1　　　　［九州大］

(1)　$f(x)=0$ より，$\left|\left|\sin x-\frac{1}{2}\right|-\frac{1}{2}\right|=0$，$\left|\sin x-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$，$\sin x-\frac{1}{2}=\pm\frac{1}{2}$

すると，$\sin x=1$，$\sin x=0$ から，$-\pi\leqq x\leqq\pi$ において，$x=\frac{\pi}{2}$，0，$\pm\pi$

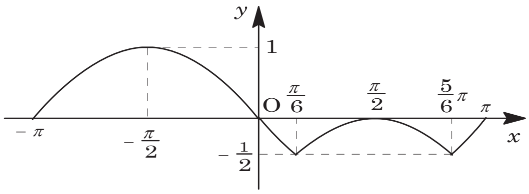
(2)　$g(x)=\left|\sin x-\frac{1}{2}\right|-\frac{1}{2}$ とおくと，

(i)　$-\pi\leqq x\leqq\frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi\leqq x\leqq\pi$ のとき　$g(x)=-\sin x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-\sin x$

(ii)　$\frac{\pi}{6}\leqq x\leqq\frac{5}{6}\pi$ のとき

$$g(x)=\sin x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$$
$$=\sin x-1$$

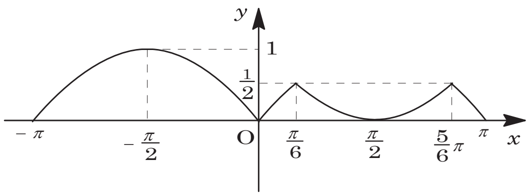
よって，$y=g(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。



すると，$f(x)=|g(x)|$ から，

$$f(x)=g(x)\quad(g(x)\geqq 0)$$
$$f(x)=-g(x)\quad(g(x)\leqq 0)$$

よって，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。



(3)　まず，$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{6}$ のとき $f(x)=\sin x$，$\frac{\pi}{6}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき $f(x)=-\sin x+1$

また，$y=f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ のグラフは，$y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に $\frac{\pi}{2}$ だけ平行移動したものであり，$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ においては，$f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$ となる。

(i)　$0\leqq a\leqq\frac{\pi}{6}$ のとき

$$F(a)=\int_0^a\sin x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\left[\ \sin^2 x\ \right]_0^a=\frac{1}{2}\sin^2 a$$

(ii)　$\frac{\pi}{6}\leqq a\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき

$$F(a)=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin x\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^a(-\sin x+1)\cos x\,dx$$
$$=\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\left[\ \sin^2 x\ \right]_{\frac{\pi}{6}}^a+\left[\ \sin x\ \right]_{\frac{\pi}{6}}^a=\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\left(\sin^2 a-\frac{1}{4}\right)+\sin a-\frac{1}{2}$$
$$=-\frac{1}{2}\sin^2 a+\sin a-\frac{1}{4}$$

［解 説］

絶対値つきの関数のグラフを描く問題です。丁寧な場合分けがすべてです。

$\boxed{2}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大］

(1)　$x>0$ のとき，$f(x)=\dfrac{12(e^{3x}-3e^{x})}{e^{2x}-1}$ に対して，

$$f'(x)=\frac{12(3e^{3x}-3e^{x})(e^{2x}-1)-12(e^{3x}-3e^{x})(2e^{2x})}{(e^{2x}-1)^2}=\frac{12(e^{5x}+3e^{x})}{(e^{2x}-1)^2}$$

すると，$f'(x)>0$ より，$f(x)$ は単調に増加する。

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{12(e^{3x}-3e^{x})}{e^{2x}-1}=-\infty$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{12(e^{3x}-3e^{x})}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{12(e^{x}-3e^{-x})}{1-e^{-2x}}=\infty$$

以上より，$x>0$ において，任意の実数 a に対して，$f(x)=a$ となる x がただ 1 つ存在する。

(2)　まず，$x=f(t)$ とおくと，$\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$ となる。

また，$f(t)=8$ とすると，$\dfrac{12(e^{3t}-3e^{t})}{e^{2t}-1}=8$ となり，

$$3e^{3t}-2e^{2t}-9e^{t}+2=0,\ (e^{t}-2)(3e^{2t}+4e^{t}-1)=0$$

ここで, $t>0$ より $e^{t}>1$ となり，$e^{t}=2$，$t=\log 2$ である。

同様に，$f(t)=27$ とすると，$\dfrac{12(e^{3t}-3e^{t})}{e^{2t}-1}=27$ となり，

$$4e^{3t}-9e^{2t}-12e^{t}+9=0,\ (e^{t}-3)(4e^{2t}+3e^{t}-3)=0$$

$e^{t}>1$ から，$e^{t}=3$，$t=\log 3$ である。

よって，
$$\begin{aligned}\int_8^{27}g(x)\,dx&=\int_{\log 2}^{\log 3}g(f(t))f'(t)\,dt=\int_{\log 2}^{\log 3}t\,f'(t)\,dt\\&=\Big[\,t\,f(t)\,\Big]_{\log 2}^{\log 3}-\int_{\log 2}^{\log 3}f(t)\,dt\\&=\log 3\cdot f(\log 3)-\log 2\cdot f(\log 2)-\int_{\log 2}^{\log 3}f(t)\,dt\\&=27\log 3-8\log 2-12\int_{\log 2}^{\log 3}\frac{e^{t}(e^{2t}-3)}{e^{2t}-1}\,dt\end{aligned}$$

さて，$u=e^{t}$ とおくと，$\dfrac{du}{dt}=e^{t}$ であり，$t=\log 2$ のとき $u=2$，$t=\log 3$ のとき $u=3$ となることより，

$$\begin{aligned}\int_{\log 2}^{\log 3}\frac{e^{t}(e^{2t}-3)}{e^{2t}-1}\,dt&=\int_2^3\frac{u^2-3}{u^2-1}\,du=\int_2^3\Big(1-\frac{2}{u^2-1}\Big)du\\&=\int_2^3\Big(1-\frac{1}{u-1}+\frac{1}{u+1}\Big)du=\Big[u+\log\Big|\frac{u+1}{u-1}\Big|\Big]_2^3\\&=1+\log 2-\log 3\end{aligned}$$

以上より，$\displaystyle\int_8^{27} g(x)\,dx = 27\log 3 - 8\log 2 - 12(1+\log 2 - \log 3)$

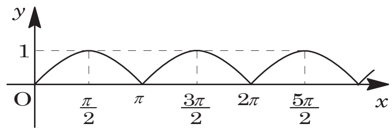
$$= -12 - 20\log 2 + 39\log 3$$

［解 説］

逆関数の定積分を題材とした重要問題です。過去にも，たとえば 1998 年に東北大で類題が出ています。

3　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京工大］

(1)　$f(x)=|\sin x|$ とおくと,



$$f(x+\pi)=|\sin(x+\pi)|$$
$$=|-\sin x|=f(x)$$

また, k を整数として,

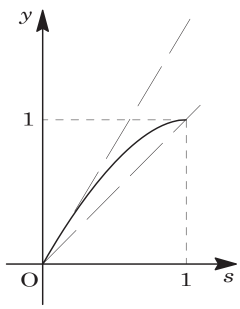
$$f(k\pi-x)=|\sin(k\pi-x)|=|\sin x|=f(x)$$

これより，$y=f(x)$ のグラフは周期 π であり，しかも直線 $x=\dfrac{k\pi}{2}$ に関して対称であるので,

$$I(n)=\int_0^{\frac{n\pi}{2}}|\sin x|dx=n\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|dx=n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=-n\Big[\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=n$$

(2)　$0\leqq s\leqq 1$ において，$g(s)=\displaystyle\int_0^{\frac{s\pi}{2}}\cos x\,dx=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{s\pi}{2}}=\sin\frac{s\pi}{2}$ とおく。

$$g'(s)=\frac{\pi}{2}\cos\frac{s\pi}{2}\geqq 0,\ \ g''(s)=-\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{s\pi}{2}\leqq 0$$



これより，$y=g(s)$ のグラフは，右図のように，上に凸で単調に増加し，$g'(0)=\dfrac{\pi}{2}$ から,

$$s\leqq g(s)\leqq\frac{\pi}{2}s,\ \ 0\leqq g(s)-s\leqq\left(\frac{\pi}{2}-1\right)s$$

よって，$0\leqq\displaystyle\int_0^{\frac{s\pi}{2}}\cos x\,dx-s\leqq\left(\frac{\pi}{2}-1\right)s\quad(0\leqq s\leqq 1)$

(3)　まず，$at=x$ とおくと,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin at|dt=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{a\pi}{2}}|\sin x|dx=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{[a]\pi}{2}}|\sin x|dx+\frac{1}{a}\int_{\frac{[a]\pi}{2}}^{\frac{a\pi}{2}}|\sin x|dx$$

ここで, (1)の結果を用いると,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin at|dt=\frac{[a]}{a}+\frac{1}{a}\int_{\frac{[a]\pi}{2}}^{\frac{a\pi}{2}}|\sin x|dx\cdots\cdots\cdots①$$

さて，$x-\dfrac{[a]\pi}{2}=u$ とおくと，$[a]$が奇数より,

$$\frac{1}{a}\int_{\frac{[a]\pi}{2}}^{\frac{a\pi}{2}}|\sin x|dx=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{a-[a]}{2}\pi}\left|\sin\left(u+\frac{[a]\pi}{2}\right)\right|du=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{a-[a]}{2}\pi}|\cos u|du$$

$0\leqq\dfrac{a-[a]}{2}\pi<\dfrac{\pi}{2}$ から,

$$\frac{1}{a}\int_{\frac{[a]\pi}{2}}^{\frac{a\pi}{2}}|\sin x|dx=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{a-[a]}{2}\pi}\cos u\,du\cdots\cdots\cdots②$$

さらに，$0\leqq a-[a]<1$ なので, (2)より,

$$a-[\,a\,] \leqq \int_0^{\frac{a-[\,a\,]}{2}\pi} \cos x\,dx \leqq \left(\frac{\pi}{2}-1\right)(a-[\,a\,])+(a-[\,a\,])$$

$$1-\frac{[\,a\,]}{a} \leqq \frac{1}{a}\int_0^{\frac{a-[\,a\,]}{2}\pi} \cos x\,dx \leqq \left(\frac{\pi}{2}-1\right)\left(1-\frac{[\,a\,]}{a}\right)+\left(1-\frac{[\,a\,]}{a}\right)\cdots\cdots\cdots③$$

①②③より，

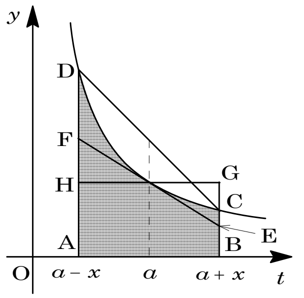
$$\frac{[\,a\,]}{a}+1-\frac{[\,a\,]}{a} \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin at|\,dt \leqq \frac{[\,a\,]}{a}+\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\left(1-\frac{[\,a\,]}{a}\right)+\left(1-\frac{[\,a\,]}{a}\right)$$

