1　　[名古屋大]

xy 平面上に曲線 $C : y = \log x\ (x>0)$ を考える。

(1)　曲線 C の接線で点 $(0,\ b)$ を通るものの方程式を求めよ。

(2)　平面上に 2 組の点列 $\{\mathrm{A}_n\}$，$\{\mathrm{B}_n\}$ を次のように定める。A_1 を $(1,\ 0)$ とする。A_n が定まったとき，A_n を通り x 軸に平行な直線と y 軸との交点を B_n とし，B_n を通る曲線 C の接線の接点を A_{n+1} とする。このとき，2 つの線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ と $\mathrm{B}_n\mathrm{A}_{n+1}$ および曲線 C とで囲まれる部分の面積 S_n を求めよ。

(3)　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{S_n}$ の和を求めよ。ここで，$|r|<1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ であることを用いてよい。

2　　　　［東京大］

$a_1=\dfrac{1}{2}$ とし，数列 $\{a_n\}$ を漸化式

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{(1+a_n)^2}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　各 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおく。$n>1$ のとき，$b_n>2n$ となることを示せ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ を求めよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n$ を求めよ。

3　　　［東京大］

n を 2 以上の整数とする。平面上に $n+2$ 個の点 O，P_0，P_1，…，P_n があり，次の 2 つの条件を満たしている。

①　$\angle P_{k-1}OP_k = \dfrac{\pi}{n}$ $(1 \leqq k \leqq n)$，$\angle OP_{k-1}P_k = \angle OP_0P_1$ $(2 \leqq k \leqq n)$

②　線分 OP_0 の長さは 1，線分 OP_1 の長さは $1+\dfrac{1}{n}$ である。

線分 $P_{k-1}P_k$ の長さを a_k とし，$s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n$ を求めよ。

4　　［京都大］

x, y を相異なる正の実数とする。数列$\{a_n\}$を

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = xa_n + y^{n+1} \ (n = 1, \ 2, \ 3, \ \cdots)$$

によって定めるとき，$\lim_{n\to\infty} a_n$ が有限の値に収束するような座標平面上の点$(x, \ y)$の範囲を図示せよ。

5　　　　［東北大］

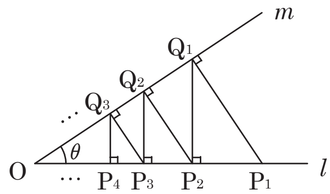
n を 2 以上の自然数とする。平面上の△OA_1A_2 は $\angle OA_2A_1 = 90°$，$OA_1 = 1$，$A_1A_2 = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ を満たすとする。A_2 から OA_1 へ垂線を下ろし，交点を A_3 とする。A_3 から OA_2 へ垂線を下ろし，交点を A_4 とする。以下同様に，$k = 4,\ 5,\ \cdots$ について，A_k から OA_{k-1} へ垂線を下ろし，交点を A_{k+1} として，順番に A_5，A_6，…を定める。$\overrightarrow{h_k} = \overrightarrow{A_kA_{k+1}}$ とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$k = 1,\ 2,\ \cdots$ のとき，ベクトル $\overrightarrow{h_k}$ と $\overrightarrow{h_{k+1}}$ の内積 $\overrightarrow{h_k} \cdot \overrightarrow{h_{k+1}}$ を n と k で表せ。

(2)　$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{h_k} \cdot \overrightarrow{h_{k+1}}$ とおくとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。ここで，自然対数の底 e について，$e = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ であることを用いてもよい。

6　　［広島大］

右図のように，点 O から出る 2 本の半直線 l, m があり，l と m のなす角を θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。l 上に $\mathrm{OP_1}=1$ となるように点 $\mathrm{P_1}$ を定め，$\mathrm{P_1}$ から m に垂線 $\mathrm{P_1Q_1}$ を下ろし，$\mathrm{Q_1}$ から l に垂線 $\mathrm{Q_1P_2}$ を下ろし，$\mathrm{P_2}$ から m に垂線 $\mathrm{P_2Q_2}$ を下ろし，$\mathrm{Q_2}$ から l に垂線 $\mathrm{Q_2P_3}$ を下ろす。



