1　［九州大］

次の問いに答えよ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ であること，また，e は自然対数の底で，$e<3$ であることを用いてよい。

(1)　自然数 n に対して，方程式 $\dfrac{\log x}{x}=\dfrac{1}{3n}$ は $x>0$ の範囲にちょうど 2 つの実数解をもつことを示せ。

(2)　(1)の 2 つの実数解を α_n，β_n $(\alpha_n<\beta_n)$ とするとき，$1<\alpha_n<e^{\frac{1}{n}}$，$ne<\beta_n$ が成り立つことを示せ。また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha_n$ を求めよ。

2　　［岡山大］

次の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)=\dfrac{\log(x+1)}{x}$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。ただし，対数は自然対数とする。

(2)　実数 a, b は $b>a>0$ を満たすとする。このとき，次の不等式を証明せよ。

$$(a+1)^b>(b+1)^a$$

3　　［筑波大］

$a \geqq b > 0$, $x \geqq 0$ とし, n は自然数とする。次の不等式を示せ。

(1)　$0 \leqq e^x - (1+x) \leqq \dfrac{x^2 e^x}{2}$

(2)　$a^n - b^n \leqq n(a-b)a^{n-1}$

(3)　$e^x - \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \leqq \dfrac{x^2 e^x}{2n}$

$\boxed{4}$　　［東北大］

自然数 n に対し，方程式 $\dfrac{1}{x^n}-\log x-\dfrac{1}{e}=0$ を考える。ただし，対数は自然対数であり, e はその底とする。

(1)　上の方程式は $x \geqq 1$ にただ 1 つの解をもつことを示せ。

(2)　(1)の解を x_n とする。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n=1$ を示せ。

$\boxed{5}$　　［京都大］

　すべての実数で定義され何回でも微分できる関数 $f(x)$ が $f(0)=0$，$f'(0)=1$ を満たし，さらに任意の実数 a, b に対して $1+f(a)f(b)\neq 0$ であって

$$f(a+b)=\frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$$

を満たしている。

(1)　任意の実数 a に対して，$-1<f(a)<1$ であることを証明せよ。

(2)　$y=f(x)$ のグラフは $x>0$ で上に凸であることを証明せよ。

$\boxed{6}$　　［九州大］

$f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ とおく。ただし，e は自然対数の底とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$ の増減，凹凸，漸近線を調べ，グラフをかけ。

(2)　$f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left\{f^{-1}\left(\frac{1}{n+2}\right)-f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)\right\}$ を求めよ。

$\boxed{7}$　　［名古屋大］

曲線 $C:y=\log x$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ \log a)$，点 $\mathrm{Q}(b,\ \log b)$ $(1<a<b)$ をとる。点 P，Q から x 軸に下ろした 2 本の垂線と x 軸および曲線 C で囲まれた部分の面積を S とする。点 P，Q から y 軸に下ろした 2 本の垂線と y 軸および曲線 C で囲まれた部分の面積を T とする。このとき，$S=T$ となるように b がとれる a の値の範囲を求めよ。

8　　　　　　　　［北海道大］

$0<a<1$，$0<\theta<\pi$ とする。4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{Q}(x,\ y)$ が条件 $\mathrm{OQ}=\mathrm{AQ}=\mathrm{PQ}$ を満たすとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　点 Q の座標を a と θ で表せ。

(2)　a を固定する。$0<\theta<\pi$ の範囲で θ が動くとき，y の最小値を求めよ。

9　［名古屋大］

関数 $f(x)$ と $g(\theta)$ を

$$f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-t^2}\,dt \quad (-1\leqq x\leqq 1)$$

$$g(\theta)=f(\cos\theta)-f(\sin\theta) \quad (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$$

で定める。

(1)　導関数 $g'(\theta)$ を求めよ。

(2)　$g(\theta)$ を求めよ。

(3)　$y=g(\theta)$ のグラフをかけ。

10　　［九州大］

曲線 $y=e^x$ 上を動く点 P の時刻 t における座標を $(x(t),\ y(t))$ と表し，P の速度ベクトルと加速度ベクトルをそれぞれ $\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ と $\vec{\alpha}=\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$ とする。すべての時刻 t で $|\vec{v}|=1$ かつ $\dfrac{dx}{dt}>0$ であるとして，次の問いに答えよ。

(1)　P が点 $(s,\ e^s)$ を通過する時刻における速度ベクトル $\vec{v}$ を s を用いて表せ。

(2)　P が点 $(s,\ e^s)$ を通過する時刻における加速度ベクトル $\vec{\alpha}$ を s を用いて表せ。

(3)　P が曲線全体を動くとき，$|\vec{\alpha}|$ の最大値を求めよ。

11　　［神戸大］

$a,\ b$ は実数で $a>b>0$ とする。区間 $0\leqq x\leqq 1$ で定義される関数 $f(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=\log\bigl(ax+b(1-x)\bigr)-x\log a-(1-x)\log b$$

ただし, log は自然対数を表す。このとき, 以下のことを示せ。

(1)　$0<x<1$ に対して $f''(x)<0$ が成り立つ。

(2)　$f'(c)=0$ を満たす実数 c が, $0<c<1$ の範囲にただ 1 つ存在する。

(3)　$0\leqq x\leqq 1$ を満たす実数 x に対して, $ax+b(1-x)\geqq a^x b^{1-x}$ が成り立つ。

12　［東京大］

(1)　実数 x が $-1<x<1$，$x\neq 0$ を満たすとき，次の不等式を示せ。

$$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

(2)　次の不等式を示せ。

$$0.9999^{101}<0.99<0.9999^{100}$$

13　［東北大］

$f(x)=x^3+3x^2-9x$ とする。$y<x<a$ を満たすすべての $x,\ y$ に対して

$$f(x)>\frac{(x-y)f(a)+(a-x)f(y)}{a-y}$$

が成り立つような a の範囲を求めよ。

14　　［岡山大］

$f(x)=e^{-x^2}$ とする。曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線を l，原点 O を通り l に垂直な直線を l' とし，l と l' との交点を P とする。