以上より，$0 \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin at|\,dt-1 \leqq \left(\frac{\pi}{2}-1\right)\left(1-\frac{[\,a\,]}{a}\right)$

［解 説］

グラフを見ながら解いています。(1)と(2)は直接的ですが, (3)もグラフを対応させて方針を立てました。つまり，$y=f(x)$ のグラフの特徴から，$[\,a\,]$が奇数という条件の利用方法を考えたわけです。

4　　　　［東京大］



(1)　$y=\dfrac{1}{t}$ に対して，$y'=-\dfrac{1}{t^2}$，$y''=\dfrac{2}{t^3}$ となり，$t>0$ において，曲線 $y=\dfrac{1}{t}$ は下に凸で単調に減少する。

このため，曲線上の点における接線は曲線の下側にあり，曲線上の 2 点を結ぶ線分は曲線の上側にある。

ここで，$0<x<a$ より，$0<a-x<a<a+x$ において，右図から，

$$\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}dt>(\text{台形 FABE})=(\text{長方形 HABG})$$

$$\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}dt>\frac{1}{a}\cdot 2x=\frac{2x}{a}\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\displaystyle\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}dt<(\text{台形 ABCD})$より，

$$\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}dt<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)\cdot 2x=x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\displaystyle\frac{2x}{a}<\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}dt<x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)\cdots\cdots\cdots③$

(2)　まず，$\displaystyle\log 2=\int_1^2\frac{1}{t}dt=\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{1}{t}dt+\int_{\frac{3}{2}}^2\frac{1}{t}dt\cdots\cdots\cdots④$

③において，$a=\dfrac{5}{4}$，$x=\dfrac{1}{4}$ とすると，$\displaystyle\frac{2}{5}<\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{1}{t}dt<\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}+1\right)=\frac{5}{12}\cdots\cdots\cdots⑤$

また，$a=\dfrac{7}{4}$，$x=\dfrac{1}{4}$ とすると，$\displaystyle\frac{2}{7}<\int_{\frac{3}{2}}^2\frac{1}{t}dt<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)=\frac{7}{24}\cdots\cdots\cdots⑥$

④⑤⑥より，

$$\frac{24}{35}=\frac{2}{5}+\frac{2}{7}<\log 2<\frac{5}{12}+\frac{7}{24}=\frac{17}{24}$$

さらに，$\dfrac{24}{35}>0.685>0.68$，$\dfrac{17}{24}<0.709<0.71$ に注意すると，

$$0.68<\log 2<0.71$$

［解　説］

(2)では，まず $\dfrac{a+x}{a-x}=2$ すなわち $a=3x$ として計算しましたが，$\dfrac{2}{3}<\log 2<\dfrac{3}{4}$ しか示せず，「やはり」という感じがしました。そこで，考え直したのが上の解です。

5　［東北大］

(1)　$I_0(a)=\int_0^a \sqrt{1+x}\,dx=\frac{2}{3}\left[(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a=\frac{2}{3}\left\{(1+a)^{\frac{3}{2}}-1\right\}$より，

$$\lim_{a\to\infty} a^{-\frac{3}{2}} I_0(a)=\frac{2}{3}\lim_{a\to\infty}\left\{\left(\frac{1+a}{a}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}=\frac{2}{3}$$

(2)　$I_n(a)=\int_0^a x^n\sqrt{1+x}\,dx=\frac{2}{3}\left[x^n(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a-\frac{2}{3}n\int_0^a x^{n-1}(1+x)^{\frac{3}{2}}dx$

$$=\frac{2}{3}a^n(1+a)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}n\int_0^a x^{n-1}(1+x)\sqrt{1+x}\,dx$$

$$=\frac{2}{3}a^n(1+a)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}n\left\{I_{n-1}(a)+I_n(a)\right\}$$

すると，$\frac{3+2n}{3}I_n(a)=\frac{2}{3}a^n(1+a)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}nI_{n-1}(a)$より，

$$I_n(a)=\frac{2}{3+2n}a^n(1+a)^{\frac{3}{2}}-\frac{2n}{3+2n}I_{n-1}(a)$$

(3)　$a^{-\left(\frac{3}{2}+n\right)}I_n(a)=\frac{2}{3+2n}a^{-\frac{3}{2}}(1+a)^{\frac{3}{2}}-\frac{2n}{3+2n}a^{-\left(\frac{3}{2}+n\right)}I_{n-1}(a)$

$$=\frac{2}{3+2n}\left(\frac{1+a}{a}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{2n}{3+2n}\cdot\frac{I_{n-1}(a)}{a^{\frac{3}{2}+n}}\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，$0\leqq x\leqq a$において，$f(x)=x^n\sqrt{1+x}$は単調に増加することより，

$$0\leqq x^n\sqrt{1+x}\leqq a^n\sqrt{1+a}$$

これより，$0\leqq\int_0^a x^n\sqrt{1+x}\,dx\leqq\int_0^a a^n\sqrt{1+a}\,dx=a^{n+1}\sqrt{1+a}$となり，

$$0\leqq I_{n-1}(a)\leqq a^n\sqrt{1+a}$$

すると，$0\leqq\frac{I_{n-1}(a)}{a^{\frac{3}{2}+n}}\leqq\sqrt{\frac{1+a}{a^3}}=\sqrt{\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^2}}$となり，$a\to\infty$のとき$\frac{I_{n-1}(a)}{a^{\frac{3}{2}+n}}\to 0$

よって，(*)から，$\lim_{a\to\infty}a^{-\left(\frac{3}{2}+n\right)}I_n(a)=\frac{2}{3+2n}$

［解 説］

(3)は(2)の漸化式を誘導として考えるのが筋でしょうが，この式を変形する方法は思いつきません。そこで，直接的に$I_n(a)$を評価し，$\lim_{a\to\infty}a^{-\left(\frac{3}{2}+n\right)}I_n(a)$を考えましたが，うまくいきません。ただ，$\lim_{a\to\infty}a^{-\left(\frac{3}{2}+n\right)}I_{n-1}(a)$であれば極限値が求まるという発見は，その直後でした。

$\boxed{6}$　［岡山大］

(1)　部分積分を用いて,

$$\int_0^a e^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n dx = -\left[e^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]_0^a + \int_0^a e^{a-x}\, n\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}dx$$

$$= -\left(1+\frac{a}{n}\right)^n + e^a + \int_0^a e^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}dx$$

$$= \int_0^a e^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}dx + e^a - \left(1+\frac{a}{n}\right)^n \cdots\cdots\cdots ①$$

(2)　$a \geqq 0,\ n \geqq 1$ より，$1+\dfrac{a}{n} \geqq 1$ となり，$\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^{n-1} \leqq \left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n \cdots\cdots\cdots ②$

また，①より，$e^a - \left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n = \displaystyle\int_0^a e^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n dx - \int_0^a e^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}dx$

$$= \int_0^a e^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}\left(1+\frac{x}{n}-1\right)dx$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^a xe^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}dx \geqq 0 \cdots\cdots\cdots ③$$

②③より，$\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^{n-1} \leqq \left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n \leqq e^a \cdots\cdots\cdots ④$

(3)　④より, $0 \leqq x \leqq a$ において，$\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{n-1} \leqq e^x$ となり，

$$\frac{1}{n}\int_0^a xe^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}dx \leqq \frac{1}{n}\int_0^a xe^{a-x}e^x dx = \frac{e^a}{n}\int_0^a x\,dx = \frac{a^2e^a}{2n}$$

よって，③から，$e^a - \left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n \leqq \dfrac{a^2e^a}{2n}$

［解 説］

定積分と不等式の証明問題です。細かく付いた誘導に従えば，式変形の方向を見失うことはないでしょう。

7　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［筑波大］

(1)　$f(t)-g(t)=\int_1^e \frac{t^2-x^2}{t-x}\log x\,dx=\int_1^e (t+x)\log x\,dx=t\int_1^e \log x\,dx+\int_1^e x\log x\,dx$

$$=t\Big[x\log x-x\Big]_1^e+\Big[\frac{x^2}{2}\log x\Big]_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e x^2\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=t\{e-(e-1)\}+\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\int_1^e x\,dx=t+\frac{e^2}{2}-\frac{1}{4}(e^2-1)=t+\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}$$

(2)　$1\leqq x\leqq e$ かつ $t>e$ のとき，$0<\frac{1}{t-x}\leqq\frac{1}{t-e}$ より，

$$0<\int_1^e \frac{x^2\log x}{t-x}dx\leqq\int_1^e \frac{x^2\log x}{t-e}dx=\frac{1}{t-e}\int_1^e x^2\log x\,dx$$

ここで，$\int_1^e x^2\log x\,dx=k>0$ とおくと，$0<g(t)\leqq\frac{k}{t-e}$ となる。

すると, $t\to\infty$のとき $\frac{k}{t-e}\to 0$ なので，$\lim_{t\to\infty}g(t)=0$ である。

(3)　(1)より，$f(t)-\frac{bt^2}{t-a}=g(t)+t+\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}-\frac{bt^2}{t-a}$

$$=g(t)+t+\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}-\left(bt+ab+\frac{a^2b}{t-a}\right)$$

$$=g(t)+(1-b)t+\frac{1}{4}(e^2+1)-ab-\frac{a^2b}{t-a}$$

$t\to\infty$のとき，$g(t)\to 0$，$\frac{a^2b}{t-a}\to 0$ より，$\lim_{t\to\infty}\left(f(t)-\frac{bt^2}{t-a}\right)$が有限な値となるために必要な条件は,

$1-b=0$，$b=1$

このとき，$\lim_{t\to\infty}\left(f(t)-\frac{bt^2}{t-a}\right)=\lim_{t\to\infty}\left\{g(t)+\frac{1}{4}(e^2+1)-a-\frac{a^2}{t-a}\right\}=0$ より，

$\frac{1}{4}(e^2+1)-a=0$，$a=\frac{1}{4}(e^2+1)$

［解　説］

(2)の k の値を計算すると，$\frac{1}{9}(2e^3+1)$ となりますが，この値は，ここでは必要ありません。

8　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［広島大］

(1) $0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)=\log\left(1+\dfrac{x}{n}\right)-\dfrac{x}{n+1}$ とおく。

$$f'(x)=\frac{1}{n+x}-\frac{1}{n+1}=\frac{1-x}{(n+1)(n+x)}\geqq 0$$

よって，$f(x)\geqq f(0)=0$

また, $0\leqq x\leqq 1$ において，$g(x)=\dfrac{x}{n}-\log\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$ とおく。

$$g'(x)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}=\frac{x}{n(n+x)}\geqq 0$$