同様にくりかえして，点 P_n，Q_n ($n=1$，2，3，4，…) を定め，三角形 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の面積を S_n とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\dfrac{\mathrm{P_2Q_2}}{\mathrm{P_1Q_1}}$ を求めよ。

(2)　$\dfrac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

(3)　$S=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ を求め，$\sin 2\theta$ と $\cos 2\theta$ を用いて表せ。

(4)　(3)で求めた S を θ の関数と考えて，S の最大値を求めよ。ただし，その最大値を与える θ の値は求めなくてよい。

$\boxed{7}$ ［東京工大］

実数 x に対し，x 以上の最小の整数を $f(x)$ とする。a, b を正の実数とするとき，極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^c\left(\frac{1}{f(ax-7)}-\frac{1}{f(bx+3)}\right)$ が収束するような実数 c の最大値と，そのときの極限値を求めよ。

8　　［大阪大］

$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$y=\log(nx)$ と $\left(x-\dfrac{1}{n}\right)^2+y^2=1$ の交点のうち第 1 象限にある点を $(p_n,\ q_n)$ とする。

(1)　不等式 $1-{q_n}^2 \leqq \dfrac{(e-1)^2}{n^2}$ を示すことにより，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} q_n=1$ を証明せよ。ただし，e は自然対数の底である。

(2)　$S_n=\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{p_n}\log(nx)\,dx$ を p_n で表せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} nS_n$ を求めよ。

9 ［九州大］

xy 平面上に曲線 $y=\dfrac{1}{x^2}$ を描き，この曲線の第 1 象限内の部分を C_1，第 2 象限内の部分を C_2 と呼ぶ。C_1 上の点 $\mathrm{P}_1\left(a,\ \dfrac{1}{a^2}\right)$ から C_2 に向けて接線を引き，C_2 との接点を Q_1 とする。次に点 Q_1 から C_1 に向けて接線を引き，C_1 との接点を P_2 とする。次に点 P_2 から C_2 に向けて接線を引き，接点を Q_2 とする。以下同様に続けて，C_1 上の点列 P_n と C_2 上の点列 Q_n を定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 Q_1 の座標を求めよ。

(2)　三角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_2$ の面積 S_1 を求めよ。

(3)　三角形 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ の面積 S_n を求めよ。

(4)　級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和を求めよ。

$\boxed{10}$ ［北海道大］

正の実数 r と $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲の実数 θ に対して，$a_0=r\cos\theta$，$b_0=r$ とおく。a_n，b_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$ を漸化式

$$a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},\quad b_n=\sqrt{a_n b_{n-1}}$$

により定める。以下の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{a_1}{b_1}$，$\dfrac{a_2}{b_2}$ を θ で表せ。

(2) $\dfrac{a_n}{b_n}$ を n と θ で表せ。

(3) $\theta\neq 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{r\sin\theta}{\theta}$ を示せ。

11　　[東京工大]

a を正の整数とする。正の実数 x についての方程式

$$(*)\qquad x=\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)\right]$$

が解をもたないような a を小さい順に並べたものを a_1，a_2，a_3，…とする。ここに [ ]はガウス記号で，実数 u に対し，$[u]$ は u 以下の最大の整数を表す。

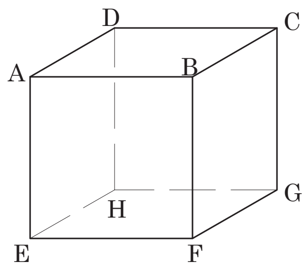
(1)　$a=7$，8，9 の各々について(*)の解があるかどうかを判定し，ある場合は解 x を求めよ。

(2)　a_1，a_2 を求めよ。

(3)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ を求めよ。

$\boxed{12}$ ［大阪大］

n を 0 以上の整数とする。立方体 ABCD-EFGH の頂点を，以下のように移動する 2 つの動点 P，Q を考える。時刻 0 には P は頂点 A に位置し，Q は頂点 C に位置している。時刻 n において，P と Q が異なる頂点に位置していれば，時刻 $n+1$ には，P は時刻 n に位置していた頂点から，それに隣接する 3 頂点のいずれかに等しい確率で移り，Q も時刻 n に位置していた頂点から，それに隣接する 3 頂点のいずれかに等しい確率で移る。一方，時刻 n において，P と Q が同じ頂点に位置していれば，時刻 $n+1$ には P も Q も時刻 n の位置からは移動しない。



