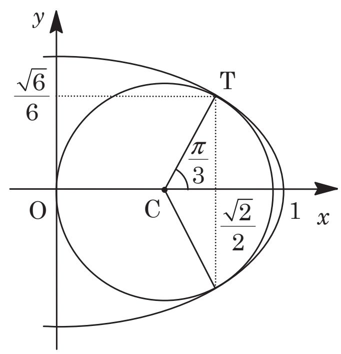
このとき，$f(t)=0$ の重解は，$t=-\dfrac{b^2}{b^2-1}=-\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-1}=\dfrac{1}{2}$ となり，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

$0<\theta<\pi$ より，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ となり，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

すると，第 1 象限の接点の座標 $\mathrm{T}(p,\ q)$ は，

$$p=\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ q=\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

(3)　(2) のとき，$C_1:\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^2+y^2=\dfrac{2}{9}$ となり，中心 $\mathrm{C}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3},\ 0\right)$，半径 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ の円である。そして，半径 CT を x 軸の正の向きから測った角は $\dfrac{\pi}{3}$ である。



また，$C_2:x^2+3y^2=1$ となり，$y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-x^2}$

すると，$x\geqq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の範囲において，C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積 S は，x 軸についての対称性を考えて，

$$\frac{S}{2}=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-x^2}\,dx-\left\{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{6}}{6}\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right\}-\left(\frac{\pi}{27}-\frac{\sqrt{3}}{36}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{\pi}{27}-\frac{\sqrt{3}}{36}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{24}-\frac{1}{27}\right)\pi-\frac{\sqrt{3}}{18}$$

よって，$S=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{12}-\dfrac{2}{27}\right)\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{9}$ となる。

[解 説]

円をパラメータ表示して，2 次不等式の処理に帰着させましたが，かなり時間がかかる問題です。なお，楕円をパラメータ表示した方が，数式処理は簡単だったようです。後から気づきましたが……。

$\boxed{13}$ ［筑波大］

(1)　楕円 $C_1 : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{9}=1\ (a>\sqrt{13})$ ……①の焦点の座標は $(\pm\sqrt{a^2-9},\ 0)$ であり，

双曲線 $C_2 : \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (b>0)$ ……②の焦点の座標は $(\pm\sqrt{4+b^2},\ 0)$ である。

条件より，$\sqrt{a^2-9}=\sqrt{4+b^2}$ から，$a^2-9=4+b^2$，$a^2-b^2=13$ ……③

また，C_1 と C_2 の第 1 象限の交点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ は，①②より，

$$\frac{s^2}{a^2}+\frac{t^2}{9}=1\ \cdots\cdots\text{④},\quad \frac{s^2}{4}-\frac{t^2}{b^2}=1\ \cdots\cdots\text{⑤}$$

④⑤より，$9s^2+a^2t^2=9a^2$，$b^2s^2-4t^2=4b^2$ となり，

$$\begin{pmatrix}9 & a^2\\ b^2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s^2\\ t^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9a^2\\ 4b^2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}s^2\\ t^2\end{pmatrix}=\frac{1}{-36-a^2b^2}\begin{pmatrix}-4 & -a^2\\ -b^2 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9a^2\\ 4b^2\end{pmatrix}$$

③を代入すると，

$$\begin{pmatrix}s^2\\ t^2\end{pmatrix}=\frac{1}{36+a^2b^2}\begin{pmatrix}36a^2+4a^2b^2\\ 9a^2b^2-36b^2\end{pmatrix}=\frac{1}{36+a^2(a^2-13)}\begin{pmatrix}4a^2(9+a^2-13)\\ 9(a^2-4)(a^2-13)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{(a^2-4)(a^2-9)}\begin{pmatrix}4a^2(a^2-4)\\ 9(a^2-4)(a^2-13)\end{pmatrix}=\frac{1}{a^2-9}\begin{pmatrix}4a^2\\ 9(a^2-13)\end{pmatrix}$$

これより，$s=\dfrac{2a}{\sqrt{a^2-9}}$，$t=\dfrac{3\sqrt{a^2-13}}{\sqrt{a^2-9}}$ となり，$\mathrm{P}\left(\dfrac{2a}{\sqrt{a^2-9}},\ \dfrac{3\sqrt{a^2-13}}{\sqrt{a^2-9}}\right)$

(2)　$\mathrm{P}(s,\ t)$ における C_1 の接線 l_1，C_2 の接線 l_2 の法線ベクトルを，それぞれ $\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$ とおくと，$\overrightarrow{n_1}=\left(\dfrac{s}{a^2},\ \dfrac{t}{9}\right)$，$\overrightarrow{n_2}=\left(\dfrac{s}{4},\ -\dfrac{t}{b^2}\right)$ となり，(1)から，

$$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=\frac{s^2}{4a^2}-\frac{t^2}{9b^2}=\frac{4a^2}{4a^2(a^2-9)}-\frac{9(a^2-13)}{9(a^2-13)(a^2-9)}=0$$

よって，l_1 と l_2 は直交する。

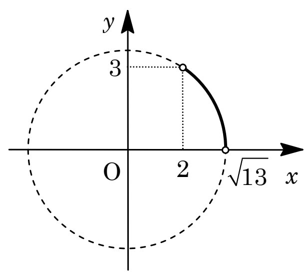
(3)　(1)より，$s^2=\dfrac{4a^2}{a^2-9}=4+\dfrac{36}{a^2-9}$，$t^2=\dfrac{9(a^2-13)}{a^2-9}=9-\dfrac{36}{a^2-9}$

これより，$s^2+t^2=13$

また，$a>\sqrt{13}$ のとき，$0<\dfrac{36}{a^2-9}<9$ より，

$$4<s^2<13\ (2<s<\sqrt{13}),\quad 0<t^2<9\ (0<t<3)$$

よって，点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ の軌跡は右図の実線部である。



［解 説］

計算量は半端ではありません。特に(3)において，1 行目の変形をしなかったときは，たいへんなことになります。