よって，$g(x)\geqq g(0)=0$

以上より, $0\leqq x\leqq 1$ において，$\dfrac{x}{n+1}\leqq\log\left(1+\dfrac{x}{n}\right)\leqq\dfrac{x}{n}$

(2) 区間 $0\leqq x\leqq 1$ を n 等分して,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5=\int_0^1 x^5dx=\frac{1}{6}$$

(3) $a_n=\left(1+\dfrac{1^5}{n^6}\right)\left(1+\dfrac{2^5}{n^6}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n^5}{n^6}\right)$ のとき,

$$\log a_n=\log\left(1+\frac{1^5}{n^6}\right)+\log\left(1+\frac{2^5}{n^6}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{n^5}{n^6}\right)=\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k^5}{n^6}\right)$$

ここで，$x=\left(\dfrac{k}{n}\right)^5$ とおくと, $0\leqq x\leqq 1$ となり, (1)より,

$$\frac{1}{n+1}\left(\frac{k}{n}\right)^5\leqq\log\left(1+\frac{k^5}{n^6}\right)\leqq\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5,\quad \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5\leqq\log a_n\leqq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5$$

(2)より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5=1\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$ なので,

$$\lim_{n\to\infty}\log a_n=\frac{1}{6}$$

すると，対数関数は定義域で連続であることより，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=e^{\frac{1}{6}}$ となる。

［解　説］

基本的で，しかも頻出するタイプの融合問題です。しかも，(3)への誘導が，無理のない形になっており，演習する価値のある 1 題です。

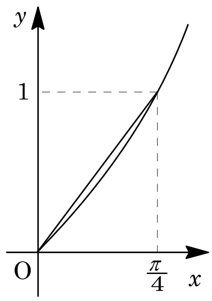
$\boxed{9}$ ［北海道大］

(1) $a_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\Big[\tan x-x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}$

(2) $a_{n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n+2}x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n}x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n}x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n}x\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2n+1}\tan^{2n+1}x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-a_n=\frac{1}{2n+1}-a_n\ \cdots\cdots\cdots①$$



(3) $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$ において，曲線 $y=\tan x$ は下に凸なので，

$$0\leqq\tan x\leqq\frac{4}{\pi}x\,,\quad 0\leqq\tan^{2n}x\leqq\left(\frac{4}{\pi}\right)^{2n}x^{2n}\ \cdots\cdots\cdots②$$

②を 0 から $\frac{\pi}{4}$ まで積分すると，$0\leqq a_n\leqq\left(\frac{4}{\pi}\right)^{2n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^{2n}dx$

$$0\leqq a_n\leqq\left(\frac{4}{\pi}\right)^{2n}\left[\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2n+1}\left(\frac{4}{\pi}\right)^{2n}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}=\frac{\pi}{4(2n+1)}$$

すると, $n\to\infty$ のとき $\frac{\pi}{4(2n+1)}\to 0$ より，$\lim_{n\to\infty}a_n=0$

(4) ①の両辺に $(-1)^{n+2}$ をかけると，

$$(-1)^{n+2}a_{n+1}=-(-1)^{n+2}a_n+\frac{(-1)^{n+2}}{2n+1}=(-1)^{n+1}a_n+\frac{(-1)^{n+2}}{2n+1}$$

$n\geqq 2$ において，$(-1)^{n+1}a_n=(-1)^2a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+2}}{2k+1}=1-\frac{\pi}{4}+\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$

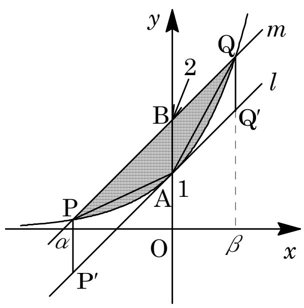
$$(-1)^{n+1}a_n=1-\frac{\pi}{4}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}-\frac{(-1)^2}{1}=-\frac{\pi}{4}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$$

以上より, (3)から，$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}=\lim_{n\to\infty}\left\{(-1)^{n+1}a_n+\frac{\pi}{4}\right\}=\frac{\pi}{4}$

［解 説］

細かい詰めがやや面倒ですが，(4)の設問にある有名な級数の値を求める問題です。なお, (2)と(3)の設問は並列で，両者の結果が(4)に繋がるという解法をとっています。

$\boxed{10}$ ［広島大］



(1)　平行四辺形PP′Q′Qの面積Sは,

$$S=1\times(\beta-\alpha)=\beta-\alpha$$

(2)　$y=e^x$ ……①より，$y'=e^x$ となり，A(0, 1)における接線 l の方程式は，$y=x+1$ となる。

また，B(0, 2)を通り l に平行な直線 m は,

$$y=x+2\ \cdots\cdots\cdots ②$$

①②を連立して，$e^x=x+2$

この方程式の2つの解が $x=\alpha$，β より,

$$e^\alpha=\alpha+2\ \cdots\cdots\cdots ③,\quad e^\beta=\beta+2\ \cdots\cdots\cdots ④$$

さて，直線 m と曲線 $y=e^x$ によって囲まれる図形の面積 T は,

$$T=\int_\alpha^\beta (x+2-e^x)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}+2x-e^x\right]_\alpha^\beta=\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)+2(\beta-\alpha)-(e^\beta-e^\alpha)$$

③④より，$e^\beta-e^\alpha=(\beta+2)-(\alpha+2)=\beta-\alpha$ となり,

$$T=\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)+2(\beta-\alpha)-(\beta-\alpha)=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(\alpha+\beta+2)$$

(3)　$T<S$ より，$\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(\alpha+\beta+2)<\beta-\alpha$ となり，$\beta-\alpha>0$ から,

$$\alpha+\beta+2<2,\quad \frac{\alpha+\beta}{2}<0$$

これより，線分PQの中点 $\mathrm{R}\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{e^\alpha+e^\beta}{2}\right)$ は，第2象限にある。

(4)　$y=e^x$ に対し，$y''=e^x>0$ から，曲線は下に凸になるので,

$$T>\triangle \mathrm{APQ}=\frac{1}{2}S$$

よって，$\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(\alpha+\beta+2)>\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$ から,

$$\alpha+\beta+2>1,\quad \alpha+\beta>-1$$

［解 説］

面積を比較して不等式を証明する問題です。ぜひ演習しておいてほしい一題です。

11　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［筑波大］

(1)　条件より，$x\left(f(x)-1\right)=2\int_0^x e^{-t}g(t)\,dt$ ………①

①の両辺を x で微分すると，

$$f(x)-1+xf'(x)=2e^{-x}g(x),\quad e^x\left(f(x)-1+xf'(x)\right)=2g(x)\text{ ………②}$$

②の両辺を x で微分すると，条件から $g'(x)=e^xf(x)$ なので，

$$e^x\left(f(x)-1+xf'(x)\right)+e^x\left(f'(x)+f'(x)+xf''(x)\right)=2e^xf(x)$$

よって，$f(x)-1+xf'(x)+2f'(x)+xf''(x)=2f(x)$ より，

$$xf''(x)+(x+2)f'(x)-f(x)=1\text{ ………③}$$

(2)　$f(x)$ を n 次の整式とし，x^n の係数を $a(\neq 0)$ とおく。ただし, $n\geqq 2$ とする。

すると，$f'(x)$ は $n-1$ 次，$f''(x)$ は $n-2$ 次の整式となる。

そこで, ③の両辺の x^n の係数を比較すると,

$$na-a=0$$

よって，$n=1$ から不適となり，これより $f(x)$ は定数または 1 次式である。

(3)　まず，$g(x)=0$ であり，②の両辺に $x=0$ を代入すると,

$$f(0)-1=0,\quad f(0)=1$$

(2)の結論を合わせると，$f(x)=px+1$ とおくことができ，③より,

$$p(x+2)-(px+1)=1$$

よって，$p=1$ から，$f(x)=x+1$ となり,

$$g(x)=\int_0^x e^t(t+1)\,dt=\left[e^t(t+1)\right]_0^x-\int_0^x e^t\,dt=e^x(x+1)-1-\left[e^t\right]_0^x$$

$$=e^x(x+1)-1-e^x+1=xe^x$$

［解　説］

積分方程式の問題です。(2)の設問のような，ていねいな誘導のため，見かけよりは解きやすくなっています。

12　　　　［金沢大］

(1)　$s=-t$ とおくと，$\dfrac{ds}{dt}=-1$ であり，$t=-1\to 0$ のとき $s=1\to 0$ となる。

また，$f(t)$ は区間 $[-1,\ 1]$ で連続で，$f(-t)=f(t)$ が成り立つので，

$$\int_{-1}^{0} f(t)\,dt=\int_{1}^{0} f(-s)(-ds)=\int_{0}^{1} f(-s)\,ds=\int_{0}^{1} f(s)\,ds=\int_{0}^{1} f(t)\,dt$$

(2)　$-1\leqq x\leqq 1$ のとき，条件より，

$$F(x)=-\int_{-1}^{1}|t-x|f(t)\,dt=-\int_{-1}^{x}-(t-x)f(t)\,dt-\int_{x}^{1}(t-x)f(t)\,dt$$

$$=\int_{-1}^{x} tf(t)\,dt-x\int_{-1}^{x} f(t)\,dt-\int_{x}^{1} tf(t)\,dt+x\int_{x}^{1} f(t)\,dt$$

$$F'(x)=xf(x)-\int_{-1}^{x} f(t)\,dt-xf(x)+xf(x)+\int_{x}^{1} f(t)\,dt-xf(x)$$

$$=-\int_{-1}^{x} f(t)dt+\int_{x}^{1} f(t)dt$$

$$F''(x)=-f(x)-f(x)=-2f(x)$$

(3)　条件より，$f'(x)=-\displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\,dt+\int_{x}^{1} f(t)\,dt$ ……①，$f''(x)=-2f(x)$ ……②

さて，$g(x)=f(x)-f(0)\cos\sqrt{2}x$ に対して，

$$g'(x)=f'(x)+\sqrt{2}f(0)\sin\sqrt{2}x\,,\quad g''(x)=f''(x)+2f(0)\cos\sqrt{2}x$$

すると，$g(0)=f(0)-f(0)\cos 0=0$，$g'(0)=f'(0)+\sqrt{2}f(0)\sin 0=f'(0)$

(1)と①から，$f'(0)=-\displaystyle\int_{-1}^{0} f(t)\,dt+\int_{0}^{1} f(t)\,dt=0$ となり，$g'(0)=0$