(1) 時刻 1 において，P と Q が異なる頂点に位置するとき，P と Q はどの頂点にあるか。可能な組み合わせをすべて挙げよ。

(2) 時刻 n において，P と Q が異なる頂点に位置する確率 r_n を求めよ。

(3) 時刻 n において，P と Q がともに上面 ABCD の異なる頂点に位置するか，またはともに下面 EFGH の異なる頂点に位置するかのいずれかである確率を p_n とする。また，時刻 n において，P と Q のいずれか一方が上面 ABCD，他方が下面 EFGH にある確率を q_n とする。p_{n+1} を，p_n と q_n を用いて表せ。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{p_n}$ を求めよ。

$\boxed{13}$ ［千葉大］

r は $0<r<1$ を満たす実数とする。座標平面上に 1 辺の長さが r^n の正方形 R_n $(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ があり，その頂点を反時計まわりに A_n，B_n，C_n，D_n とする。さらに R_n は次の条件(i), (ii)を満たすとする。

(i)　正方形 R_0 の頂点は $\mathrm{A}_0(0,\ 0)$，$\mathrm{B}_0(1,\ 0)$，$\mathrm{C}_0(1,\ 1)$，$\mathrm{D}_0(0,\ 1)$ である。

(ii)　$\mathrm{A}_{n+1}=\mathrm{C}_n$ で，点 D_{n+1} は辺 $\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ 上にある。

このとき以下の問いに答えよ。

(1)　点 A_2，A_3，A_4 の座標を r を用いて表せ。

(2)　A_{4n} の座標を $(x_n,\ y_n)$　$(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおく。$x_{n+1}-x_n$ および $y_{n+1}-y_n$ を r, n の式で表せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}y_n$ を r を用いて表せ。

14　　［京都大］

a が正の実数のとき $\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ。

$\boxed{15}$ ［東北大］

数列$\{a_n\}$を

$$a_1=1,\ a_{n+1}=\sqrt{\frac{3a_n+4}{2a_n+3}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。以下の問いに答えよ。

(1) $n \geqq 2$ のとき，$a_n > 1$ となることを示せ。

(2) $\alpha^2=\dfrac{3\alpha+4}{2\alpha+3}$ を満たす正の実数 α を求めよ。

(3) すべての自然数 n に対して $a_n < \alpha$ となることを示せ。

(4) $0 < r < 1$ を満たすある実数 r に対して，不等式

$$\frac{\alpha-a_{n+1}}{\alpha-a_n} \leqq r \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つことを示せ。さらに，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

$\boxed{16}$ ［東北大］

数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$を

$$a_n=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}\,d\theta\,,\ \ b_n=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}\cos\theta\, d\theta \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。ただし，eは自然対数の底とする。

(1)　一般項b_nを求めよ。

(2)　すべてのnについて，$b_n \leqq a_n \leqq \dfrac{2}{\sqrt{3}} b_n$が成り立つことを示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(na_n)$を求めよ。ただし，対数は自然対数とする。

17　［東京工大］

正の整数 n に対し，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲において $\sin 4nx \geqq \sin x$ を満たす x の区間の長さの総和を S_n とする。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。

$\boxed{18}$ ［名古屋大］

xy 平面の $y \geqq 0$ の部分にあり，x 軸に接する円の列 C_1，C_2，C_3，…を次のように定める。

・C_1 と C_2 は半径 1 の円で，互いに外接する。

・正の整数 n に対し，C_{n+2} は C_n と C_{n+1} に外接し，C_n と C_{n+1} の弧および x 軸で囲まれる部分にある。

円 C_n の半径を r_n とする。

(1) 等式 $\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{r_n}} + \dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}$ を示せ。

(2) すべての正の整数 n に対して $\dfrac{1}{\sqrt{r_n}} = s\alpha^n + t\beta^n$ が成り立つように，n によらない定数 α，β，s，t の値を一組与えよ。

(3) $n \to \infty$ のとき数列 $\left\{\dfrac{r_n}{k^n}\right\}$ が正の値に収束するように実数 k の値を定め，そのときの極限値を求めよ。