(1)　線分 OP の長さを求めよ。

(2)　l と y 軸との交点を Q とし，$\angle\mathrm{POQ}$ を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とする。$\sin\theta$ を a を用いて表せ。

(3)　(2)で求めた $\sin\theta$ を最大にする a の値と，そのときの $\sin\theta$ の値を求めよ。

15　　［九州大］

aを正の定数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　関数$f(x)=(x^2+2x+2-a^2)e^{-x}$の極大値および極小値を求めよ。

(2)　$x \geqq 3$ のとき，不等式$x^3e^{-x} \leqq 27e^{-3}$が成り立つことを示せ。さらに，極限値$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x}$を求めよ。

(3)　k を定数とする。$y=x^2+2x+2$のグラフと$y=ke^x+a^2$のグラフが異なる 3 点で交わるための必要十分条件を，aとkを用いて表せ。

16 　　　　　　　　　　［神戸大］

以下の問いに答えよ。

(1) $x \geqq 1$ において，$x > 2\log x$ が成り立つことを示せ。ただし，e を自然対数の底とするとき，$2.7 < e < 2.8$ であることを用いてよい。

(2) 自然数 n に対して，$(2n\log n)^n < e^{2n\log n}$ が成り立つことを示せ。

17　　［九州大］

実数 a と自然数 n に対して，x の方程式

$$a(x^2+|x+1|+n-1)=\sqrt{n}(x+1)$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　この方程式が実数解をもつような a の範囲を，n を用いて表せ。

(2)　この方程式が，すべての自然数 n に対して実数解をもつような a の範囲を求めよ。

18　　［東北大］

長さ 1 の線分 AB を直径とする円周 C 上に点 P をとる。ただし，点 P は点 A，B とは一致していないとする。線分 AB 上の点 Q を $\angle \mathrm{BPQ}=\dfrac{\pi}{3}$ となるようにとり，線分 BP の長さを x とし，線分 PQ の長さを y とする。以下の問いに答えよ。

(1)　y を x を用いて表せ。

(2)　点 P が 2 点 A, B を除いた円周 C 上を動くとき，y が最大となる x を求めよ。

19　　［岡山大］

xy 平面において，点 $(1,\ 2)$ を通る傾き t の直線を l とする。また，l に垂直で原点を通る直線と l との交点を P とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　点 P の座標を t を用いて表せ。

(2)　点 P の軌跡が 2 次曲線 $2x^2 - ay = 0$ と 3 点のみを共有するような a の値を求めよ。また，そのとき 3 つの共有点の座標を求めよ。ただし $a \neq 0$ とする。

20　　［東京工大］

k を定数とするとき，方程式 $e^x - x^e = k$ の異なる正の解の個数を求めよ。

$\boxed{21}$ ［東京大］

a を実数とし，$x>0$ で定義された関数 $f(x)$，$g(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=\frac{\cos x}{x},\quad g(x)=\sin x+ax$$

このとき $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフが $x>0$ において共有点をちょうど 3 つもつような a をすべて求めよ。

$\boxed{22}$ ［千葉大］

関数 $f(x)=x^x\ (x>0)$ と正の実数 a について，以下の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{1}{4} \leqq x \leqq \dfrac{3}{4}$ における $f(x)f(1-x)$ の最大値および最小値を求めよ。

(2) $\dfrac{1}{4} \leqq x \leqq \dfrac{3}{4}$ における $\dfrac{f(x)f(1-x)f(a)}{f(ax)f(a(1-x))}$ の最小値を求めよ。

23　　［大阪大］

$t>0$ において定義された関数 $f(t)$ は次の条件(ア)(イ)を満たす。

(ア)　$t>0$ のとき，すべての実数 x に対して不等式 $t\cdot\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}+f(t) \geqq 1+x$ が成り立つ。

(イ)　$t>0$ に対して，等式 $t\cdot\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}+f(t)=1+x$ を満たす実数 x が存在する。

このとき，$f(t)$ を求めよ。

24　　［熊本大］

以下の問いに答えよ。

(1)　正の実数 a, b, c について，不等式 $\dfrac{\log a}{a}+\dfrac{\log b}{b}+\dfrac{\log c}{c}<\log 4$ が成立することを示せ。ただし，log は自然対数とし，必要なら $e>2.7$ および $\log 2>0.6$ を用いてもよい。

(2)　自然数 a, b, c, d の組で，$a^{bc}b^{ca}c^{ab}=d^{abc}$，$a \leqq b \leqq c$，$d \geqq 3$ を満たすものをすべて求めよ。

$\boxed{25}$ ［九州大］

2 以上の自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を，$f_n(x)=(x-1)(2x-1)\cdots(nx-1)$ と定義する。$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ に対して，$f_n(x)$ が区間 $\dfrac{1}{k+1}<x<\dfrac{1}{k}$ でただ 1 つの極値をとることを証明せよ。

$\boxed{26}$　　［東京工大］

$a>1$ とし，次の不等式を考える。

$$(*)\quad \frac{e^t-1}{t} \geqq e^{\frac{t}{a}}$$

(1)　$a=2$ のとき，すべての $t>0$ に対して上の不等式$(*)$が成り立つことを示せ。

(2)　すべての $t>0$ に対して上の不等式$(*)$が成り立つような a の範囲を求めよ。