さらに，$G(x)=\dfrac{1}{2}\{g'(x)\}^2+g(x)^2$ とおき，②を利用すると，

$$G'(x)=\left(\frac{1}{2}\{g'(x)\}^2+g(x)^2\right)'=g'(x)g''(x)+2g(x)g'(x)$$

$$=g'(x)\left\{f''(x)+2f(0)\cos\sqrt{2}x+2f(x)-2f(0)\cos\sqrt{2}x\right\}$$

$$=g'(x)\{f''(x)+2f(x)\}=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

③より, C を定数として，$G'(x)=C$，$\dfrac{1}{2}\{g'(x)\}^2+g(x)^2=C$

さらに，$g(0)=g'(0)=0$ から，$C=0$ となり，

$$\frac{1}{2}\{g'(x)\}^2+g(x)^2=0$$

そこで，$\{g'(x)\}^2\geqq 0$，$g(x)^2\geqq 0$ から，$g'(x)=g(x)=0$ となり，

$$f(x)-f(0)\cos\sqrt{2}x=0\,,\quad f(x)=f(0)\cos\sqrt{2}x$$

［解　説］

ていねいな誘導つきの微分方程式の解を求める問題です。

$\boxed{13}$ ［大阪大］

(1) $f(x)=2\log(1+e^x)-x-\log 2$ に対して，$f'(x)=\dfrac{2e^x}{1+e^x}-1$ となり，

$$f''(x)=\frac{2e^x(1+e^x)-2e^x\cdot e^x}{(1+e^x)^2}=\frac{2e^x}{(1+e^x)^2}$$

よって，$\log f''(x)=\log 2e^x-2\log(1+e^x)=-2\log(1+e^x)+x+\log 2=-f(x)$

(2) $I=\displaystyle\int_0^{\log 2}(x-\log 2)e^{-f(x)}dx$ とし, (1)の結果を適用すると,

$$I=\int_0^{\log 2}(x-\log 2)e^{\log f''(x)}dx=\int_0^{\log 2}(x-\log 2)f''(x)\,dx$$
$$=\Big[(x-\log 2)f'(x)\Big]_0^{\log 2}-\int_0^{\log 2}f'(x)\,dx=(\log 2)f'(0)-\Big[f(x)\Big]_0^{\log 2}$$
$$=-f(\log 2)+f(0)=-2\log 3+\log 2+\log 2+(2\log 2-\log 2)$$
$$=-2\log 3+3\log 2=\log\frac{8}{9}$$

［解 説］

定積分の計算問題です。(1)の誘導によって，方針は自然に決まります。

14　　［東京工大］

(1)　$f(x)=1-\cos x-x\sin x$ に対して，

$$f'(x)=\sin x-\sin x-x\cos x=-x\cos x$$

$0<x<\pi$ において，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$f(x)=0$ は唯一の解をもつ。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	2

(2)　$f(x)=0$ の解を $x=\alpha$ とすると，$1-\cos\alpha=\alpha\sin\alpha$ ………(＊)

$$J=\int_0^{\pi}|f(x)|dx=\int_0^{\alpha}-f(x)\,dx+\int_{\alpha}^{\pi}f(x)\,dx$$

ここで，$F(x)=\int f(x)\,dx$ とおくと，

$$F(x)=\int(1-\cos x-x\sin x)\,dx=x-\sin x+x\cos x-\int\cos x\,dx$$
$$=x-2\sin x+x\cos x+C$$

よって, (＊)を用いると,

$$J=-\Big[F(x)\Big]_0^{\alpha}+\Big[F(x)\Big]_{\alpha}^{\pi}=F(0)+F(\pi)-2F(\alpha)$$
$$=-2\alpha+4\sin\alpha-2\alpha\cos\alpha=-2\cdot\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}(1+\cos\alpha)+4\sin\alpha$$
$$=-2\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha}+4\sin\alpha=2\sin\alpha$$

(3)　(1)より，$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ であるが,

$$f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=1+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3}{4}\pi\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}+1-\frac{3}{4}\pi\right)>\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1.4+1-\frac{3}{4}\times3.2\right)=0$$

これより，$\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3}{4}\pi$ となり，

$$J=2\sin\alpha>2\sin\frac{3}{4}\pi=\sqrt{2}$$

［解　説］

微積分の標準的な問題です。誘導も細かく付けられています。

15　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［熊本大］

(1)　$f(x)=\int_{x}^{\frac{\pi}{4}-x}\log_4(1+\tan t)\,dt$ $\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{8}\right)$に対して,

$$f'(x)=-\log_4\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)-\log_4(1+\tan x)$$

ここで, $1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}=\frac{2}{1+\tan x}$ より,

$$f'(x)=-\log_4\frac{2}{1+\tan x}-\log_4(1+\tan x)=-\log_4\frac{2(1+\tan x)}{1+\tan x}=-\log_4 2$$

$$=-\log_4 4^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$$

(2)　(1)より, C を定数として, $f(x)=-\frac{1}{2}x+C$

さて, $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}}\log_4(1+\tan t)\,dt=0$ より, $-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{8}+C=0$ となり $C=\frac{\pi}{16}$ から,

$$f(0)=C=\frac{\pi}{16}$$

(3)　$a_1=f(0)=\frac{\pi}{16}$, $a_{n+1}=f(a_n)=-\frac{1}{2}a_n+\frac{\pi}{16}$ より,

$$a_{n+1}-\frac{\pi}{24}=-\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{\pi}{24}\right)$$

これより, $a_n-\frac{\pi}{24}=\left(\frac{\pi}{16}-\frac{\pi}{24}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{\pi}{48}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ となり,

$$a_n=\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{48}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

［解 説］

底が 4 の対数というのは, 見た目と異なり配慮の結果でした。なお, (2)は誘導なしですが, この設問の出来が最も重要です。

$\boxed{16}$ ［筑波大］

(1)　$f(x)$ は単調増加する連続関数なので，$k-1 \leqq x \leqq k$ において，$f(x) \leqq f(k)$

$$\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leqq \int_{k-1}^{k} f(k)\,dx = f(k)\int_{k-1}^{k} dx = f(k)$$

(2)　$x>0$ で $f(x)=\log x$ とおくと，$f(x)$ は単調増加する連続関数なので, (1)から,

$$\int_{k-1}^{k} \log x\,dx \leqq \log k \cdots\cdots\cdots ①$$

$n \geqq 2$ のとき，①の両辺を，$k=2$ から $k=n$ まで和をとると，

$$\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k} \log x\,dx \leqq \sum_{k=2}^{n}\log k$$

$$\int_{1}^{n} \log x\,dx \leqq \log 2+\log 3+\cdots+\log n = \log(2\times 3\times\cdots\times n) = \log n! \cdots\cdots\cdots ②$$

なお, ②は $n=1$ のときも成立している。

さて, ②の左辺は,

$$\int_{1}^{n} \log x\,dx = \Big[\,x\log x - x\,\Big]_{1}^{n} = n\log n - n + 1 = \log n^n + \log e^{1-n} = \log n^n e^{1-n}$$

これより, ②は，$n^n e^{1-n} \leqq n!$ となる。

(3)　$x \geqq 0$ において，$g(x)=x^n e^{1-x}-n!$ とおくと，

$$g'(x) = nx^{n-1}e^{1-x} - x^n e^{1-x} = x^{n-1}e^{1-x}(n-x)$$

x	0	$\cdots$	n	$\cdots$
$g'(x)$	0	＋	0	－
$g(x)$		↗		↘

$g(x)$ の増減は右表のようになり, (2)より,

$$g(n) = n^n e^{1-n} - n! \leqq 0$$

よって, $x \geqq 0$ において，$g(x) \leqq 0$ すなわち $x^n e^{1-x} \leqq n!$ である。

［解　説］

至れり尽くせりというぐらい，誘導が非常に細かくついている不等式への応用問題です。

17　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大］

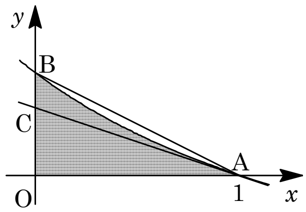
(1)　自然数 k に対して，$f(x)=\dfrac{1-x}{k+x}=-1+\dfrac{k+1}{k+x}$ とおくと，$0\leqq x\leqq 1$ において，

$$f'(x)=-\frac{k+1}{(k+x)^2}<0,\quad f''(x)=\frac{2(k+1)}{(k+x)^3}>0$$

これより，$f(x)$ は単調に減少し，曲線 $y=f(x)$ は下に凸となる。

ここで，$y=f(x)$ と x 軸，y 軸との交点を，それぞれ

$A(1,\ 0)$，$B\left(0,\ \dfrac{1}{k}\right)$とおく。



また，点 A における接線は，

$$y=-\frac{k+1}{(k+1)^2}(x-1)=-\frac{1}{k+1}(x-1)$$

この接線と y 軸の交点を C とすると，$C\left(0,\ \dfrac{1}{k+1}\right)$

となる。

そこで，面積を比較して，$\triangle OAC<\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx<\triangle OAB$ より，

$$\frac{1}{2(k+1)}<\int_0^1\frac{1-x}{k+x}dx<\frac{1}{2k}\ \cdots\cdots\cdots①$$

(2)　まず，$\displaystyle\int_0^1\frac{1-x}{k+x}dx=\int_0^1\left(-1+\frac{k+1}{k+x}\right)dx=\Big[-x+(k+1)\log(k+x)\Big]_0^1$

$$=-1+(k+1)\{\log(k+1)-\log k\}=-1+(k+1)\log\frac{k+1}{k}$$

すると，①より，$\dfrac{1}{2(k+1)}<-1+(k+1)\log\dfrac{k+1}{k}<\dfrac{1}{2k}$ となり，

$$\frac{1}{2(k+1)^2}<-\frac{1}{k+1}+\log\frac{k+1}{k}<\frac{1}{2k(k+1)}$$

ここで，$\dfrac{1}{2(k+1)(k+2)}<\dfrac{1}{2(k+1)^2}$ より，

$$\frac{1}{2(k+1)(k+2)}<-\frac{1}{k+1}+\log\frac{k+1}{k}<\frac{1}{2k(k+1)}\ \cdots\cdots\cdots②$$

②において，$k=n$ から $k=m-1$ までの和をとると，

$$\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2(k+1)(k+2)}<\sum_{k=n}^{m-1}\left(-\frac{1}{k+1}+\log\frac{k+1}{k}\right)<\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2k(k+1)}\ \cdots\cdots\cdots③$$

すると，$\displaystyle\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2(k+1)(k+2)}=\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+1}\right)$

$$=\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}$$

$$\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2k(k+1)}=\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)=\frac{m-n}{2mn}$$

また，$\displaystyle\sum_{k=n}^{m-1}\left(-\frac{1}{k+1}+\log\frac{k+1}{k}\right)=-\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{k+1}+\sum_{k=n}^{m-1}\{\log(k+1)-\log k\}$

$$=-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}+\log m-\log n=\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}$$

よって，③より，$\displaystyle\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}<\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}<\frac{m-n}{2mn}$

