1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［九州大］

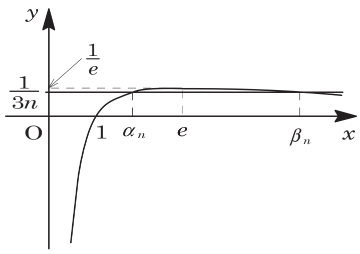
(1)　$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とおくと，$f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$	0

ここで, $n\geqq 1$，$e<3$ から,

$$3n>ne\geqq e，0<\frac{1}{3n}<\frac{1}{e}$$

すると，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=\dfrac{1}{3n}$ は 2 つの共有点をもつ。よって，$f(x)=\dfrac{1}{3n}$ は，$x>0$ の範囲に 2 つの実数解をもつ。



(2)　まず, $n\geqq 1$ から $e^{\frac{1}{n}}\leqq e\leqq ne$ となり，$0<x\leqq e^{\frac{1}{n}}$ において $f(x)$ は単調に増加し，$x\geqq ne$ において $f(x)$ は単調に減少する。

さて，$f(\alpha_n)=\dfrac{1}{3n}>0=f(1)$ であり,

$$f\left(e^{\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{ne^{\frac{1}{n}}}\geqq\frac{1}{ne}>\frac{1}{3n}=f(\alpha_n)$$

よって，$f(1)<f(\alpha_n)<f\left(e^{\frac{1}{n}}\right)$ となり，$1<\alpha_n<e^{\frac{1}{n}}$ ………(*)

また，$f(ne)=\dfrac{\log ne}{ne}\geqq\dfrac{\log e}{ne}>\dfrac{1}{3n}=f(\beta_n)$ より，$ne<\beta_n$ である。

ここで, $n\to\infty$ のとき $e^{\frac{1}{n}}\to 1$ なので, (*)より,

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=1$$

［解 説］

微分法の基本問題です。(2)の不等式は，曲線 $y=f(x)$ を見ながら立式しました。

2　　　　　　　　　　　　　　　　　　［岡山大］

(1)　$f(x)=\dfrac{\log(x+1)}{x}$ に対して，

$$f'(x)=\frac{\dfrac{x}{x+1}-\log(x+1)}{x^2}=\frac{x-(x+1)\log(x+1)}{x^2(x+1)}$$

(2)　$g(x)=x-(x+1)\log(x+1)$ とおくと，

$$g'(x)=1-(x+1)\frac{1}{x+1}-\log(x+1)=-\log(x+1)$$

$x>0$ において，$g'(x)<0$ となるので，

$$g(x)<g(0)=0$$

これより，$f'(x)<0$ となり, $x>0$ において，$f(x)$ は単調に減少する。

すると, $0<a<b$ に対して，$f(a)>f(b)$ となり，

$$\frac{\log(a+1)}{a}>\frac{\log(b+1)}{b},\ \ \log(a+1)^b>\log(b+1)^a$$

よって，$(a+1)^b>(b+1)^a$

［解 説］

関数の単調性と不等式の証明をリンクさせた有名問題です。類した過去問は数え切れません。

3　　［筑波大］

(1)　$x \geqq 0$ において，$f(x)=e^x-(1+x)$ とおくと，$f'(x)=e^x-1\geqq 0$

よって, $x\geqq 0$ のとき，$f(x)\geqq f(0)=0$ となり，$e^x-(1+x)\geqq 0$ ………①

また, $x\geqq 0$ において，$g(x)=\dfrac{x^2e^x}{2}-e^x+(1+x)$ とおくと,

$$g'(x)=\frac{2xe^x+x^2e^x}{2}-e^x+1=\frac{(x^2+2x-2)e^x}{2}+1$$

$$g''(x)=\frac{(2x+2)e^x+(x^2+2x-2)e^x}{2}=\frac{(x^2+4x)e^x}{2}\geqq 0$$

よって, $x\geqq 0$ のとき，$g'(x)\geqq g'(0)=0$ より,

$$g(x)\geqq g(0)=0,\ \frac{x^2e^x}{2}\geqq e^x-(1+x)\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より, $x\geqq 0$ のとき，$0\leqq e^x-(1+x)\leqq \dfrac{x^2e^x}{2}$

(2)　(i)　$a>b>0$ のとき

$$\frac{a^n-b^n}{a-b}=a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1}$$
$$<a^{n-1}+a^{n-1}+a^{n-1}+\cdots+a^{n-1}=na^{n-1}$$

よって，$a^n-b^n<n(a-b)a^{n-1}$

(ii)　$a=b>0$ のとき　$a^n-b^n=n(a-b)a^{n-1}=0$

(i)(ii)より, $a\geqq b>0$ のとき，$a^n-b^n\leqq n(a-b)a^{n-1}$ ………③

(3)　$x\geqq 0$ のとき, ①より，$e^{\frac{x}{n}}\geqq 1+\dfrac{x}{n}>0$ となるので, ③より,

$$\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\leqq n\left(e^{\frac{x}{n}}-1-\frac{x}{n}\right)\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^{n-1}$$

$$e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\leqq n\left(e^{\frac{x}{n}}-1-\frac{x}{n}\right)e^{\frac{n-1}{n}x}\ \cdots\cdots\cdots④$$

②より，$e^{\frac{x}{n}}-1-\dfrac{x}{n}\leqq\dfrac{\left(\frac{x}{n}\right)^2e^{\frac{x}{n}}}{2}=\dfrac{x^2e^{\frac{x}{n}}}{2n^2}$ となるので,

$$n\left(e^{\frac{x}{n}}-1-\frac{x}{n}\right)e^{\frac{n-1}{n}x}\leqq n\cdot\frac{x^2e^{\frac{x}{n}}}{2n^2}e^{\frac{n-1}{n}x}=\frac{x^2e^x}{2n}\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

④⑤より, $x\geqq 0$ のとき，$e^x-\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\leqq\dfrac{x^2e^x}{2n}$

［解 説］

(1)と(2)の不等式が, (3)の不等式を証明するための親切な誘導となっています。そっけない感じのする問題文ですが, 内容には味わいがあります。

$\boxed{4}$ ［東北大］

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x^n}-\log x-\dfrac{1}{e}$ とおくと，$f'(x)=-\dfrac{n}{x^{n+1}}-\dfrac{1}{x}$

$x>0$ において，$f'(x)<0$ より，$f(x)$ は単調に減少し，

$$f(1)=1-\frac{1}{e}>0,\ f\left(e^{\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{e}-\frac{1}{n}-\frac{1}{e}=-\frac{1}{n}<0$$

よって，$f(x)=0$ は $x\geqq 1$ にただ 1 つの解をもつ。

(2) (1)より，$1<x_n<e^{\frac{1}{n}}$ となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}}=1$ から，

$$\lim_{n\to\infty}x_n=1$$

［解 説］

(1)では，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$ より結論が導けますが，(2)につながりません。そこで，$f(x)$ の式を眺めて，$x=e^{\frac{1}{n}}$ のときの値を計算しました。

