1　　［名古屋大］

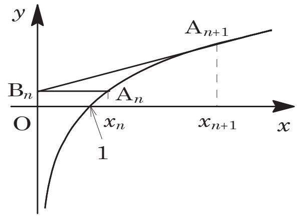
(1)　$C : y = \log x$ より，$y' = \dfrac{1}{x}$ となり，接点を $(t,\ \log t)$ とおくと，接線の方程式は，

$$y - \log t = \frac{1}{t}(x - t),\quad y = \frac{1}{t}x - 1 + \log t$$

点 $(0,\ b)$ を通ることより，

$$-1 + \log t = b,\quad t = e^{b+1}$$

よって，接線の方程式は，$y = e^{-b-1}x + b$



(2)　点 $A_n(x_n,\ \log x_n)$，$A_{n+1}(x_{n+1},\ \log x_{n+1})$ とおくと，

$B_n(0,\ \log x_n)$ となり，(1)より，

$$x_{n+1} = e^{\log x_n + 1},\quad x_{n+1} = ex_n$$

$A_1(1,\ 0)$ から $x_1 = 1$ なので，$x_n = 1 \cdot e^{n-1} = e^{n-1}$

よって，$A_n(e^{n-1},\ n-1)$，$A_{n+1}(e^n,\ n)$ となり，求める面積 S_n は，

$$S_n = \frac{1}{2}e^n\{n-(n-1)\} - \left\{\int_{e^{n-1}}^{e^n}\log x\,dx - (e^n - e^{n-1})(n-1)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}e^n + (n-1)e^n - (n-1)e^{n-1} - \Big[x\log x - x\Big]_{e^{n-1}}^{e^n}$$
$$= \frac{1}{2}e^n + (n-1)e^n - (n-1)e^{n-1} - ne^n + (n-1)e^{n-1} + e^n - e^{n-1}$$
$$= \frac{1}{2}e^n - e^{n-1} = \frac{1}{2}(e-2)e^{n-1}$$

(3)　(2)より，$\dfrac{n}{S_n} = \dfrac{2n}{(e-2)e^{n-1}} = \dfrac{2}{e-2}\cdot n\left(\dfrac{1}{e}\right)^{n-1}$ となり，$T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{e}\right)^{k-1}$ とおくと，

$$\left(1-\frac{1}{e}\right)T_n = 1 + \frac{1}{e} + \left(\frac{1}{e}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1} - n\left(\frac{1}{e}\right)^n$$
$$= \frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^n}{1-\frac{1}{e}} - n\left(\frac{1}{e}\right)^n = \frac{e}{e-1}\left\{1-\left(\frac{1}{e}\right)^n\right\} - n\left(\frac{1}{e}\right)^n$$

よって，$T_n = \dfrac{e^2}{(e-1)^2}\left\{1-\left(\dfrac{1}{e}\right)^n\right\} - \dfrac{e}{e-1}\cdot n\left(\dfrac{1}{e}\right)^n$ となり，条件より，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{S_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{e-2}T_n = \frac{2}{e-2}\cdot\frac{e^2}{(e-1)^2} = \frac{2e^2}{(e-2)(e-1)^2}$$

［解 説］

似た構図をよく見かける微積分の総合問題です。とにかく計算力がポイントです。

2　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大］

(1)　$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{(1+a_n)^2}$ より，帰納的に $a_n>0$ である。

さて，$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{(1+a_n)^2}{a_n}=\dfrac{1}{a_n}+2+a_n$ ……(＊)から，$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと，

$$b_{n+1}=b_n+2+\frac{1}{b_n}$$

以下，数学的帰納法を用いて，$n>1$ のとき $b_n>2n$ となることを示す。

(i)　$n=2$ のとき

$b_2=b_1+2+\dfrac{1}{b_1}=2+2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{2}>2\times2$ となり，$n=2$ のとき成立する。

(ii)　$n=k$ のとき

$b_k>2k$ と仮定すると，$b_{k+1}=b_k+2+\dfrac{1}{b_k}>b_k+2>2(k+1)$

よって，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$n>1$ のとき $b_n>2n$ である。

(2)　(1)より，$n\geqq2$ において $b_n=\dfrac{1}{a_n}>2n$ より，$a_n<\dfrac{1}{2n}$ となるので，

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n<\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{2n}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_1^n\frac{1}{x}dx$$

よって，$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n<\dfrac{1}{2}\left(1+\left[\,\log x\,\right]_1^n\right)=\dfrac{1}{2}(1+\log n)$ となり，

$$0<\frac{1}{n}(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{\log n}{n}\right)$$

すると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=0$

(3)　(＊)より，$a_n=\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}-2$ なので，

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_k}-2\right)=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_1}-2n=\frac{1}{a_{n+1}}-2n-2$$

よって，$\displaystyle\frac{1}{a_{n+1}}=\sum_{k=1}^{n}a_k+2n+2$ より，$\displaystyle\frac{1}{na_{n+1}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k+2+\frac{2}{n}$