［解　説］

凸関数のグラフの性質を用いて，(1)の不等式の証明をしています。$f(x)$のグラフを描くと，三角形との関係が見えてきます。(2)も，一癖ある設問です。

$\boxed{18}$ ［京都大］

まず, n 個のボールを $2n$ 個の箱へ投げ入れる $(2n)^n$ 通りの場合が同様に確からしいとする。

このとき, どの箱にも 1 個以下のボールしか入っていない場合は, ${}_{2n}\mathrm{P}_n$ 通りあるので, その確率 p_n は,

$$p_n = \frac{{}_{2n}\mathrm{P}_n}{(2n)^n} = \frac{1}{2^n}\cdot\frac{2n}{n}\cdot\frac{2n-1}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-n+2}{n}\cdot\frac{2n-n+1}{n}$$

$$= \frac{1}{2^n}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n+n-1}{n}\cdot\frac{n+n}{n}$$

$$= \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\left(1+\frac{n}{n}\right)$$

すると, $\log p_n = \log\frac{1}{2^n} + \log\left(1+\frac{1}{n}\right) + \log\left(1+\frac{2}{n}\right) + \cdots + \log\left(1+\frac{n-1}{n}\right) + \log\left(1+\frac{n}{n}\right)$

となり,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log p_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{-n\log 2 + \sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)\right\} = -\log 2 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$= -\log 2 + \int_0^1 \log(1+x)\,dx = -\log 2 + \Big[(1+x)\log(1+x)\Big]_0^1 - \int_0^1 dx$$

$$= -\log 2 + 2\log 2 - 1 = \log 2 - 1$$

［解 説］

出題頻度が高いとは言えませんが, ときどき見かける確率と区分求積の融合問題です。演習必須の 1 題です。

$\boxed{19}$ ［北海道大］

(1)　$f(\theta)=\sqrt{1-\cos\theta}$ とおくと，$F(x)=\displaystyle\int_x^{x+a} f(\theta)d\theta$ となり，

$$F'(x)=f(x+a)-f(x)=\sqrt{1-\cos(x+a)}-\sqrt{1-\cos x}$$

(2)　$F'(x)\leqq 0$ より，$\sqrt{1-\cos(x+a)}\leqq\sqrt{1-\cos x}$ となり，両辺を 2 乗して，

$$1-\cos(x+a)\leqq 1-\cos x\,,\ \cos(x+a)-\cos x\geqq 0\,,\ -2\sin\frac{2x+a}{2}\sin\frac{a}{2}\geqq 0$$

ここで，$0<a<2\pi$ より，$\sin\dfrac{a}{2}>0$ であるので，$\sin\dfrac{2x+a}{2}\leqq 0\cdots\cdots\cdots(*)$

すると，$0<x<2\pi$ から $\dfrac{a}{2}<\dfrac{2x+a}{2}<2\pi+\dfrac{a}{2}$ となり，$0<\dfrac{a}{2}<\pi$ に留意して，$(*)$を満たす x の範囲を求めると，

$$\pi\leqq\frac{2x+a}{2}\leqq 2\pi\,,\ \pi-\frac{a}{2}\leqq x\leqq 2\pi-\frac{a}{2}$$

(3)　$F(x)=\displaystyle\int_x^{x+a}\sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta=\int_x^{x+a}\sqrt{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta=\sqrt{2}\int_x^{x+a}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|d\theta$

ここで，$\dfrac{\theta}{2}=\varphi$ とおくと，$d\theta=2d\varphi$ となり，$F(x)=2\sqrt{2}\displaystyle\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{x+a}{2}}|\sin\varphi|d\varphi$

さて，(2)より $F(x)$ の増減は右表のようになり，$F(x)$ は $x=\pi-\dfrac{a}{2}$ のとき極大，$x=2\pi-\dfrac{a}{2}$ のとき極小となる。

x	0	$\cdots$	$\pi-\frac{a}{2}$	$\cdots$	$2\pi-\frac{a}{2}$	$\cdots$	2π
$F'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$F(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

極大値は，$F\left(\pi-\dfrac{a}{2}\right)=2\sqrt{2}\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{a}{4}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{a}{4}}|\sin\varphi|d\varphi=4\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{a}{4}}\sin\varphi d\varphi$

$$=-4\sqrt{2}\Big[\cos\varphi\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{a}{4}}=-4\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{a}{4}\right)=4\sqrt{2}\sin\frac{a}{4}$$

極小値は，$F\left(2\pi-\dfrac{a}{2}\right)=2\sqrt{2}\displaystyle\int_{\pi-\frac{a}{4}}^{\pi+\frac{a}{4}}|\sin\varphi|d\varphi=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{a}{4}}\sin\varphi d\varphi$

$$=-4\sqrt{2}\Big[\cos\varphi\Big]_0^{\frac{a}{4}}=4\sqrt{2}\left(1-\cos\frac{a}{4}\right)$$

［解 説］

定積分の計算問題です。(1)と(2)の誘導に従えば，方針に迷うことはありません。なお，極大値と極小値の計算では，三角関数の周期性を利用しています。

$\boxed{20}$ ［金沢大］

(1) まず，$\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx=\Big[\log x\Big]_n^{n+1}=\log(n+1)-\log n$

ここで，自然数 n に対し，$n\leqq x\leqq n+1$ のとき，$\dfrac{1}{n+1}\leqq\dfrac{1}{x}\leqq\dfrac{1}{n}$ となり，

$$\frac{1}{n+1}\int_n^{n+1}dx<\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{n}\int_n^{n+1}dx\ ,\ \ \frac{1}{n+1}<\log(n+1)-\log n<\frac{1}{n}$$

(2) 2 以上の自然数 n に対して, (1)より,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}>\sum_{k=1}^{n}\{\log(k+1)-\log k\}=\log(n+1)-\log 1=\log(n+1)\ \cdots\cdots\cdots①$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}<\sum_{k=1}^{n-1}\{\log(k+1)-\log k\}=\log n-\log 1=\log n\ \cdots\cdots\cdots②$$

②の両辺に 1 を加えると，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}<1+\log n\ \cdots\cdots\cdots③$

①③より，$\displaystyle\log(n+1)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<1+\log n$

(3) (2)より, 2 以上の自然数 n に対して，③より，

$$ee^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{3}}\cdots e^{\frac{1}{n}}=e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}<e^{1+\log n}=en$$

さらに，①を適用して，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{ee^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{3}}\cdots e^{\frac{1}{k}}}>\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{ek}=\frac{1}{e}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}>\frac{1}{e}\log(n+1)$$

［解　説］

有名問題です。ただ，丁寧すぎる誘導がついています。

21　　［神戸大］

(1) $\displaystyle\int_n^{n^3}\frac{dx}{x\log x}=\int_n^{n^3}\frac{1}{\log x}\cdot\frac{1}{x}dx=\Big[\log|\log x|\Big]_n^{n^3}=\log|3\log n|-\log|\log n|$

$\displaystyle=\log\left|\frac{3\log n}{\log n}\right|=\log 3$ ………①

(2) $x>1$ において，$f(x)=\dfrac{1}{x\log x}$ とおくと，$f'(x)=-\dfrac{\log x+1}{(x\log x)^2}<0$

これより，$k\geqq 2$ のとき，$k\leqq x\leqq k+1$ において，$f(k+1)\leqq f(x)\leqq f(k)$ となり，

$$\frac{1}{(k+1)\log(k+1)}\leqq\frac{1}{x\log x}\leqq\frac{1}{k\log k}$$

この不等式の各辺を k から $k+1$ まで積分すると，$\displaystyle\int_k^{k+1}dx=1$ から，

$$\frac{1}{(k+1)\log(k+1)}<\int_k^{k+1}\frac{dx}{x\log x}<\frac{1}{k\log k}\text{ ………②}$$

(3) ②の各辺を n から n^3-1 まで和をとると，

$$\sum_{k=n}^{n^3-1}\frac{1}{(k+1)\log(k+1)}<\sum_{k=n}^{n^3-1}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x\log x}<\sum_{k=n}^{n^3-1}\frac{1}{k\log k}$$

$S_n=\displaystyle\sum_{k=n}^{n^3-1}\frac{1}{k\log k}$ より，$\displaystyle\sum_{k=n}^{n^3-1}\frac{1}{(k+1)\log(k+1)}=S_n-\frac{1}{n\log n}+\frac{1}{n^3\log n^3}$ となり，

$$S_n-\frac{1}{n\log n}+\frac{1}{n^3\log n^3}<\int_n^{n^3}\frac{dx}{x\log x}<S_n\text{ ………③}$$

①③より，$\log 3<S_n<\log 3+\dfrac{1}{n\log n}-\dfrac{1}{n^3\log n^3}$

以上より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\log 3$

［解　説］

はさみうちの原理を利用して極限値を求める問題ですが，方針に迷うことがないよう，たいへん丁寧な誘導がついています。

22　　　　［東京医歯大］

(1)　$I_n=\left|S_n-\int_0^1\frac{1}{1+x}dx\right|=\left|\int_0^1\frac{1-(-x)^n}{1+x}dx-\int_0^1\frac{1}{1+x}dx\right|$ とおくと，

$$I_n=\left|\int_0^1\frac{1-(-x)^n-1}{1+x}dx\right|=\left|(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx\right|=\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx$$

ここで，$0\leqq x\leqq 1$ において，$\frac{x^n}{1+x}\leqq x^n$ となるので，

$$I_n\leqq\int_0^1 x^n\,dx=\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$$

(2)　$S_n=\int_0^1\frac{1-(-x)^n}{1+x}dx=\int_0^1\left\{1-x+x^2-x^3+\cdots+(-x)^{n-1}\right\}dx$

$$=\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right]_0^1=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

また，$T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$ より，

$$T_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1+2\left\{-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right\}-(-1)^{n-1}\frac{1}{n+1}$$

よって，$T_n-2S_n=-1-(-1)^{n-1}\frac{1}{n+1}=-1+(-1)^n\frac{1}{n+1}$

(3)　(1)より，$n\to\infty$ のとき，$I_n\to 0$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\left[\log(1+x)\right]_0^1=\log 2$$

(2)より，$T_n=2S_n-1+(-1)^n\frac{1}{n+1}$ なので，

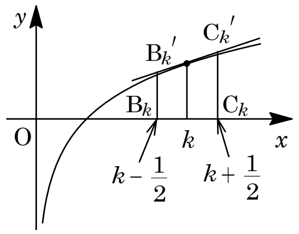
$$\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}\left\{2S_n-1+(-1)^n\frac{1}{n+1}\right\}=2\log 2-1$$

［解 説］

定積分と級数について，過去に類題がかなり出ている有名問題です。要演習の 1 題です。

$\boxed{23}$ ［長崎大］

(1)　$y=\log x$ に対して $y'=\dfrac{1}{x}$ となり，点 $\mathrm{A}_k{}'(k,\ \log k)$ における接線 l_k の方程式は,



$$y-\log k=\frac{1}{k}(x-k),\quad y=\frac{1}{k}x-1+\log k$$

$x=k\pm\dfrac{1}{2}$ のとき，複号同順で

$$y=\frac{1}{k}\left(k\pm\frac{1}{2}\right)-1+\log k=\pm\frac{1}{2k}+\log k$$

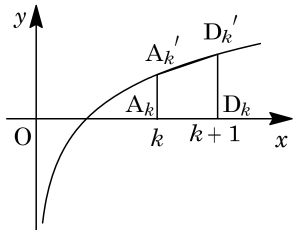
よって，$\mathrm{B}_k{}'\left(k-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2k}+\log k\right)$，$\mathrm{C}_k{}'\left(k+\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2k}+\log k\right)$となる。