5　　　　［京都大］

(1)　$f(a+b)=\dfrac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$ ……①において，$b=-a$ とおくと，$f(0)=0$ から，

$$0=\frac{f(a)+f(-a)}{1+f(a)f(-a)},\quad f(-a)=-f(a)\ \cdots\cdots\cdots ②$$

また，①において，$b=a$ とおくと，$f(2a)=\dfrac{2f(a)}{1+\{f(a)\}^2}$ となり，

$$f(a)+1=\frac{2f\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\left\{f\left(\frac{a}{2}\right)\right\}^2}+1=\frac{\left\{f\left(\frac{a}{2}\right)+1\right\}^2}{1+\left\{f\left(\frac{a}{2}\right)\right\}^2}\geqq 0$$

ここで，$f\left(\frac{a}{2}\right)=-1$ となる a の存在を仮定すると，②より，

$$f\left(-\frac{a}{2}\right)=-f\left(\frac{a}{2}\right)=1$$

すると，$1+f\left(\frac{a}{2}\right)f\left(-\frac{a}{2}\right)=0$ となり，条件に反する。

よって，$f(a)+1>0$ から，$f(a)>-1$ となる。

さらに，②を用いると，$f(-a)=-f(a)<1$ となり, a が任意より $f(a)<1$

以上より，$-1<f(a)<1$ である。

(2)　①の両辺を b で微分すると，

$$f'(a+b)=\frac{f'(b)\{1+f(a)f(b)\}-\{f(a)+f(b)\}f(a)f'(b)}{\{1+f(a)f(b)\}^2}$$

$$=\frac{f'(b)\left[1-\{f(a)\}^2\right]}{\{1+f(a)f(b)\}^2}\ \cdots\cdots\cdots ③$$

③に $b=0$ を代入すると，

$$f'(a)=\frac{f'(0)\left[1-\{f(a)\}^2\right]}{\{1+f(a)f(0)\}^2}=1-\{f(a)\}^2\ \cdots\cdots\cdots ④$$

すると, (1)から，$-1<f(x)<1$ なので，$f'(x)=1-\{f(x)\}^2>0$ となり, $x>0$ で

$$f(x)>f(0)=0$$

このとき，④より，$f''(x)=-2f(x)f'(x)<0$

よって，$y=f(x)$ のグラフは $x>0$ で上に凸である。

［解 説］

$f(0)=0$ が利用できるように，a と b に適当な関係を設定していくと，$f(x)$ が奇関数であることがわかります。この点を解の糸口としています。

$\boxed{6}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［九州大］

(1)　$f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ に対して,

$$f'(x)=\frac{e^x(e^x+1)-e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{e^x(e^x+1)^2-e^x\cdot 2(e^x+1)e^x}{(e^x+1)^4}$$

$$=-\frac{e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^3}$$

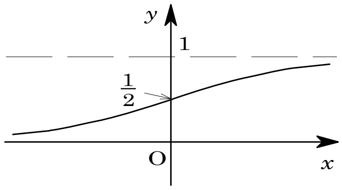
x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$

また，$f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$ と変形すると,

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=1,\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=0$$

これより，$y=1$，$y=0$ の 2 本の漸近線が存在し,

$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



(2)　$y=f(x) \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ より，$y=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ とおき, x について解くと,

$$(1-y)e^x=y,\quad x=\log\frac{y}{1-y}\quad (0<y<1)$$

よって，$f^{-1}(y)=\log\dfrac{y}{1-y}$ より，$f^{-1}(x)=\log\dfrac{x}{1-x}\quad (0<x<1)$

(3)　$f^{-1}\left(\dfrac{1}{n+2}\right)-f^{-1}\left(\dfrac{1}{n+1}\right)=\log\dfrac{\frac{1}{n+2}}{1-\frac{1}{n+2}}-\log\dfrac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}}=\log\dfrac{1}{n+1}-\log\dfrac{1}{n}$ から,

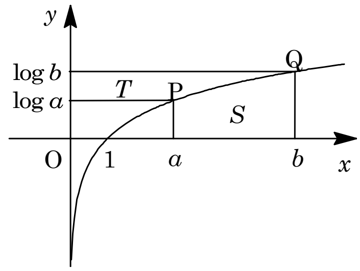
$$\lim_{n\to\infty}n\left\{f^{-1}\left(\frac{1}{n+2}\right)-f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)\right\}=\lim_{n\to\infty}n\log\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\log\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$=\log\frac{1}{e}=-1$$

［解 説］

関数のグラフに関する基本問題です。(3)で，ひとひねりがあると予測しましたが，これは，はずれてしまいました。

$\boxed{7}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［名古屋大］



$a \leqq x \leqq b$ において，曲線 C : $y=\log x$ と x 軸にはさまれた部分の面積 S は,

$$S=\int_a^b \log x\,dx=\left[\,x\log x-x\,\right]_a^b$$

$$=b\log b-a\log a-b+a$$

$\log a \leqq y \leqq \log b$ において，曲線 C と y 軸にはさまれた部分の面積 T は,

$$T=b\log b-a\log a-S=b-a$$

条件より，$S=T$ のとき，$b\log b-a\log a=2(b-a)$ となり,

$$\frac{b\log b-a\log a}{b-a}=2 \cdots\cdots\cdots ①$$

以下，①を満たす $b(>a)$ が存在する $a(>1)$ の範囲を求める。

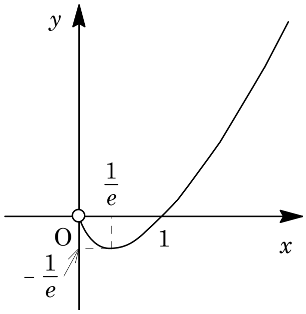
ここで，$f(x)=x\log x$ とおくと,

$$f'(x)=\log x+x\cdot\frac{1}{x}=\log x+1$$

$$f''(x)=\frac{1}{x}>0$$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-\frac{1}{e}$	↗

$\lim\limits_{x\to+0} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ より，$y=f(x)$ のグラフは下に凸で，右図のようになる。



さて，①から，$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=2 \cdots\cdots\cdots ②$

すると，②を満たす $b(>a)$ が存在する $a(>1)$ の条件は,

$f'(a)<\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ より,

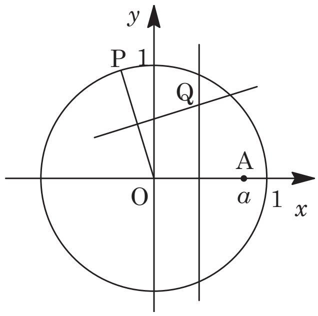
$$\log a+1<2$$

よって，$1<a<e$ である。

［解　説］

②式を，曲線の割線の傾きとしてとらえ，接線の傾きとの関係を図形的に処理しています。

8　　　　　　　　［北海道大］



(1)　まず，OQ = AQ より，Q(x，y) は線分 OA の垂直二等分線上にあるので，

$$x=\frac{a}{2}\cdots\cdots\cdots①$$

また，OQ = PQ より，Q は線分 OP の垂直二等分線上にある。そこで，OP の中点の座標$\left(\frac{\cos\theta}{2},\ \frac{\sin\theta}{2}\right)$と，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$より，

