1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［九州大］

関数 $f(x)=\left|\left|\sin x-\frac{1}{2}\right|-\frac{1}{2}\right|$ を考える。ただし，$-\pi \leqq x \leqq \pi$ とする。さらに，$0 \leqq a \leqq \frac{\pi}{2}$ に対して，$F(a)=\int_0^a f(x) f\left(x-\frac{\pi}{2}\right) dx$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)=0$ となる x を求めよ。

(2)　関数 $y=f(x)$ のグラフの概形を描け。

(3)　$F(a)$ を求めよ。

$\boxed{2}$　　［東京大］

$x>0$ を定義域とする関数 $f(x)=\dfrac{12(e^{3x}-3e^{x})}{e^{2x}-1}$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=f(x)$ $(x>0)$ は，実数全体を定義域とする逆関数をもつことを示せ。すなわち，任意の実数 a に対して，$f(x)=a$ となる $x>0$ がただ 1 つ存在することを示せ。

(2)　前問(1)で定められた逆関数を $y=g(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ とする。このとき，定積分 $\displaystyle\int_{8}^{27} g(x)\,dx$ を求めよ。

3　　　　　　　　［東京工大］

以下の問いに答えよ。

(1)　自然数 n に対し $I(n)=\int_0^{\frac{n\pi}{2}}|\sin x|\,dx$ を求めよ。

(2)　次の不等式を示せ。

$$0 \leqq \int_0^{\frac{s\pi}{2}} \cos x\,dx - s \leqq \left(\frac{\pi}{2}-1\right)s \quad (0 \leqq s \leqq 1)$$

(3)　a を正の数とし，a を超えない最大の整数を $[\,a\,]$ で表す。$[\,a\,]$ が奇数のとき次の不等式が成り立つことを示せ。

$$0 \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin at|\,dt - 1 \leqq \left(\frac{\pi}{2}-1\right)\left(1-\frac{[\,a\,]}{a}\right)$$

4　　　［東京大］

以下の問いに答えよ。

(1)　$0<x<a$ を満たす実数 x, a に対し，次を示せ。

$$\frac{2x}{a}<\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}\,dt<x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)$$

(2)　(1)を利用して，次を示せ。

$$0.68<\log 2<0.71$$

ただし，$\log 2$ は 2 の自然対数とする。

5　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東北大］

$a>0$ に対し $I_0(a)=\int_0^a \sqrt{1+x}\,dx$，$I_n(a)=\int_0^a x^n\sqrt{1+x}\,dx$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とおく。

(1)　$\displaystyle\lim_{a\to\infty} a^{-\frac{3}{2}} I_0(a)$ を求めよ。

(2)　漸化式 $I_n(a)=\dfrac{2}{3+2n}a^n(1+a)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{2n}{3+2n}I_{n-1}(a)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を示せ。

(3)　自然数 n に対して，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} a^{-\left(\frac{3}{2}+n\right)} I_n(a)$ を求めよ。

6　　　　［岡山大］

a を 0 以上の実数, n を正の整数とするとき, 次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_0^a e^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n dx=\int_0^a e^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}dx+e^a-\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$ が成り立つことを示せ。

(2) $\displaystyle\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n-1}\leqq\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\leqq e^a$ が成り立つことを示せ。

(3) $\displaystyle e^a-\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\leqq\frac{a^2e^a}{2n}$ が成り立つことを示せ。

7　　［筑波大］

e は自然対数の底とする。$t>e$ において関数 $f(t)$，$g(t)$ を次のように定める。

$$f(t)=\int_1^e \frac{t^2\log x}{t-x}dx,\quad g(t)=\int_1^e \frac{x^2\log x}{t-x}dx$$

(1)　$f(t)-g(t)$ を t の 1 次式で表せ。

(2)　$1\leqq x\leqq e$ かつ $t>e$ のとき $\dfrac{1}{t-x}\leqq\dfrac{1}{t-e}$ が成り立つことを用いて，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}g(t)=0$ を示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left(f(t)-\frac{bt^2}{t-a}\right)=0$ となる定数 a, b を求めよ。

$\boxed{8}$　　［広島大］

次の問いに答えよ。ただし, n は自然数を表す。

(1)　$0 \leqq x \leqq 1$ を満たす実数 x に対して，不等式

$$\frac{x}{n+1} \leqq \log\left(1+\frac{x}{n}\right) \leqq \frac{x}{n}$$

が成り立つことを示せ。ただし，対数は自然対数とする。

(2)　次の値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5$$

(3)　数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \left(1+\frac{1^5}{n^6}\right)\left(1+\frac{2^5}{n^6}\right)\cdots\left(1+\frac{n^5}{n^6}\right)$$