以上より，四角形 $\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k\mathrm{C}_k{}'\mathrm{B}_k{}'$ の面積 S_k は,

$$S_k=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2k}+\log k+\frac{1}{2k}+\log k\right)\times1=\log k$$

(2)　$k\geqq2$ のとき，$S_k>\displaystyle\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\log x\,dx$ なので, (1)より，$\log k>\displaystyle\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\log x\,dx$ ………①

$k\geqq1$ のとき，$\mathrm{D}_k(k+1,\ 0)$，$\mathrm{D}_k{}'(k+1,\ \log(k+1))$ とおくと，四角形 $\mathrm{A}_k\mathrm{D}_k\mathrm{D}_k{}'\mathrm{A}_k{}'$ の面積は,



$$\frac{1}{2}\left\{\log k+\log(k+1)\right\}\times1=\frac{\log k+\log(k+1)}{2}$$

さて，曲線 $y=\log x$ は上に凸であるので,

$$\frac{\log k+\log(k+1)}{2}<\int_k^{k+1}\log x\,dx\ \text{………②}$$

(3)　$n\geqq2$ のとき，まず，①より，$\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\log k>\sum_{k=2}^{n}\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\log x\,dx$ となり,

$$\log2+\log3+\cdots+\log n=\log(n!)>\int_{\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\log x\,dx$$

両辺から $\dfrac{1}{2}\log n$ を引いて,

$$a_n=\log(n!)-\frac{1}{2}\log n>\int_{\frac{3}{2}}^{n}\log x\,dx+\int_n^{n+\frac{1}{2}}\log x\,dx-\frac{1}{2}\log n$$

ここで，$y=\log x$ は増加関数なので，$\displaystyle\int_n^{n+\frac{1}{2}}\log x\,dx>\int_n^{n+\frac{1}{2}}\log n\,dx=\frac{1}{2}\log n$

よって，$\displaystyle\int_n^{n+\frac{1}{2}}\log x\,dx-\frac{1}{2}\log n>0$ から，$a_n>\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{n}\log x\,dx$ ………③

また，②より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\log k+\log(k+1)}{2}<\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\log x\,dx$ となり,

$$\frac{\log 1+\log 2}{2}+\cdots+\frac{\log(n-1)+\log n}{2}=\sum_{k=2}^{n}\log k-\frac{1}{2}\log n<\int_1^n \log x\,dx$$

よって，$a_n=\log(n!)-\frac{1}{2}\log n=\sum_{k=2}^{n}\log k-\frac{1}{2}\log n<\int_1^n \log x\,dx$ ………④

③④より，$\int_{\frac{3}{2}}^{n}\log x\,dx<a_n<\int_1^n \log x\,dx$ ………⑤

(4)　⑤より，$\int_{\frac{3}{2}}^{n}\log x\,dx+\frac{1}{2}\log n<\log(n!)<\int_1^n \log x\,dx+\frac{1}{2}\log n$ となり，

$$\int_{\frac{3}{2}}^{n}\log x\,dx+\frac{1}{2}\log n=\left[\,x\log x-x\,\right]_{\frac{3}{2}}^{n}+\frac{1}{2}\log n$$

$$=n\log n-\frac{3}{2}\log\frac{3}{2}-n+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\log n$$

$$=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+\frac{3}{2}\left(1-\log\frac{3}{2}\right)=U_n$$

$$\int_1^n \log x\,dx+\frac{1}{2}\log n=\left[\,x\log x-x\,\right]_1^n+\frac{1}{2}\log n=n\log n-n+1+\frac{1}{2}\log n$$

$$=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+1=V_n$$

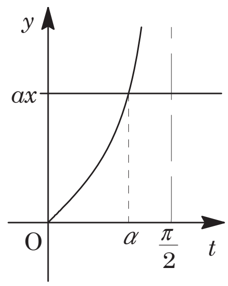
以上より，$U_n<\log(n!)<V_n$ が成立する。

［解 説］

凸関数の性質を利用した不等式の証明問題です。誘導が非常に丁寧です。

$\boxed{24}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［熊本大］

(1)　$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin t-ax\cos t|dt$ に対して，$0\leqq t<\dfrac{\pi}{2}$ では，$\sin t-ax\cos t=\cos t(\tan t-ax)$ と変形すると，$a>0$ より $x>0$ のとき $\sin\alpha-ax\cos\alpha=0$ となる α が $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ に 1 つ存在する。なお，$t=\dfrac{\pi}{2}$ では，$\sin t-ax\cos t=1>0$ である。



(i)　$x>0$ のとき

$$f(x)=\int_0^{\alpha}-(\sin t-ax\cos t)dt+\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}(\sin t-ax\cos t)dt$$

$$=\Big[\cos t+ax\sin t\Big]_0^{\alpha}-\Big[\cos t+ax\sin t\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\cos\alpha+ax\sin\alpha-1-ax+\cos\alpha+ax\sin\alpha$$

$$=2ax\sin\alpha+2\cos\alpha-ax-1$$

ここで，$\sin\alpha=ax\cos\alpha$ より，$(ax\cos\alpha)^2+\cos^2\alpha=1$ より，

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{a^2x^2+1}},\quad \sin\alpha=\frac{ax}{\sqrt{a^2x^2+1}}$$

よって，$f(x)=\dfrac{2a^2x^2}{\sqrt{a^2x^2+1}}+\dfrac{2}{\sqrt{a^2x^2+1}}-ax-1=2\sqrt{a^2x^2+1}-ax-1$

(ii)　$x\leqq 0$ のとき

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t-ax\cos t)dt=-\Big[\cos t+ax\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=-ax+1$$

(2)　$x\leqq 0$ のときは $f'(x)=-a<0$ から $f(x)$ は単調に減少し，$x>0$ のとき，

$$f'(x)=\frac{4a^2x}{2\sqrt{a^2x^2+1}}-a$$

$$=\frac{a\left(2ax-\sqrt{a^2x^2+1}\right)}{\sqrt{a^2x^2+1}}$$

$$=\frac{a\left(3a^2x^2-1\right)}{\sqrt{a^2x^2+1}\left(2ax+\sqrt{a^2x^2+1}\right)}$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\searrow$		$\nearrow$

すると，$f(x)$ は増減が右上表のようになり，$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}a}$ で最小となる。最小値は，

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}a}\right)=2\sqrt{a^2\cdot\frac{1}{3a^2}+1}-a\cdot\frac{1}{\sqrt{3}a}-1=\frac{4}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}-1=\sqrt{3}-1$$

［解 説］

絶対値付きの関数を積分する標準的な問題ですが，計算力が必要です。

25　　　　［東京工大］

(1)　条件より，$a_1=\dfrac{1}{n(n+1)}$，$a_{k+1}=-\dfrac{1}{k+n+1}+\dfrac{n}{k}\displaystyle\sum_{i=1}^{k}a_i$ なので，

$$a_2=-\frac{1}{1+n+1}+\frac{n}{1}\cdot a_1=-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$a_3=-\frac{1}{2+n+1}+\frac{n}{2}\cdot(a_1+a_2)=-\frac{1}{n+3}+\frac{n}{2}\left\{\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

$$=-\frac{1}{n+3}+\frac{n}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=-\frac{1}{n+3}+\frac{n}{2}\cdot\frac{2}{n(n+2)}$$

$$=-\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+2}=\frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

(2)　(1)より，$a_k=\dfrac{1}{(n+k-1)(n+k)}$ ……①と予測できるので，以下，数学的帰納法を用いて，①を証明する。

(i)　$k=1$ のとき　①は明らかに成立している。

(ii)　$k\leqq l$ のとき　①が成立していると仮定すると，

$$a_{l+1}=-\frac{1}{l+n+1}+\frac{n}{l}\sum_{i=1}^{l}a_i=-\frac{1}{l+n+1}+\frac{n}{l}(a_1+a_2+\cdots+a_l)$$

$$=-\frac{1}{l+n+1}+\frac{n}{l}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+l-1}-\frac{1}{n+l}\right)$$

$$=-\frac{1}{l+n+1}+\frac{n}{l}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+l}\right)=-\frac{1}{n+l+1}+\frac{1}{n+l}=\frac{1}{(n+l)(n+l+1)}$$

(i)(ii)より，すべての自然数 k で，$a_k=\dfrac{1}{(n+k-1)(n+k)}$ である。

(3)　(2)より，$\dfrac{1}{(n+k)^2}<a_k<\dfrac{1}{(n+k-1)^2}$ となり，$\dfrac{1}{n+k}<\sqrt{a_k}<\dfrac{1}{n+k-1}$ から，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k-1},\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}<b_n<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k-1}\ \cdots\cdots ②$$

すると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\big[\log(1+x)\big]_0^1=\log 2$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k-1}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\log 2$$

よって，②より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\log 2$ である。

［解 説］

(2)は，いわゆる強化型の数学的帰納法です。(3)は，不等式で評価をして，区分求積法につなぐものです。どちらも，一癖ある典型題です。

$\boxed{26}$ ［名古屋大］

(1)　$f_0(x)=xe^x$ より，$f_0{}'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$ となり，

$$f_1(x)=\int_{-x}^{x} te^t\,dt+(1+x)e^x=\Big[\,te^t-e^t\,\Big]_{-x}^{x}+(1+x)e^x$$
$$=(x-1)e^x-(-x-1)e^{-x}+(1+x)e^x=2xe^x+(x+1)e^{-x}$$

(2)　$g(x)=\displaystyle\int_{-x}^{x}(at+b)e^t dt=\Big[\,(at+b)e^t\,\Big]_{-x}^{x}-a\int_{-x}^{x}e^t\,dt$
$$=(ax+b)e^x-(-ax+b)e^{-x}-ae^x+ae^{-x}$$
$$=(ax-a+b)e^x+(ax+a-b)e^{-x}$$

すると，$g(-x)=(-ax-a+b)e^{-x}+(-ax+a-b)e^x=-g(x)$ となり，$u=-x$ とおくと，

$$\int_{-c}^{c}g(x)dx=\int_{-c}^{c}-g(-x)dx=\int_{c}^{-c}-g(u)(-du)=-\int_{-c}^{c}g(u)du$$

よって，$\displaystyle\int_{-c}^{c}g(x)dx=0$ である。

(3)　$f_1(x)=\displaystyle\int_{-x}^{x}f_0(t)dt+f_0{}'(x)$ なので，(2)より，

$$\int_{-x}^{x}f_1(t)dt=\int_{-x}^{x}f_0{}'(t)dt=\Big[\,f_0(t)\,\Big]_{-x}^{x}=f_0(x)-f_0(-x)=xe^x+xe^{-x}$$