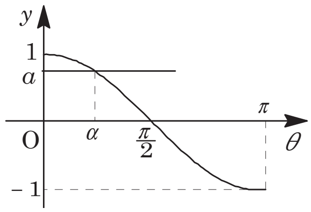
$$\cos\theta\left(x-\frac{\cos\theta}{2}\right)+\sin\theta\left(y-\frac{\sin\theta}{2}\right)=0$$

$$x\cos\theta+y\sin\theta=\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$y\sin\theta=\frac{1}{2}-\frac{a}{2}\cos\theta$となり，$0<\theta<\pi$から$\sin\theta\neq0$なので，

$$y=\frac{1-a\cos\theta}{2\sin\theta}\cdots\cdots\cdots③$$

よって，$\mathrm{Q}\left(\frac{a}{2},\ \frac{1-a\cos\theta}{2\sin\theta}\right)$である。



(2)　③より，$y'=\frac{a\sin^2\theta-(1-a\cos\theta)\cos\theta}{2\sin^2\theta}=\frac{a-\cos\theta}{2\sin^2\theta}$

$0<a<1$ から，右図のように，$a=\cos\alpha$ とおくと，y の増減は右下表のようになる。

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	π
y'		−	0	＋	
y		↘		↗	

よって，$\theta=\alpha$において y は最小となり，このとき$\sin\alpha=\sqrt{1-a^2}$から，最小値は，

$$y=\frac{1-a\cos\alpha}{2\sin\alpha}=\frac{1-a^2}{2\sqrt{1-a^2}}=\frac{\sqrt{1-a^2}}{2}$$

［解　説］

微分の応用についての頻出タイプの問題です。基本手法の確認のために適切な内容です。

9　　　　［名古屋大］

(1)　$f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-t^2}\,dt$ ……①より，$f'(x)=\sqrt{1-x^2}$

また，$g(\theta)=f(\cos\theta)-f(\sin\theta)$ ……②より，

$$g'(\theta)=-f'(\cos\theta)\sin\theta-f'(\sin\theta)\cos\theta$$
$$=-\sqrt{1-\cos^2\theta}\sin\theta-\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta=-\sin\theta|\sin\theta|-\cos\theta|\cos\theta|$$

(2)　①より，$f(-1)=0$，$f(0)=\dfrac{\pi}{4}$，$f(1)=\dfrac{\pi}{2}$ となり，②から，

$$g(0)=f(1)-f(0)=\frac{\pi}{4},\ g\left(\frac{\pi}{2}\right)=f(0)-f(1)=-\frac{\pi}{4}$$
$$g(\pi)=f(-1)-f(0)=-\frac{\pi}{4},\ g\left(\frac{3\pi}{2}\right)=f(0)-f(-1)=\frac{\pi}{4}$$

(i)　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$g'(\theta)=-\sin^2\theta-\cos^2\theta=-1,\ g(\theta)=-\theta+C_1$$

ここで，$g(0)=\dfrac{\pi}{4}$ から $C_1=\dfrac{\pi}{4}$ となり，$g(\theta)=-\theta+\dfrac{\pi}{4}$

(ii)　$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ のとき

$$g'(\theta)=-\sin^2\theta+\cos^2\theta=\cos 2\theta,\ g(\theta)=\frac{1}{2}\sin 2\theta+C_2$$

ここで，$g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{4}$ から $C_2=-\dfrac{\pi}{4}$ となり，$g(\theta)=\dfrac{1}{2}\sin 2\theta-\dfrac{\pi}{4}$

(iii)　$\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{3\pi}{2}$ のとき

$$g'(\theta)=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\ g(\theta)=\theta+C_3$$

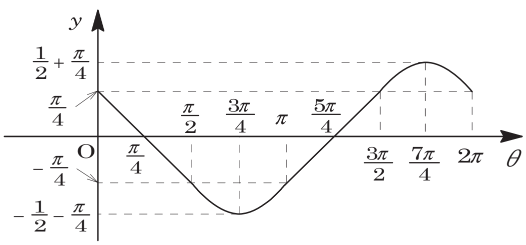
ここで，$g(\pi)=-\dfrac{\pi}{4}$ から $C_3=-\dfrac{5\pi}{4}$ となり，$g(\theta)=\theta-\dfrac{5\pi}{4}$

(iv)　$\dfrac{3\pi}{2}\leqq\theta\leqq 2\pi$ のとき

$$g'(\theta)=\sin^2\theta-\cos^2\theta=-\cos 2\theta,\ g(\theta)=-\frac{1}{2}\sin 2\theta+C_4$$

ここで，$g\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{4}$ から $C_4=\dfrac{\pi}{4}$ となり，$g(\theta)=-\dfrac{1}{2}\sin 2\theta+\dfrac{\pi}{4}$

(3)　(2)より，(i)～(iv)の場合をまとめると，$y=g(\theta)$ のグラフは右図のようになる。



［解 説］

合成関数の微分についての興味深い問題です。なお，(2)の $f(0)$，$f(1)$ の値は，四分円，半円の面積をもとに導いています。

10 ［九州大］

(1)　曲線 $y=e^x$ 上を動く点 $\mathrm{P}(x(t),\ y(t))$ に対して，$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt}=e^x\dfrac{dx}{dt}$

ここで，$|\vec{v}|=1$ から，$\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2=1$ なので，

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+e^{2x}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=1,\ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{1}{1+e^{2x}}$$

$\dfrac{dx}{dt}>0$ より，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$，$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

よって，$x=s$ において，$\vec{v}=\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2s}}}(1,\ e^s)$

(2)　(1)より，$\dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dx}{dt}\right)\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2e^{2x}}{\sqrt{(1+e^{2x})^3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}=-\dfrac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dx}{dt}=\frac{1}{1+e^{2x}}\left(e^x\sqrt{1+e^{2x}}-e^x\frac{2e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$$

$$=\frac{e^x(1+e^{2x})-e^{3x}}{(1+e^{2x})^2}=\frac{e^x}{(1+e^{2x})^2}$$

よって，$x=s$ において，$\vec{\alpha}=\dfrac{1}{(1+e^{2s})^2}(-e^{2s},\ e^s)$

(3)　(2)より，$|\vec{\alpha}|^2=\dfrac{1}{(1+e^{2s})^4}(e^{4s}+e^{2s})=\dfrac{e^{2s}}{(1+e^{2s})^4}(e^{2s}+1)=\dfrac{e^{2s}}{(1+e^{2s})^3}$

ここで, $u>0$ に対して，$f(u)=\dfrac{u}{(1+u)^3}$ とおくと，$|\vec{\alpha}|^2=f(e^{2s})$ であり，

$$f'(u)=\frac{(1+u)^3-u\cdot3(1+u)^2}{(1+u)^6}=\frac{-2u+1}{(1+u)^4}$$

u	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(u)$		$+$	0	$-$
$f(u)$		↗	$\frac{4}{27}$	↘

右表より，$f(u)$ は $u=\dfrac{1}{2}$ のとき，最大値 $\dfrac{4}{27}$ をとり，

これより，$|\vec{\alpha}|$ の最大値は $\sqrt{\dfrac{4}{27}}=\dfrac{2}{9}\sqrt{3}$ である。

［解 説］

大学入試ではあまり見かけない速度，加速度を題材とした問題です。合成関数の微分法がポイントです。

11　　　　［神戸大］

(1)　$f(x)=\log(ax+b(1-x))-x\log a-(1-x)\log b$ に対して，

$$f'(x)=\frac{a-b}{ax+b(1-x)}-\log a+\log b,\quad f''(x)=-\frac{(a-b)^2}{\{ax+b(1-x)\}^2}$$