で定めるとき，極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

9

［北海道大］

自然数 n に対して，$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{2n}\,dx$ とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) a_1 を求めよ。

(2) a_{n+1} を a_n で表せ。

(3) $\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

(4) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$ を求めよ。

10 ［広島大］

曲線 $y=e^x$ 上の点 A$(0,\ 1)$ における接線を l とし，点 B$(0,\ 2)$ を通り直線 l に平行な直線を m とする。直線 m と曲線 $y=e^x$ の 2 つの交点 P，Q の x 座標をそれぞれ α，β (ただし $\alpha<\beta$) とする。直線 $x=\alpha$ と直線 l の交点を P′，直線 $x=\beta$ と直線 l の交点を Q′ とする。次の問いに答えよ。

(1) 平行四辺形 PP′Q′Q の面積 S を α，β で表せ。

(2) 直線 m と曲線 $y=e^x$ によって囲まれる図形の面積 T を α，β の多項式で表せ。

(3) 線分 PQ の中点 R は第 2 象限にあることを示せ。

(4) $\alpha+\beta>-1$ であることを示せ。

11　［筑波大］

$f(x)$ を整式で表される関数とし，$g(x)=\int_0^x e^t f(t)\,dt$ とおく。任意の実数 x について，$x(f(x)-1)=2\int_0^x e^{-t}g(t)\,dt$ が成り立つとする。

(1)　$xf''(x)+(x+2)f'(x)-f(x)=1$ が成り立つことを示せ。

(2)　$f(x)$ は定数または 1 次式であることを示せ。

(3)　$f(x)$ および $g(x)$ を求めよ。

$\boxed{12}$ ［金沢大］

関数 $f(t)$ は区間 $[-1,\ 1]$ で連続で，偶関数，すなわち $f(-t)=f(t)$ であるとする。次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(t)\,dt=\int_{0}^{1} f(t)\,dt$ を示せ。

(2) 関数 $F(x)=-\displaystyle\int_{-1}^{1}|t-x|f(t)\,dt\quad(-1\leqq x\leqq 1)$ について

$$F'(x)=-\int_{-1}^{x} f(t)\,dt+\int_{x}^{1} f(t)\,dt,\ \ F''(x)=-2f(x)$$

を示せ。

(3) 関数 $f(x)$ は，さらに等式

$$f(x)=-\int_{-1}^{1}|t-x|f(t)\,dt\quad(-1\leqq x\leqq 1)$$

を満たすとする。このとき，$g(x)=f(x)-f(0)\cos\sqrt{2}x$ について

$$g(0)=g'(0)=0,\ \left(\frac{1}{2}\{g'(x)\}^2+g(x)^2\right)'=0$$

が成り立つことを示し，$f(x)=f(0)\cos\sqrt{2}x$ を示せ。

13　［大阪大］

関数 $f(x)=2\log(1+e^x)-x-\log 2$ を考える。ただし，対数は自然対数であり，e は自然対数の底とする。

(1)　$f(x)$ の第 2 次導関数を $f''(x)$ とする。等式 $\log f''(x)=-f(x)$ が成り立つことを示せ。

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\log 2}(x-\log 2)e^{-f(x)}dx$ を求めよ。

$\boxed{14}$ ［東京工大］

$f(x)=1-\cos x-x\sin x$ とする。

(1) $0<x<\pi$ において，$f(x)=0$ は唯一の解をもつことを示せ。

(2) $J=\int_0^{\pi}|f(x)|dx$ とする。(1)の唯一の解を α とするとき, J を $\sin\alpha$ の式で表せ。

(3) (2)で定義された J と $\sqrt{2}$ の大小を比較せよ。

15　　　　［熊本大］

関数 $f(x)=\int_{x}^{\frac{\pi}{4}-x} \log_4(1+\tan t)\,dt \quad \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{8}\right)$について，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2)　$f(0)$ の値を求めよ。

(3)　条件 $a_1=f(0)$，$a_{n+1}=f(a_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

16　　［筑波大］

n を自然数とし，1 から n までの自然数の積を $n!$ で表す。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　単調に増加する連続関数 $f(x)$ に対して，不等式 $\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leqq f(k)$ を示せ。