すると，$f_2(x)=\displaystyle\int_{-x}^{x}f_1(t)dt+f_1{}'(x)=xe^x+xe^{-x}+(2x+2)e^x+(1-x-1)e^{-x}$
$$=(3x+2)e^x$$

これより，a_n，b_n を定数として，$f_{2n}(x)=(a_nx+b_n)e^x$ と推測できるので，以下，0 以上の整数 n で，この式を数学的帰納法を用いて証明する。

(i)　$n=0$ のとき　$a_0=1$，$b_0=0$ である。

(ii)　$n=k$ のとき　$f_{2k}(x)=(a_kx+b_k)e^x$ であると仮定すると，

$$f_{2k+1}(x)=\int_{-x}^{x}f_{2k}(t)dt+f_{2k}{}'(x)$$

すると，$f_{2k+2}(x)=\displaystyle\int_{-x}^{x}f_{2k+1}(t)dt+f_{2k+1}{}'(x)$ ……①なので，(2)より，

$$\int_{-x}^{x}f_{2k+1}(t)dt=\int_{-x}^{x}f_{2k}{}'(t)dt=\Big[\,f_{2k}(t)\,\Big]_{-x}^{x}=f_{2k}(x)-f_{2k}(-x)$$
$$=(a_kx+b_k)e^x-(-a_kx+b_k)e^{-x}$$

$$f_{2k+1}{}'(x)=f_{2k}(x)-\{-f_{2k}(-x)\}+f_{2k}{}''(x)$$
$$=(a_kx+b_k)e^x+(-a_kx+b_k)e^{-x}+(a_kx+2a_k+b_k)e^x$$
$$=(2a_kx+2a_k+2b_k)e^x+(-a_kx+b_k)e^{-x}$$

よって，①より，$f_{2k+2}(x)=(3a_kx+2a_k+3b_k)e^x$ となる。

ここで，$a_{k+1}=3a_k$ ……②，$b_{k+1}=2a_k+3b_k$ ……③とおくと，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$f_{2n}(x)=(a_nx+b_n)e^x$ である。

さて，②より，$a_{n+1}=3a_n$ なので，$a_n=a_0\cdot 3^n=3^n$

また，③より，$b_{n+1}=2a_n+3b_n=3b_n+2\cdot 3^n$ なので，$\dfrac{b_{n+1}}{3^{n+1}}=\dfrac{b_n}{3^n}+\dfrac{2}{3}$ から，

$$\frac{b_n}{3^n}=\frac{b_0}{3^0}+\frac{2}{3}n=\frac{2}{3}n\ ,\quad b_n=\frac{2}{3}n\cdot 3^n=2n\cdot 3^{n-1}$$

以上より，$f_{2n}(x)=(3^nx+2n\cdot 3^{n-1})e^x$ である。

［解 説］

定積分の計算問題です。(2)の誘導を用いると計算量は減少しますが，それでもかなりの量があります。なお，(2)では $g(x)$ が奇関数であることを見つけたような記述をしていますが，これは文脈から「におい」を感じとった結果にすぎません。

$\boxed{27}$　　［東京医歯大］

(1)　$f(x)=x^3-x^2+x$ に対して，$f'(x)=3x^2-2x+1=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}>0$

よって，$f(x)$ はつねに増加する関数である。

(2)　(1)より，$f(x)$ は逆関数 $g(x)$ が存在し，

$$(x+1)^3-f(x)=4x^2+2x+1=4\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

$$f(x)-(x-1)^3=2x^2-2x+1=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>0$$

よって，$(x-1)^3<f(x)<(x+1)^3$ である。

ここで，$y=f(x)$ とおくと，$x=g(y)$ となり，

$$\{g(y)-1\}^3<f(g(y))<\{g(y)+1\}^3,\ \{g(y)-1\}^3<y<\{g(y)+1\}^3$$

よって，$g(y)-1<\sqrt[3]{y}<g(y)+1$ から，$\sqrt[3]{y}-1<g(y)<\sqrt[3]{y}+1$

すると，$x>0$ について，$\sqrt[3]{x}-1<g(x)<\sqrt[3]{x}+1$ ………①

(3)　不等式 $0<\frac{1}{x^2+1}<\frac{1}{x^2}$ が成立することより，$b>a>0$ について，

$$0<\int_a^b\frac{1}{x^2+1}dx<\int_a^b\frac{1}{x^2}dx\ \text{………②}$$

ここで，$\int_a^b\frac{1}{x^2}dx=-\left[\frac{1}{x}\right]_a^b=-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}<\frac{1}{a}$ ………③

②③より，$0<\int_a^b\frac{1}{x^2+1}dx<\frac{1}{a}$ ………④

(4)　$A_n=\int_n^{2n}\frac{1}{\{g(x)\}^3+g(x)}dx$ に対して，$g(x)=y$ とおくと，$x=f(y)$ となり，

$x=n\to 2n$ のとき $y=g(n)\to g(2n)$ から，$\alpha_n=g(n)$，$\beta_n=g(2n)$ とおくと，

$$A_n=\int_{\alpha_n}^{\beta_n}\frac{1}{y^3+y}\cdot f'(y)dy=\int_{\alpha_n}^{\beta_n}\frac{3y^2-2y+1}{y^3+y}dy$$

さて，$\frac{3y^2-2y+1}{y^3+y}=\frac{a}{y}+\frac{by+c}{y^2+1}$ とおくと，$3y^2-2y+1=a(y^2+1)+y(by+c)$

係数を比べると，$a=1$，$b=2$，$c=-2$ となり，

$$A_n=\int_{\alpha_n}^{\beta_n}\left(\frac{1}{y}+\frac{2y-2}{y^2+1}\right)dy=\int_{\alpha_n}^{\beta_n}\left(\frac{1}{y}+\frac{2y}{y^2+1}-\frac{2}{y^2+1}\right)dy$$

$$=\Big[\log y(y^2+1)\Big]_{\alpha_n}^{\beta_n}-2\int_{\alpha_n}^{\beta_n}\frac{1}{y^2+1}dy$$

$$=\log\frac{\beta_n({\beta_n}^2+1)}{\alpha_n({\alpha_n}^2+1)}-2\int_{\alpha_n}^{\beta_n}\frac{1}{y^2+1}dy\ \text{………⑤}$$

①より，$\sqrt[3]{n}-1<\alpha_n<\sqrt[3]{n}+1$，$\sqrt[3]{2n}-1<\beta_n<\sqrt[3]{2n}+1$ となり，

$$\frac{\sqrt[3]{2n}-1}{\sqrt[3]{n}+1}<\frac{\beta_n}{\alpha_n}<\frac{\sqrt[3]{2n}+1}{\sqrt[3]{n}-1},\quad \frac{\sqrt[3]{2}-(\sqrt[3]{n})^{-1}}{1+(\sqrt[3]{n})^{-1}}<\frac{\beta_n}{\alpha_n}<\frac{\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{n})^{-1}}{1-(\sqrt[3]{n})^{-1}}$$

よって，$\gamma_n=\dfrac{\beta_n}{\alpha_n}$とおくと，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\gamma_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\beta_n}{\alpha_n}=\sqrt[3]{2}$から，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\beta_n({\beta_n}^2+1)}{\alpha_n({\alpha_n}^2+1)}=\lim_{n\to\infty}\gamma_n\cdot\frac{{\gamma_n}^2+({\alpha_n}^2)^{-1}}{1+({\alpha_n}^2)^{-1}}=\sqrt[3]{2}\cdot(\sqrt[3]{2})^2=2\cdots\cdots\cdots ⑥$$

④より，$\displaystyle 0<\int_{\alpha_n}^{\beta_n}\frac{1}{y^2+1}dy<\frac{1}{\alpha_n}$から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\alpha_n}^{\beta_n}\frac{1}{y^2+1}dy=0\cdots\cdots\cdots ⑦$

⑤⑥⑦より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}A_n=\log 2$

［解 説］

逆関数の絡んだ微積分の総合問題です。誘導はついているものの，その意味を考えながら計算を進める必要があります。時間をかけて演習するのに適した 1 題です。なお, (2)の不等式$(x-1)^3<f(x)<(x+1)^3$は，結論を同値変形して得たものです。

28　　[新潟大]

(1)　条件より，$f(x)f(y)-f(x+y)=\sin x\sin y$ ………①

①に $y=0$ を代入すると，$f(x)f(0)-f(x)=0$ となり，

$$f(x)\{f(0)-1\}=0$$

ここで，$f(0)\neq 1$ とすると，任意の x に対して $f(x)=0$ となり①は成立しない。

よって，$f(0)=1$ である。

(2)　関数 $f(x)$ は微分可能なので，①の両辺を y で微分すると，

$$f(x)f'(y)-f'(x+y)\cdot 1=\sin x\cos y \text{ ………②}$$

②に $y=0$ を代入すると，$f(x)f'(0)-f'(x)=\sin x$

$f'(0)=0$ から，$f'(x)=-\sin x$

(3)　(2)から，C を定数として，$f(x)=\cos x+C$ となり，(1)より，

$$f(0)=1+C=1,\ C=0$$

よって，$f(x)=\cos x$ であり，$I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{f(x)}$ とおくと，

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos x}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{1-\sin x}+\frac{1}{1+\sin x}\right)\cos x\,dx=\frac{1}{2}\Big[\log\Big|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\Big|\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})^2=\log(2+\sqrt{3})$$

[解 説]

関数方程式の頻出タイプの問題です。(2)は微分係数や導関数の定義を利用しても構いませんが，問題文に「$f(x)$ は微分可能」と書かれていますので，直接，①の両辺を微分しています。

$\boxed{29}$　　［東京医歯大］

(1)　$f(x)=x^m(1-x)^n$ に対し，

$$f'(x)=mx^{m-1}(1-x)^n-x^m\cdot n(1-x)^{n-1}$$
$$=x^{m-1}(1-x)^{n-1}(m-mx-nx)$$
$$=-x^{m-1}(1-x)^{n-1}\{(m+n)x-m\}$$

x	0	$\cdots$	$\dfrac{m}{m+n}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

これより，$0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の増減は右上表のようになり，その最大値は，

$$f\left(\frac{m}{m+n}\right)=\left(\frac{m}{m+n}\right)^m\left(\frac{n}{m+n}\right)^n=\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$$

(2)　$I(m,\ n)=\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$ とおくと，

$$I(m,\ n)=\frac{1}{m+1}\Big[x^{m+1}(1-x)^n\Big]_0^1+\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}dx$$
$$=\frac{n}{m+1}I(m+1,\ n-1)=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}I(m+2,\ n-2)$$
$$=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot\frac{n-2}{m+3}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{m+n-1}I(m+n-1,\ 1)$$