$a>b>0$ から, $0<x<1$ において $f''(x)<0$ となる。

(2)　まず, $t>0$ のとき，$g(t)=t-1-\log t$ とおくと,

$$g'(t)=1-\frac{1}{t}=\frac{t-1}{t}$$

すると，$g(t)$ の増減は右表のようになる。

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

さて, (1)より，$f'(0)=\dfrac{a-b}{b}-\log a+\log b=\dfrac{a}{b}-1-\log\dfrac{a}{b}=g\left(\dfrac{a}{b}\right)$

$$f'(1)=\frac{a-b}{a}-\log a+\log b=1-\frac{b}{a}+\log\frac{b}{a}=-g\left(\frac{b}{a}\right)$$

ここで, $a>b>0$ から，$\dfrac{a}{b}>1$，$0<\dfrac{b}{a}<1$ から，$f'(0)>0$，$f'(1)<0$

さらに, (1)から, $0<x<1$ で $f'(x)$ は単調減少であるので，$f'(c)=0$ を満たす実数 c は, $0<c<1$ の範囲にただ 1 つ存在することになる。

(3)　(2)より，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	c	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

また，$f(0)=f(1)=0$ から，$0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)\geqq 0$ となり,

$$\log(ax+b(1-x))\geqq x\log a+(1-x)\log b$$

$$\log(ax+b(1-x))\geqq \log a^x b^{1-x}$$

よって，$ax+b(1-x)\geqq a^x b^{1-x}$ が成り立つ。

［解 説］

曲線 $y=\log x$ が上に凸であることを題材としています。(2)で，平均値の定理を直接的に利用しないときは，上のような解になります。

$\boxed{12}$

［東京大］

(1)　$-1<x<1$，$x\neq 0$のとき，$f(x)=\log(1+x)^{\frac{1}{x}}-\log(1-x)^{1-\frac{1}{x}}$とおくと，

$$f(x)=\frac{1}{x}\log(1+x)-\frac{x-1}{x}\log(1-x)=\frac{1}{x}\{\log(1+x)-(x-1)\log(1-x)\}$$

さらに，$g(x)=\log(1+x)-(x-1)\log(1-x)$とおくと，

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}-\log(1-x)+\frac{x-1}{1-x}=-\frac{x}{1+x}-\log(1-x)$$

$$g''(x)=-\frac{(1+x)-x}{(1+x)^2}+\frac{1}{1-x}$$

$$=\frac{x(x+3)}{(1+x)^2(1-x)}$$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g''(x)$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		↘	0	↗	

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$		↗	0	↗	

これより，$g'(x)\geqq 0$ となり，$g(x)$は単調に増加し，$-1<x<0$のとき$g(x)<0$，$0<x<1$のとき$g(x)>0$となる。

すると，$-1<x<1$，$x\neq 0$のとき，

$$f(x)=\log(1+x)^{\frac{1}{x}}-\log(1-x)^{1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}g(x)>0$$

よって，$\log(1-x)^{1-\frac{1}{x}}<\log(1+x)^{\frac{1}{x}}$，$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdots\cdots\cdots(*)$

(2)　$(*)$より，$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}(1+x)^{1-\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}(1+x)^{1-\frac{1}{x}}$となり，

$$(1-x^2)^{1-\frac{1}{x}}<1+x$$

$x=-\dfrac{1}{100}$とおくと，$0.9999^{101}<0.99$

また,$(*)$より，$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}(1-x)^{\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}(1-x)^{\frac{1}{x}}$となり，

$$1-x<(1-x^2)^{\frac{1}{x}}$$

$x=\dfrac{1}{100}$とおくと，$0.99<0.9999^{100}$

以上より，$0.9999^{101}<0.99<0.9999^{100}$が成り立つ。

［解 説］

微分法の不等式への応用問題です。なお，(2)の式変形については，結論の不等式を$(1-10^{-4})^{1+10^2}<1-10^{-2}<(1-10^{-4})^{10^2}$とみて方針を立てました。

13

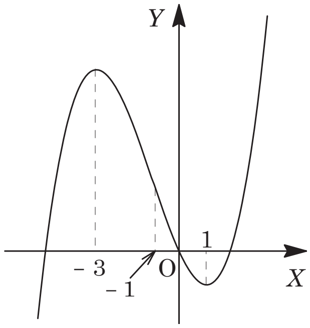
［東北大］

$f(X)=X^3+3X^2-9X$ に対して，

$$f'(X)=3X^2+6X-9$$
$$=3(X+3)(X-1)$$
$$f''(X)=6X+6=6(X+1)$$

X	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(X)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f''(X)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f(X)$	↗	27	↘	11	↘	-5	↗

これより，$Y=f(X)$ のグラフの概形は右図のようになる。



さて，$y<x<a$ を満たすすべての x, y に対して，

$$f(x)>\frac{(x-y)f(a)+(a-x)f(y)}{a-y} \quad\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$y<x<a$ のとき，XY 平面上で 2 点 $(y,\ f(y))$，$(a,\ f(a))$ を結ぶ線分と直線 $X=x$ との交点を $(x,\ g(x))$ とおくと，

$$g(x)=\frac{(x-y)f(a)+(a-x)f(y)}{(a-x)+(x-y)}$$
$$=\frac{(x-y)f(a)+(a-x)f(y)}{a-y} \quad\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，与えられた条件は，$y<x<a$ を満たすすべての x, y に対して，

$$f(x)>g(x)$$

すなわち，$Y=f(X)$ のグラフが，$X<a$ で上に凸であることを意味する。

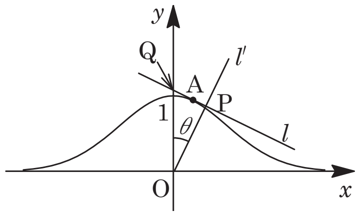
よって，求める a の範囲は，$a\leqq-1$ である。

［解 説］

計算のみで処理をするには，計算量が多くなりすぎるので，不等式の意味を考え，直感的に解いています。

14　　　　　　　　　　　　　　　　　［岡山大］

(1)　$f(x)=e^{-x^2}$ より，$f'(x)=-2xe^{-x^2}$



さて，点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線 l は，

$$y-e^{-a^2}=-2ae^{-a^2}(x-a)$$

$$2ae^{-a^2}x+y-(2a^2+1)e^{-a^2}=0$$

線分 OP の長さは，原点 O と直線 l の距離より，

$$\mathrm{OP}=\frac{(2a^2+1)e^{-a^2}}{\sqrt{4a^2e^{-2a^2}+1}}=\frac{2a^2+1}{\sqrt{4a^2+e^{2a^2}}}$$

(2)　直線 l の法線ベクトルの成分が，$(2ae^{-a^2},\ 1)=e^{-a^2}(2a,\ e^{a^2})$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と同じ向きのベクトルを $\vec{u}=(2a,\ e^{a^2})$ とし，また $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ と同じ向きのベクトルを $\vec{v}=(0,\ 1)$ とすると，$\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角 θ は，

$$\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{e^{a^2}}{\sqrt{4a^2+e^{2a^2}}}$$

よって，$\sin^2\theta=1-\dfrac{e^{2a^2}}{4a^2+e^{2a^2}}=\dfrac{4a^2}{4a^2+e^{2a^2}}$ となり，$0\leqq\theta\leqq\pi$ から，

$$\sin\theta=\frac{2|a|}{\sqrt{4a^2+e^{2a^2}}}$$

(3)　$t=2a^2\geqq0$ とおき，$g(t)=\dfrac{2t}{2t+e^t}$ とすると，(2)より，$\sin\theta=\sqrt{g(t)}$ となる。

$$g'(t)=\frac{2(2t+e^t)-2t(2+e^t)}{(2t+e^t)^2}$$

$$=\frac{2(1-t)e^t}{(2t+e^t)^2}$$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$		$+$	0	$-$
$g(t)$		↗	$\dfrac{2}{2+e}$	↘