(2)　不等式 $\int_{1}^{n} \log x\,dx \leqq \log n!$ を示し，不等式 $n^n e^{1-n} \leqq n!$ を導け。

(3)　$x \geqq 0$ に対して，不等式 $x^n e^{1-x} \leqq n!$ を示せ。

17　　［東京大］

(1) すべての自然数 k に対して，次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{2(k+1)}<\int_0^1 \frac{1-x}{k+x}\,dx<\frac{1}{2k}$$

(2) $m>n$ であるようなすべての自然数 m と n に対して，次の不等式を示せ。

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}<\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}<\frac{m-n}{2mn}$$

18　　　　　　　　　　　　　　　　［京都大］

n 個のボールを $2n$ 個の箱へ投げ入れる。各ボールはいずれかの箱に入るものとし，どの箱に入る確率も等しいとする。どの箱にも 1 個以下のボールしか入っていない確率を p_n とする。このとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log p_n}{n}$ を求めよ。

$\boxed{\textbf{19}}$ ［北海道大］

$0<a<2\pi$ とする。$0<x<2\pi$ に対して，$F(x)=\displaystyle\int_x^{x+a}\sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta$ と定める。

(1)　$F'(x)$ を求めよ。

(2)　$F'(x)\leqq 0$ となる x の範囲を求めよ。

(3)　$F(x)$ の極大値および極小値を求めよ。

20 ［金沢大］

次の問いに答えよ。

(1)　自然数 n に対して，$\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx$ を求めよ。また，$\dfrac{1}{n+1}<\log(n+1)-\log n<\dfrac{1}{n}$ を示せ。

(2)　2 以上の自然数 n に対して，$\displaystyle\log(n+1)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<1+\log n$ を示せ。

(3)　2 以上の自然数 n に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{ee^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{3}}\cdots e^{\frac{1}{k}}}>\frac{1}{e}\log(n+1)$ を示せ。

21　　　　［神戸大］

n を 2 以上の自然数として，$S_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{n^3-1} \frac{1}{k\log k}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_n^{n^3} \frac{dx}{x\log x}$ を求めよ。

(2) k を 2 以上の自然数とするとき,

$$\frac{1}{(k+1)\log(k+1)} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{x\log x} < \frac{1}{k\log k}$$

を示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ の値を求めよ。

$\boxed{22}$ ［東京医歯大］

自然数 n に対し，

$$S_n=\int_0^1\frac{1-(-x)^n}{1+x}dx\ ,\ \ T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)}$$

とおく。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) 次の不等式を示せ。 $\left|S_n-\int_0^1\frac{1}{1+x}dx\right|\leqq\frac{1}{n+1}$

(2) T_n-2S_n を n を用いて表せ。

(3) 極限値 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n$ を求めよ。

23 ［長崎大］

曲線 $y=\log x$ の接線はつねにこの曲線の上側にあることを利用して，次の問いに答えよ。以下，k は自然数とする。

(1) 点 $\mathrm{A}_k(k,\ 0)$ を通り x 軸に垂直な直線と曲線 $y=\log x$ との交点を $\mathrm{A}_k{}'$ とし，$\mathrm{A}_k{}'$ におけるこの曲線の接線を l_k とする。また，$k\geqq 2$ のとき，$\mathrm{B}_k\left(k-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{C}_k\left(k+\dfrac{1}{2},\ 0\right)$を通り x 軸に垂直な直線と接線 l_k との交点をそれぞれ $\mathrm{B}_k{}'$，$\mathrm{C}_k{}'$ とする。四角形 $\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k\mathrm{C}_k{}'\mathrm{B}_k{}'$ の面積を求めよ。

(2) 次の 2 つの値の大小を比較せよ。

(ア) $\log k$ と $\displaystyle\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\log x\,dx$ （ただし，$k\geqq 2$）

(イ) $\dfrac{\log k+\log(k+1)}{2}$ と $\displaystyle\int_{k}^{k+1}\log x\,dx$ （ただし，$k\geqq 1$）

(3) $a_n=\log(n!)-\dfrac{1}{2}\log n$ とおくと，2 以上の自然数 n について，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\int_{\frac{3}{2}}^{n}\log x\,dx<a_n<\int_{1}^{n}\log x\,dx$$

(4) 2 以上の自然数 n について

$$U_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+\frac{3}{2}\left(1-\log\frac{3}{2}\right),\quad V_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+1$$