ここで，$I(m+n-1,\ 1)=\displaystyle\int_0^1 x^{m+n-1}(1-x)dx=\left[\frac{x^{m+n}}{m+n}-\frac{x^{m+n+1}}{m+n+1}\right]_0^1$

$$=\frac{1}{m+n}-\frac{1}{m+n+1}=\frac{1}{(m+n)(m+n+1)}$$

よって，$I(m,\ n)=\dfrac{n}{m+1}\cdot\dfrac{n-1}{m+2}\cdot\dfrac{n-2}{m+3}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2}{m+n-1}\cdot\dfrac{1}{(m+n)(m+n+1)}$

$$=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

(3)　関数 $g(x)=ax^2+bx+c$ に対し，条件(i)より，$g(0)=g(1)=0$ なので，

$g(x)=ax(x-1)$ ………①

また，条件(ii)より，$0<x<1$ のとき $f(x)\leqq g(x)$ なので，

$$g(x)-f(x)=ax(x-1)-x^m(1-x)^n=-x(1-x)\{a+x^{m-1}(1-x)^{n-1}\}\geqq 0$$

よって，$a+x^{m-1}(1-x)^{n-1}\leqq 0$，$x^{m-1}(1-x)^{n-1}\leqq -a$ ………②

ここで，$h(x)=x^{m-1}(1-x)^{n-1}$ とおくと，

(i)　$m-1\geqq 1,\ n-1\geqq 1\ (m\geqq 2,\ n\geqq 2)$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ における $h(x)$ の最大値は，(1)の結果を用いると，

$$\frac{(m-1)^{m-1}(n-1)^{n-1}}{(m-1+n-1)^{m-1+n-1}}=\frac{(m-1)^{m-1}(n-1)^{n-1}}{(m+n-2)^{m+n-2}}$$

よって，②より，$-a\geqq\dfrac{(m-1)^{m-1}(n-1)^{n-1}}{(m+n-2)^{m+n-2}}$

(ii)　$m=1,\ n=1$ のとき

$h(x)=1$ となり，②より，$-a\geqq 1$

(iii) $m=1,\ n\geqq 2$ のとき

$h(x)=(1-x)^{n-1}$ となり，$0\leqq x\leqq 1$ における最大値は 1 から，②より $-a\geqq 1$

(iv) $m\geqq 2,\ n=1$ のとき

$h(x)=x^{m-1}$ となり，$0\leqq x\leqq 1$ における最大値は 1 から，②より $-a\geqq 1$

さて，$g(x)$ の $0\leqq x\leqq 1$ における最大値 $M(a,\ b,\ c)$ は，②から $a<0$ として，

$$M(a,\ b,\ c)=g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}a$$

以上より，$M(a,\ b,\ c)$ の最小値は，$m\geqq 2,\ n\geqq 2$ のとき $\dfrac{(m-1)^{m-1}(n-1)^{n-1}}{4(m+n-2)^{m+n-2}}$，

$m=1$ または $n=1$ のとき $\dfrac{1}{4}$ である。

(4) (1)より，$f(x)\leqq\dfrac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$ $\left(\text{等号は}\,x=\dfrac{m}{m+n}\,\text{のとき}\right)$ より，

$$\int_0^1 f(x)dx<\int_0^1\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}dx,\quad \frac{m!n!}{(m+n+1)!}<\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$$

よって，$\dfrac{(m+n+1)!}{m!n!}>\dfrac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n}$ ………③

また，(1)(3)から，$m>n\geqq 2$ のとき，$\dfrac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}\leqq\dfrac{(m-1)^{m-1}(n-1)^{n-1}}{4(m+n-2)^{m+n-2}}$

$$\frac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n}\geqq\frac{4(m+n-2)^{m+n-2}}{(m-1)^{m-1}(n-1)^{n-1}}\ \text{………④}$$

$J(m,\ n)=\dfrac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n}$ とおくと，④より $J(m,\ n)\geqq 4J(m-1,\ n-1)$ となり，

$$J(m,\ n)\geqq 4^{n-1}J(m-n+1,\ 1)$$

ここで，$J(m-n+1,\ 1)=\dfrac{(m-n+2)^{m-n+2}}{(m-n+1)^{m-n+1}}=(m-n+2)\left(\dfrac{m-n+2}{m-n+1}\right)^{m-n+1}>2$

よって，$J(m,\ n)>2\cdot 4^{n-1}=2^{2n-1}$ ……⑤となり，③⑤から，

$$\frac{(m+n+1)!}{m!n!}>\frac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n}>2^{2n-1}$$

[解 説]

前半は有名問題ですが，後半はこの結果を誘導として利用するもので，実質的に 2 題分以上の分量があります。どこまで記述できるかが問われています。

30　　［千葉大］

(1)　$n \geqq 2$ のとき，部分積分を用いて，

$$I_{n,\,m} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta\sin^m\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}\theta\sin^m\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{m+1}\Big[\cos^{n-1}\theta\sin^{m+1}\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}\theta\sin\theta\sin^{m+1}\theta\,d\theta$$

$$= \frac{n-1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}\theta\sin^{m+2}\theta\,d\theta = \frac{n-1}{m+1}I_{n-2,\,m+2}$$

(2)　$x=\cos^2\theta$ とおくと，$dx=-2\cos\theta\sin\theta\,d\theta$ となり，

$$I_{2n+1,\,2m+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}\theta\sin^{2m+1}\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\theta\sin^{2m}\theta\cos\theta\sin\theta\,d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\int_1^0 x^n(1-x)^m\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx$$

(3)　(1)より，$I_{2n+1,\,2m+1} = \dfrac{2n}{2m+2}I_{2n-1,\,2m+3}$ となり，

$$I_{2n+1,\,2m+1} = \frac{2n}{2m+2}\cdot\frac{2n-2}{2m+4}\cdot\frac{2n-4}{2m+6}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{2m+2n}I_{1,\,2m+2n+1}$$

$$= \frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot\frac{n-2}{m+3}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{m+n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin^{2m+2n+1}\theta\,d\theta$$

$$= \frac{m!n!}{(m+n)!}\Big[\frac{1}{2m+2n+2}\sin^{2m+2n+2}\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{m!n!}{2(m+n+1)!}$$

また，二項展開を用いると，(2)より，

$$I_{2n+1,\,2m+1} = \frac{1}{2}\int_0^1 x^n\{{}_m\mathrm{C}_0 - {}_m\mathrm{C}_1x + \cdots + (-1)^m\,{}_m\mathrm{C}_m x^m\}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \{{}_m\mathrm{C}_0x^n - {}_m\mathrm{C}_1x^{n+1} + \cdots + (-1)^m\,{}_m\mathrm{C}_m x^{n+m}\}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\frac{{}_m\mathrm{C}_0}{n+1}x^{n+1} - \frac{{}_m\mathrm{C}_1}{n+2}x^{n+2} + \cdots + \frac{(-1)^m\,{}_m\mathrm{C}_m}{n+m+1}x^{n+m+1}\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\Big\{\frac{{}_m\mathrm{C}_0}{n+1} - \frac{{}_m\mathrm{C}_1}{n+2} + \cdots + \frac{(-1)^m\,{}_m\mathrm{C}_m}{n+m+1}\Big\}$$

以上より，$\dfrac{n!m!}{(n+m+1)!} = \dfrac{{}_m\mathrm{C}_0}{n+1} - \dfrac{{}_m\mathrm{C}_1}{n+2} + \cdots + (-1)^m\dfrac{{}_m\mathrm{C}_m}{n+m+1}$

［解　説］

定積分の計算についての有名問題で，要演習の１題です。

$\boxed{31}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［大阪大］

まず，$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ のグラフに対して，図 1 より，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}&=\sum_{n=1}^{39999}\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{40000}}\\&>\int_1^{40000}\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\frac{1}{200}\\&=\Big[\,2\sqrt{x}\,\Big]_1^{40000}+\frac{1}{200}\\&=2(200-1)+\frac{1}{200}=398+\frac{1}{200}\end{aligned}$$

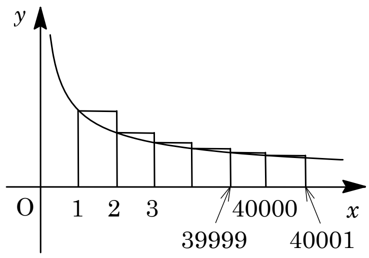


図1

また，同様に，図 2 より，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}&=\frac{1}{\sqrt{1}}+\sum_{n=2}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}\\&<1+\int_1^{40000}\frac{1}{\sqrt{x}}dx\\&=1+398=399\end{aligned}$$

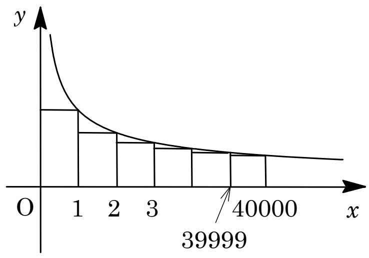


図2

以上より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}$ の整数部分は 398 である。

［解　説］

数列と定積分の融合問題です。$\sqrt{40000}=200$ に着目して，最初または最後の短冊は別扱いという形で，きれいに解けます。ただ，かなりアバウトな書き方になっていますが……。

$\boxed{32}$ ［新潟大］

(1)　$a_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}dx$ とするとき，

$$\left|\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx-a_n\right|=\left|\int_0^1 \frac{-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}dx\right|=\int_0^1 \frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2}dx \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，$0\leqq x\leqq 1$ において，$\dfrac{x^{2(n+1)}}{1+x^2}\leqq x^{2(n+1)}$ より，

$$\int_0^1 \frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2}dx\leqq\int_0^1 x^{2(n+1)}dx=\frac{1}{2n+3} \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$\left|\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx-a_n\right|\leqq\dfrac{1}{2n+3} \cdots\cdots\cdots ③$

(2)　$I=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\big[\,x\,\big]_0^1-\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx=1-\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$

とおくと，$x=\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ から，$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ となり，

$$I=1-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=1-\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta=1-\frac{\pi}{4}$$

(3)　$\dfrac{x^2+(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}=\dfrac{x^2\{1-(-x^2)^n\}}{1-(-x^2)}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x^2\cdot(-x^2)^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^{2k}$ から，

$$a_n=\int_0^1\{x^2-x^4+x^6+\cdots+(-1)^{n-1}x^{2n}\}dx=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$$

(4)　(3)より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}=\lim_{n\to\infty}a_n \cdots\cdots\cdots ④$

また，③より，$n\to\infty$ のとき，$\dfrac{1}{2n+3}\to 0$ から $\left|\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx-a_n\right|\to 0$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx=1-\frac{\pi}{4} \cdots\cdots\cdots ⑤$$

したがって，④⑤より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}=1-\frac{\pi}{4}$

［解　説］

定積分と級数についての標準的な問題です。細かな誘導のため，方針に迷うことはありません。