右表より，$g(t)$ は，$t=1$ のとき最大値 $\dfrac{2}{2+e}$ をとる。

よって，$\sin\theta$ が最大となるのは，$2a^2=1$ から $a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のときであり，$\sin\theta$ の最大値は $\sqrt{\dfrac{2}{2+e}}$ である。

［解　説］

計算がやや難の部分もありますが，微分についての標準的な問題です。

$\boxed{15}$ ［九州大］

(1)　$f(x)=(x^2+2x+2-a^2)e^{-x}$ に対して,

$$f'(x)=(2x+2)e^{-x}-(x^2+2x+2-a^2)e^{-x}=-(x^2-a^2)e^{-x}$$

これより，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

よって，極大値は $f(a)=(2a+2)e^{-a}$，極小値は $f(-a)=(-2a+2)e^{a}$ である。

(2)　$x\geqq 3$ のとき，$g(x)=27e^{-3}-x^3e^{-x}$ とおく。

$$g'(x)=-3x^2e^{-x}+x^3e^{-x}=x^2(x-3)e^{-x}\geqq 0$$

よって，$g(x)\geqq g(3)=0$ となり，$x^3e^{-x}\leqq 27e^{-3}$ が成立する。

すると，$0<x^2e^{-x}\leqq\dfrac{27e^{-3}}{x}$ から，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x}=0$

(3)　$y=x^2+2x+2$ のグラフと $y=ke^x+a^2$ のグラフの共有点の個数は,

$$x^2+2x+2=ke^x+a^2,\ (x^2+2x+2-a^2)e^{-x}=k$$

よって，$f(x)=k$ の異なる実数解の個数に一致し，さらに，$y=f(x)$ のグラフと $y=k$ のグラフの共有点の個数に等しい。

そして，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$ であり，また(2)より，

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2-a^2}{x^2}\right)x^2e^{-x}=0$$

これより，極小値の符号で場合分けをして,

(i)　$(-2a+2)e^a>0$　$(0<a<1)$ のとき

$y=f(x)$ のグラフと $y=k$ のグラフが異なる 3 点で交わる条件は,

$$(-2a+2)e^a<k<(2a+2)e^{-a}$$

(ii)　$(-2a+2)e^a\leqq 0$　$(a\geqq 1)$ のとき

$y=f(x)$ のグラフと $y=k$ のグラフが異なる 3 点で交わる条件は,

$$0<k<(2a+2)e^{-a}$$

［解 説］

誘導が非常に細かい問題です。誘導がなく，(3)のみの出題でも完答できることが望まれます。

$\boxed{16}$ ［神戸大］

(1)　$f(x)=x-2\log x$ とおくと，$f'(x)=1-\dfrac{2}{x}=\dfrac{x-2}{x}$

$x \geqq 1$ において，$f(x)$ の増減は右表のようになり，

$$f(2)=2-2\log 2=2(\log e-\log 2)>0$$

よって，$x \geqq 1$ のとき $f(x)>0$ から，$x>2\log x$

(2)　まず，$n=1$ のとき，$0<1$ から $(2n\log n)^n<e^{2n\log n}$ は成立する。

次に，2 以上の自然数 n に対して，(1)より，$2\log n<n$ となり，$2n\log n<n^2$

ここで，対数関数は単調増加関数より，

$$\log(2n\log n)<\log n^2\text{，}\ n\log(2n\log n)<2n\log n\text{，}\ \log(2n\log n)^n<2n\log n$$

よって，$(2n\log n)^n<e^{2n\log n}$ が成立する。

［解 説］

(2)は結論を同値変形したものを，順序を変えて記したものです。最後の問題なので，ひとひねりあるかとも思ったのですが……。

17　　［九州大］

(1)　$a(x^2+|x+1|+n-1)=\sqrt{n}(x+1)$ ……①に対して，$t=x+1$ とおくと，

$$a\{(t-1)^2+|t|+n-1\}=\sqrt{n}t,\ a(t^2-2t+|t|+n)=\sqrt{n}t \cdots\cdots ②$$

(i)　$a=0$ のとき　①は実数解 $x=-1$ をもつ。

(ii)　$a\neq 0$ のとき　①が実数解をもつ条件は，②が実数解をもつ条件に等しい。

②より，$t^2-2t+|t|+n=\dfrac{\sqrt{n}}{a}t$ ………③

③は，$t=0$ を解としてもたないので，$t>0$ のとき，

$$t^2-t+n=\frac{\sqrt{n}}{a}t,\ t-1+\frac{n}{t}=\frac{\sqrt{n}}{a}$$

ここで，$f_1(t)=t-1+\dfrac{n}{t}$　$(t>0)$ とおくと，

$$f_1'(t)=1-\frac{n}{t^2}=\frac{t^2-n}{t^2}$$

t	0	$\cdots$	$\sqrt{n}$	$\cdots$
$f_1'(t)$		$-$	0	$+$
$f_1(t)$	∞	↘	$2\sqrt{n}-1$	↗

また，$t<0$ のとき，③は，$t-3+\dfrac{n}{t}=\dfrac{\sqrt{n}}{a}$

$f_2(t)=t-3+\dfrac{n}{t}$　$(t<0)$ とおくと，

$$f_2'(t)=1-\frac{n}{t^2}=\frac{t^2-n}{t^2}$$

t	$\cdots$	$-\sqrt{n}$	$\cdots$	0
$f_2'(t)$	$+$	0	$-$	
$f_2(t)$	↗	$-2\sqrt{n}-3$	↘	$-\infty$

したがって，③が実数解をもつのは，

$$\frac{\sqrt{n}}{a}\geqq 2\sqrt{n}-1 \cdots\cdots ④,\ \frac{\sqrt{n}}{a}\leqq -2\sqrt{n}-3 \cdots\cdots ⑤$$

④より，$a>0$ のもとで $a\leqq\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1}$，⑤より，$a<0$ のもとで $a\geqq -\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+3}$

(i)(ii)より，①が実数解をもつ a の範囲は，$-\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+3}\leqq a\leqq\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1}$ ………⑥

(2)　$n\geqq 1$ のとき $0<\dfrac{1}{\sqrt{n}}\leqq 1$ となり，$-\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+3}=-\dfrac{1}{2+\dfrac{3}{\sqrt{n}}}$，$\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1}=\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{\sqrt{n}}}$ から，

$-\dfrac{1}{2}<-\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+3}\leqq -\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{1}{2}<\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1}\leqq 1$ である。

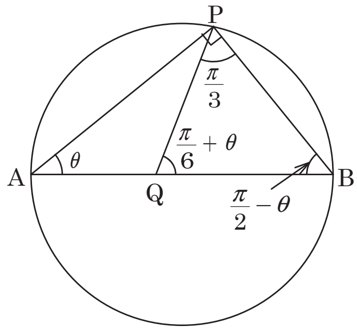
よって，⑥がすべての自然数 n に対して成立する条件は，$-\dfrac{1}{5}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$ となる。