とおくとき，次の不等式を示せ。

$$U_n<\log(n!)<V_n$$

24　　［熊本大］

正の定数 a に対して，関数 $f(x)$ を，$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin t-ax\cos t|dt$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ を求めよ。

(2)　$f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。

25　［東京工大］

n を正の整数とする。数列 $\{a_k\}$ を

$$a_1 = \frac{1}{n(n+1)},\quad a_{k+1} = -\frac{1}{k+n+1} + \frac{n}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める。

(1)　a_2 および a_3 を求めよ。

(2)　一般項 a_k を求めよ。

(3)　$b_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k}$ とおくとき，$\lim_{n\to\infty} b_n = \log 2$ を示せ。

26　　［名古屋大］

$f_0(x)=xe^x$ として，正の整数 n に対して，

$$f_n(x)=\int_{-x}^{x} f_{n-1}(t)\,dt+f_{n-1}{}'(x)$$

により実数 x の関数 $f_n(x)$ を定める。

(1)　$f_1(x)$ を求めよ。

(2)　$g(x)=\displaystyle\int_{-x}^{x}(at+b)e^t\,dt$ とするとき，定積分 $\displaystyle\int_{-c}^{c} g(x)\,dx$ を求めよ。ただし，a，b，c は定数とする。

(3)　正の整数 n に対して，$f_{2n}(x)$ を求めよ。

27　［東京医歯大］

関数 $f(x)=x^3-x^2+x$ について，以下の各問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ はつねに増加する関数であることを示せ。

(2)　$f(x)$ の逆関数を $g(x)$ とおく。$x>0$ について，$\sqrt[3]{x}-1<g(x)<\sqrt[3]{x}+1$ が成立することを示せ。

(3)　$b>a>0$ について，$0<\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x^2+1}dx<\frac{1}{a}$ が成立することを示せ。

(4)　自然数 n について，(2)で定義された $g(x)$ を用いて

$$A_n=\int_n^{2n}\frac{1}{\{g(x)\}^3+g(x)}dx$$

とおくとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}A_n$ を求めよ。

28　　［新潟大］

微分可能な関数 $f(x)$ が，すべての実数 x, y に対して

$$f(x)f(y)-f(x+y)=\sin x\sin y$$

を満たし，さらに $f'(0)=0$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1)　$f(0)$ を求めよ。

(2)　関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(3)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{f(x)}$ を求めよ。

29　　［東京医歯大］

m, n を自然数として，関数 $f(x)=x^m(1-x)^n$ を考える。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$0 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最大値を m, n を用いて表せ。

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ を m, n を用いて表せ。

(3)　a, b, c を実数として，関数 $g(x)=ax^2+bx+c$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値を $M(a,\ b,\ c)$ とする。次の 2 条件(i), (ii)が成立するとき，$M(a,\ b,\ c)$ の最小値を m, n を用いて表せ。

(i)　$g(0)=g(1)=0$

(ii)　$0<x<1$ のとき $f(x) \leqq g(x)$

(4)　m, n が 2 以上の自然数で $m>n$ であるとき，$\dfrac{(m+n+1)!}{m!n!}>\dfrac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n}>2^{2n-1}$ が成立することを示せ。

30　　　　［千葉大］

$n,\ m$ を 0 以上の整数とし，$I_{n,\,m}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\sin^m\theta\,d\theta$ とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$n\geqq 2$ のとき，$I_{n,\,m}$ を $I_{n-2,\,m+2}$ を使って表せ。

(2)　次の式　$I_{2n+1,\,2m+1}=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx$ を示せ。

(3)　次の式　$\dfrac{n!m!}{(n+m+1)!}=\dfrac{{}_m\mathrm{C}_0}{n+1}-\dfrac{{}_m\mathrm{C}_1}{n+2}+\cdots+(-1)^m\dfrac{{}_m\mathrm{C}_m}{n+m+1}$ を示せ。ただし $0!=1$ とする。

$\boxed{31}$ ［大阪大］

$\displaystyle\sum_{n=1}^{40000} \frac{1}{\sqrt{n}}$ の整数部分を求めよ。

$\boxed{32}$ ［新潟大］

自然数 n に対して，$a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 + (-x^2)^{n+1}}{1+x^2}dx$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　自然数 n に対して，不等式 $\left|\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx - a_n\right| \leqq \frac{1}{2n+3}$ が成り立つことを示せ。

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$ を求めよ。

(3)　自然数 n に対して，$a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ となることを示せ。

(4)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ を求めよ。