［解　説］

与えられた方程式を定数分離して，グラフをイメージして解いています。その際，絶対値の取り扱いに注意が必要となります。

18

［東北大］



(1)　AB$=1$，BP$=x$ に対し，$\angle$PAB$=\theta$ とおくと，

$$\sin\theta=x\,,\ \cos\theta=\sqrt{1-x^2}$$

さて，$\angle\mathrm{BPQ}=\dfrac{\pi}{3}$ から，$\angle\mathrm{APQ}=\dfrac{\pi}{6}$ となり，

$$\angle\mathrm{PQB}=\frac{\pi}{6}+\theta,\ \angle\mathrm{PBQ}=\frac{\pi}{2}-\theta$$

PQ$=y$ から，△PQB に正弦定理を適用して，

$$\frac{y}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{x}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)}$$

よって，$y=\dfrac{x\cos\theta}{\sin\frac{\pi}{6}\cos\theta+\cos\frac{\pi}{6}\sin\theta}=\dfrac{2x\cos\theta}{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}=\dfrac{2x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{3}x}$

(2)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において, (1)より，$y=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{\sin\theta}+\dfrac{\sqrt{3}}{\cos\theta}}$

さて，$f(\theta)=\dfrac{1}{\sin\theta}+\dfrac{\sqrt{3}}{\cos\theta}$ とおくと，$y=\dfrac{2}{f(\theta)}$ となり，

$$f'(\theta)=-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}+\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{3}\sin^3\theta-\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

ここで，$\sqrt{3}\sin^3\alpha=\cos^3\alpha$ となる α をとると，$f(\theta)$ の増減は右表のようになり，$\theta=\alpha$ のとき $f(\theta)$ は最小となる。

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		$\searrow$		$\nearrow$	

すなわち，$\theta=\alpha$ で, y は最大となる。

このとき，$\sqrt{3}x^3=\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3$ から，$3x^6=(1-x^2)^3$ となり，

$$\sqrt[3]{3}x^2=1-x^2,\ (1+\sqrt[3]{3})x^2=1$$

したがって, y が最大となる x は，$x=\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt[3]{3}}}$ である。

［解 説］

正弦定理の応用です。ただ, (2)は計算の工夫が必要です。特に，$f(\theta)$ を設定する部分が重要で, 何回か微分に詰まって考えつきます。

$\boxed{19}$ ［岡山大］

(1) 点$(1,\ 2)$を通る傾きtの直線lは，$y-2=t(x-1)$，$y=tx-t+2$ ………①

また，原点を通り，lに垂直な直線は，$x+ty=0$ ………②

①②を連立して，$x+t(tx-t+2)=0$，$(t^2+1)x=t^2-2t$

$$x=\frac{t^2-2t}{t^2+1}\ \cdots\cdots\text{③},\quad y=\frac{t^3-2t^2}{t^2+1}-t+2=\frac{-t+2}{t^2+1}\ \cdots\cdots\text{④}$$

よって，①②の交点Pの座標は，$\mathrm{P}\left(\dfrac{t^2-2t}{t^2+1},\ \dfrac{-t+2}{t^2+1}\right)$となる。

(2) ③④で表される点Pの軌跡と2次曲線$2x^2-ay=0$……⑤を連立して，

$$2\left(\frac{t^2-2t}{t^2+1}\right)^2-a\cdot\frac{-t+2}{t^2+1}=0,\quad 2t^2(t-2)^2+a(t-2)(t^2+1)=0$$

$$(t-2)\{2t^3-4t^2+a(t^2+1)\}=0\ \cdots\cdots\text{⑥}$$

ここで，点Pの軌跡と曲線⑤が3点のみを共有する条件は，⑥が異なる実数解を3つだけもつことに対応する。ここで，$2t^3-4t^2+a(t^2+1)=0$……⑦が解$t=2$をもつときは$a=0$となり不適となり，⑦が$t\neq 2$である実数解を2つだけもつ条件を求めると，

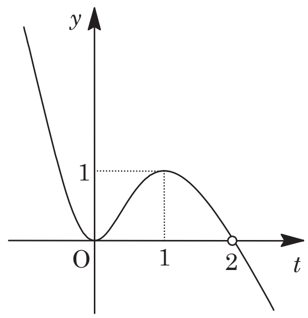
$$a=-\frac{2t^3-4t^2}{t^2+1}\ \cdots\cdots\text{⑧}$$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	↘	0	↗	1	↘

さて，$f(t)=-\dfrac{2t^3-4t^2}{t^2+1}$とおくと，

$$f'(t)=-\frac{(6t^2-8t)(t^2+1)-(2t^3-4t^2)\cdot 2t}{(t^2+1)^2}$$

$$=-\frac{2t^4+6t^2-8t}{(t^2+1)^2}=-\frac{2t(t-1)(t^2+t+4)}{(t^2+1)^2}$$



$\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=-\infty$，$\lim\limits_{t\to-\infty}f(t)=\infty$より，$y=f(t)$のグラフは右図のようになり，⑧が$t\neq 2$である2実数解をもつ条件は，$a=1$である。

このとき，⑦は，$2t^3-3t^2+1=0$，$(t-1)^2(2t+1)=0$となるので，⑥の実数解は，$t=2,\ 1,\ -\dfrac{1}{2}$となる。

すると，③④より，3つの共有点の座標は，$t=2$のとき$(x,\ y)=(0,\ 0)$，$t=1$のとき$(x,\ y)=\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，$t=-\dfrac{1}{2}$のとき$(x,\ y)=(1,\ 2)$である。

［解 説］

微分の応用問題です。なお，点Pの軌跡は，原点と点$(1,\ 2)$を直径の両端とする円(ただし点$(1,\ 0)$を除く)となり，tの値と点Pの位置は1対1に対応します。

$\boxed{20}$ ［東京工大］

$x>0$ において，$f(x)=e^x-x^e$ とおくと，

$$f'(x)=e^x-ex^{e-1}=e(e^{x-1}-x^{e-1})$$

ここで，$g_1(x)=e^{x-1}$，$g_2(x)=x^{e-1}$ とし，$F(x)=\log g_1(x)-\log g_2(x)$ とおくと，

$$F(x)=x-1-(e-1)\log x$$

$$F'(x)=1-\frac{e-1}{x}=\frac{x-(e-1)}{x}$$

x	0	$\cdots$	$e-1$	$\cdots$
$F'(x)$		$-$	0	$+$
$F(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

すると，$F(x)$ の値の増減は右表のようになり，$F(1)=F(e)=0$ に注意すると，$1<e-1<e$ から，$0<x<1$ または $e<x$ のとき $F(x)>0$，$1<x<e$ のとき $F(x)<0$ となる。

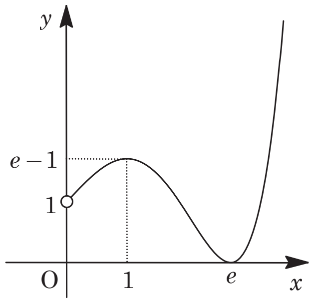
さらに，$f'(x)$ の符号と $F(x)$ の符号は一致することより，$f(x)$ の値の増減は右表のようになり，

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\nearrow$	$e-1$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$$\lim_{x\to+0}f(x)=1$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}(e^x-x^e)=\lim_{x\to\infty}e^x\left(1-\frac{x^e}{e^x}\right)=\infty$$

これより，$x>0$ における $y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，直線 $y=k$ との共有点の個数を調べると，方程式 $e^x-x^e=k$ の異なる正の解の個数は，



$k<0$ のとき 0 個

$k=0$，$k>e-1$ のとき 1 個

$0<k\leqq1$，$k=e-1$ のとき 2 個

$1<k<e-1$ のとき 3 個

［解 説］

微分の応用問題ですが，スムーズな処理を行うために，上の解答例では，対数をとりました。なお，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^e}{e^x}=0$ は，証明なしで利用しています。

21　　　　［東京大］

$f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$, $g(x)=\sin x+ax$ を連立すると，$\dfrac{\cos x}{x}=\sin x+ax$ より，

$$\frac{\cos x}{x^2}-\frac{\sin x}{x}=a\,,\ \ \frac{\cos x-x\sin x}{x^2}=a$$

さて，$h(x)=\dfrac{\cos x-x\sin x}{x^2}$ とおくと，$x>0$ において，$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフが共有点をちょうど 3 つもつ条件は，$y=h(x)$ のグラフと直線 $y=a$ が共有点をちょうど 3 つもつ条件に等しい。

$$h'(x)=\frac{(-\sin x-\sin x-x\cos x)x^2-(\cos x-x\sin x)\cdot 2x}{x^4}$$
$$=\frac{-x^2\cos x-2\cos x}{x^3}=-\frac{x^2+2}{x^3}\cos x$$

ここで，n を 0 以上の整数とすると，$h'(x)=0$ の解は，$x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ となり，

$$h\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{(-1)^n}{n\pi+\frac{\pi}{2}}=\frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi}$$

すると，$h(x)$ の増減は下表のようになり，

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	$\frac{5}{2}\pi$	$\cdots$	$\frac{7}{2}\pi$	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	∞	↘	$-\frac{2}{\pi}$	↗	$\frac{2}{3\pi}$	↘	$-\frac{2}{5\pi}$	↗	$\frac{2}{7\pi}$	↘

これから，$h(x)$ は n が偶数のとき負の極小値をもち，その値は n の値の増加に伴って増加する。また，n が奇数のとき正の極大値をもち，その値は n の値の増加に伴って減少する。

以上より，共有点をちょうど 3 つもつ条件は，

$$a=-\frac{2}{5\pi},\ \ \frac{2}{7\pi}<a<\frac{2}{3\pi}$$

［解 説］

定数分離によって，共有点の個数を調べるという頻出のタイプです。なお，解答例では $y=h(x)$ のグラフは記していませんが，下書きでは，しっかりと書いています。

$\boxed{22}$ ［千葉大］

(1)　$\dfrac{1}{4} \leqq x \leqq \dfrac{3}{4}$ において，$f(x)=x^x$，$g(x)=f(x)f(1-x)=x^x(1-x)^{1-x}$ とすると，

$$\log g(x)=\log x^x(1-x)^{1-x}=x\log x+(1-x)\log(1-x)$$

両辺を x で微分すると，

$$\frac{g'(x)}{g(x)}=\log x+\frac{x}{x}-\log(1-x)-\frac{1-x}{1-x}$$

$$=\log\frac{x}{1-x}$$

x	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗	

$g(x)>0$ から，$g(x)$ の増減は右表のようになり，その最大値は $\dfrac{\sqrt[4]{27}}{4}\left(x=\dfrac{1}{4},\ \dfrac{3}{4}\right)$，最小値は $\dfrac{1}{2}\left(x=\dfrac{1}{2}\right)$ である。

(2)　$\dfrac{1}{4} \leqq x \leqq \dfrac{3}{4}$ において，$h(x)=\dfrac{f(x)f(1-x)f(a)}{f(ax)f(a(1-x))}$ とすると，

$$h(x)=\frac{x^x(1-x)^{1-x}a^a}{(ax)^{ax}(a(1-x))^{a(1-x)}}=\frac{x^x(1-x)^{1-x}a^a}{a^{ax}x^{ax}a^{a(1-x)}(1-x)^{a(1-x)}}$$

$$=x^{x-ax}(1-x)^{1-x-a(1-x)}a^{a-ax-a(1-x)}=x^{x(1-a)}(1-x)^{(1-x)(1-a)}$$

$$=\{x^x(1-x)^{1-x}\}^{1-a}=\{g(x)\}^{1-a}$$

これより，$h(x)$ の最小値については，(1)より，

(i)　$1-a \geqq 0$ $(0<a \leqq 1)$ のとき　$x=\dfrac{1}{2}$ で最小値 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-a}$ をとる。

(ii)　$1-a<0$ $(a>1)$ のとき　$x=\dfrac{1}{4},\ \dfrac{3}{4}$ で最小値 $\left(\dfrac{\sqrt[4]{27}}{4}\right)^{1-a}$ をとる。

［解　説］

微分と増減の問題です。(2)は，一見，複雑そうですが，(1)の結果がうまく利用できるように作問されていました。

$\boxed{23}$ ［大阪大］

まず，$g(x)=t\cdot\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}+f(t)-1-x$ とおくと，条件より，$g(x)\geqq 0$ かつ $g(x)=0$ となる x が存在することになり，

$$g'(x)=t\cdot\frac{e^x-e^{-x}}{2}-1,\ \ g''(x)=t\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

すると，$t>0$ から $g''(x)>0$ となり，$g'(x)$ は単調に増加し，

$$\lim_{x\to-\infty}g'(x)=-\infty,\ \ \lim_{x\to\infty}g'(x)=\infty$$

よって，$g'(x)=0$ となる x がただ 1 つ存在し，これを $x=\alpha$ とおくと，$g(x)$ の増減は右表のようになり，条件より，$g(\alpha)=0$ である。

x	$\cdots$	α	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

さて，$g'(\alpha)=t\cdot\dfrac{e^\alpha-e^{-\alpha}}{2}-1=0$ より，

$$e^\alpha-e^{-\alpha}=\frac{2}{t},\ \ e^{2\alpha}-\frac{2}{t}e^\alpha-1=0,\ \ e^\alpha=\frac{1}{t}+\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}=\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}$$

すると，$g(\alpha)=t\cdot\dfrac{e^\alpha+e^{-\alpha}}{2}+f(t)-1-\alpha=0$ から，

$$\frac{t}{2}\Big(\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}+\frac{t}{1+\sqrt{1+t^2}}\Big)+f(t)-1-\log\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}=0$$

ここで，$\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}+\dfrac{t}{1+\sqrt{1+t^2}}=\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}+\dfrac{-1+\sqrt{1+t^2}}{t}=\dfrac{2\sqrt{1+t^2}}{t}$ より，

$$f(t)=-\frac{t}{2}\cdot\frac{2\sqrt{1+t^2}}{t}+1+\log\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}=1-\sqrt{1+t^2}+\log\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}$$

［解　説］

一見，難問風の問題設定ですが，誘導はなくてもスムーズに流れていきます。

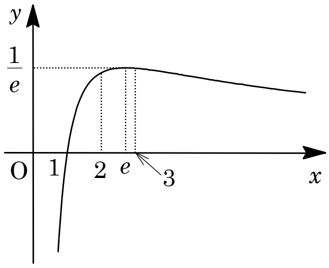
24　　　　［熊本大］

(1)　まず，$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}$$

すると，$f(x)$ の増減は右表のようになり，グラフの概形は右下図である。

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$	0



これより，正の実数 a, b, c について，

$$\frac{\log a}{a}+\frac{\log b}{b}+\frac{\log c}{c}\leqq\frac{1}{e}+\frac{1}{e}+\frac{1}{e}=\frac{3}{e}$$

$$\log 4-\frac{3}{e}=\frac{2e\log 2-3}{e}>\frac{2\times 2.7\times 0.6-3}{e}>0$$

よって，$\dfrac{3}{e}<\log 4$ から，$\dfrac{\log a}{a}+\dfrac{\log b}{b}+\dfrac{\log c}{c}<\log 4$

(2)　$a^{bc}b^{ca}c^{ab}=d^{abc}$　$(a\leqq b\leqq c\,,\ d\geqq 3)$に対して，$\log a^{bc}b^{ca}c^{ab}=\log d^{abc}$ から，

$$bc\log a+ca\log b+ab\log c=abc\log d\,,\ \ \frac{\log a}{a}+\frac{\log b}{b}+\frac{\log c}{c}=\log d$$

すると，(1)より $\log d<\log 4$ となり，d は 3 以上の整数より，$d=3$ である。

$$\frac{\log a}{a}+\frac{\log b}{b}+\frac{\log c}{c}=\log 3\quad(a\leqq b\leqq c)\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，(*)を満たす 1 組の整数解として，$(a,\ b,\ c)=(3,\ 3,\ 3)$ がある。

ここで，$f(3)-f(2)=\dfrac{\log 3}{3}-\dfrac{\log 2}{2}=\dfrac{\log 9-\log 8}{6}>0$ なので，

$$0=f(1)<f(2)<f(3)>f(4)>f(5)>\cdots\cdots$$

すると，$\dfrac{\log a}{a}+\dfrac{\log b}{b}+\dfrac{\log c}{c}\leqq f(3)+f(3)+f(3)=3\cdot\dfrac{\log 3}{3}=\log 3$ となり，等号が成立する，すなわち(*)を満たす整数解は，$(a,\ b,\ c)=(3,\ 3,\ 3)$ のみである。

［解　説］

(2)において，1 組の整数解はすぐに目視でわかりますので，それ以外には存在しないという形式で記しています。$f(x)$ のグラフが役に立ったわけです。

$\boxed{25}$ ［九州大］

n を 2 以上の自然数として，n 次関数 $f_n(x)$ に対して，

$$f_n(x)=(x-1)(2x-1)\cdots(nx-1)=n!(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(x-\frac{1}{n}\right)$$

すると，$f_n(1)=f_n\left(\frac{1}{2}\right)=\cdots=f_n\left(\frac{1}{n}\right)=0$ となり，平均値の定理より，$f_n{}'(c)=0$ を満たす c が各区間 $\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n-1}$，$\cdots$，$\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<x<1$ において，少なくとも 1 つずつ存在する。

また，$f_n{}'(x)$ は $n-1$ 次関数より，方程式 $f_n{}'(x)=0$ の実数解は，高々 $n-1$ 個である。

よって，$f_n{}'(c)=0$ を満たす c は，各区間 $\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n-1}$，$\cdots$，$\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<x<1$ において，1 つずつ存在することになる。

この c を $c=c_1$，c_2，$\cdots$，c_{n-1} $\left(\frac{1}{n}<c_{n-1}<\frac{1}{n-1}，\cdots，\frac{1}{3}<c_2<\frac{1}{2}，\frac{1}{2}<c_1<1\right)$ とおくと，$f_n{}'(x)$ の $n-1$ 次の係数は $n\cdot n!$ から，

$$f_n{}'(x)=n\cdot n!(x-c_1)(x-c_2)\cdots(x-c_{n-1})$$

これより，$f_n{}'(x)$ の符号は $x=c_k$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ の前後で変化する。

以上より，$f_n(x)$ は，区間 $\frac{1}{k+1}<x<\frac{1}{k}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ でただ 1 つの極値をとる。

［解 説］

グラフを対応させると，感覚的にはわかりますが，証明となると書きにくく，隔靴掻痒の感があります。

$\boxed{26}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京工大］

(1)　まず，$t>0$ のとき，$f(t)=e^t-1-te^{\frac{t}{2}}$ とおくと，

$$f'(t)=e^t-e^{\frac{t}{2}}-\frac{t}{2}e^{\frac{t}{2}}=\left(e^{\frac{t}{2}}-1-\frac{t}{2}\right)e^{\frac{t}{2}}$$

さらに，$g(t)=e^{\frac{t}{2}}-1-\dfrac{t}{2}$ とおくと，$g'(t)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{t}{2}}-1\right)$

すると，$t>0$ のとき，$g'(t)>0$ から $g(t)>g(0)=0$ となり，すなわち $f'(t)>0$ から，$f(t)>f(0)=0$ である。

よって，すべての $t>0$ に対して，不等式 $\dfrac{e^t-1}{t}\geqq e^{\frac{t}{2}}$ が成り立つ。

(2)　(1)と同様にして，$t>0$ のとき，$h(t)=e^t-1-te^{\frac{t}{a}}$ とおくと，

$$h'(t)=e^t-e^{\frac{t}{a}}-\frac{t}{a}e^{\frac{t}{a}}=\left(e^{\frac{a-1}{a}t}-1-\frac{t}{a}\right)e^{\frac{t}{a}}$$

$k(t)=e^{\frac{a-1}{a}t}-1-\dfrac{t}{a}$ とおくと，$k'(t)=\dfrac{a-1}{a}e^{\frac{a-1}{a}t}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{a-1}{a}\left(e^{\frac{a-1}{a}t}-\dfrac{1}{a-1}\right)$

さて，$a>1$ より，$\dfrac{1}{a-1}>0$，$\dfrac{a-1}{a}>0$ となり，

(i)　$0<\dfrac{1}{a-1}\leqq 1$　$(a\geqq 2)$ のとき

$t>0$ において，$k'(t)>0$ から $k(t)>k(0)=0$ となり，すなわち $h'(t)>0$ から，$h(t)>h(0)=0$ である。

よって，すべての $t>0$ に対して，不等式 $\dfrac{e^t-1}{t}\geqq e^{\frac{t}{a}}$ が成り立つ。

(ii)　$\dfrac{1}{a-1}>1$　$(1<a<2)$ のとき

$t>0$ において，$k'(t)=0$ となる t がただ 1 つ存在する。これを α とおくと $k(t)$ の増減は右表のようになり，$k(\alpha)<0$，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}k(t)=\infty$ から，$\alpha<\beta$ を満たすある β に対して，$k(\beta)=0$ となる。

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	∞
$k'(t)$		$-$	0	$+$	
$k(t)$	0	↘		↗	

すなわち，$h'(\beta)=0$ である。すると，$h(t)$ の増減は右表のようになり，すべての $t>0$ に対して $h(t)>0$，すなわち $\dfrac{e^t-1}{t}\geqq e^{\frac{t}{a}}$ は成立しない。

t	0	$\cdots$	β	$\cdots$
$h'(t)$		$-$	0	$+$
$h(t)$	0	↘		↗

(i)(ii)より，求める a の範囲は，$a\geqq 2$ である。

［解　説］

微分法の不等式への応用問題です。なお，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}k(t)=\infty$ は証明なしで用いています。