すると，(2)より，$n\to\infty$ のとき，$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k+2+\frac{2}{n}\to2$ となるので，

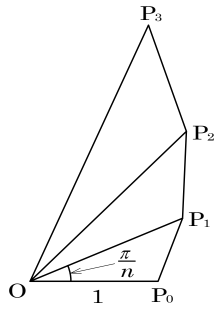
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na_{n+1}}=2,\quad \lim_{n\to\infty}na_{n+1}=\frac{1}{2}$$

以上より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}(n+1)a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot na_{n+1}=\frac{1}{2}$

［解 説］

適切な誘導のついている数列と微積分の総合問題で，演習すべき１題です。

$\boxed{3}$　　　　［東京大］



$1 \leqq k \leqq n$ を満たす k に対し，$\triangle P_{k-1}OP_k$ はすべて相似となり，

$P_{k-1}P_k = a_k$ とおくと，

$$a_{k+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)a_k$$

これより，$a_k = a_1\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k-1}$ となり，

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k-1} = a_1 \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1}{1+\frac{1}{n}-1}$$

$$= a_1 n\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1\right\}$$

ここで，$\triangle OP_0P_1$ に余弦定理を適用すると，

$$a_1^{\ 2} = 1^2 + \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - 2\cdot 1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n} = 2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right) + \frac{1}{n^2}$$

よって，$a_1 = \sqrt{2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)+\frac{1}{n^2}}$ から，

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{2n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)+1}\ \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt{4n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin^2\frac{\pi}{2n}+1}\ \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt{\pi^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{2n}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2+1}\ \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1\right\}$$

$$= \sqrt{\pi^2+1}\,(e-1)$$

［解　説］

図形と数列の極限の融合問題です。基本事項の確認が主となっており，落とすことはできません。

4　　［京都大］

k を 0 でない定数として，漸化式 $a_{n+1}=xa_n+y^{n+1}$ ……①を満たす 1 つの数列を $a_n=ky^n$ とすると，

$$ky^{n+1}=kxy^n+y^{n+1}\cdots\cdots\cdots②$$

②より，$x>0,\ y>0$，$x\neq y$ なので，$ky=kx+y$，$k=\dfrac{y}{y-x}$

①－②より，$a_{n+1}-ky^{n+1}=x(a_n-ky^n)$

$a_1=0$ から，$a_n-ky^n=(a_1-ky^1)x^{n-1}=-kyx^{n-1}$

$$a_n=ky(y^{n-1}-x^{n-1})=\frac{y^2}{y-x}(y^{n-1}-x^{n-1})\cdots\cdots\cdots③$$

(i)　$y>x$ のとき

$0<\dfrac{x}{y}<1$ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{y}\right)^n=0$ となり，③より，

$$a_n=\frac{y^2}{y-x}y^{n-1}\left\{1-\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}\right\}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ が有限の値に収束する条件は，$0<y\leqq 1$ である。

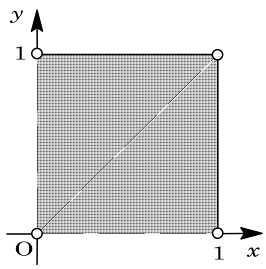
(ii)　$x>y$ のとき

$0<\dfrac{y}{x}<1$ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{y}{x}\right)^n=0$ となり，③より，

$$a_n=\frac{y^2}{y-x}x^{n-1}\left\{\left(\frac{y}{x}\right)^{n-1}-1\right\}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ が有限の値に収束する条件は，$0<x\leqq 1$ である。

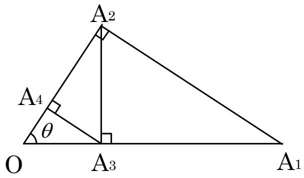
(i)(ii)より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ が有限の値に収束するような点$(x,\ y)$を図示すると，右図の網点部のようになる。ただし，実線の境界は含み，破線の境界は含まない。



［解　説］

漸化式の解法問題です。一般項が求まれば，収束する条件を丁寧に図示するだけです。なお，上記の解法については「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

5　　［東北大］



(1)　$\angle \mathrm{A_1OA_2}=\theta$ とおくと，$\sin\theta=\dfrac{\mathrm{A_1A_2}}{\mathrm{OA_1}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ より，

$\cos\theta=\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}$ となり，

$$\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}_{k+2}=\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}\cos\theta=\sqrt{1-\frac{1}{n}}\,\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}$$

よって，$\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}\right)^{k-1}$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}_{k+2}}$ のなす角は，$180°-\theta$ より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}&=\overrightarrow{\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}_{k+2}}\\&=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)^{k}\cos(180°-\theta)\\&=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{n}}\cdot\left(-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)=-\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k}\end{aligned}$$

(2)　(1)より，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}=\dfrac{-\dfrac{1}{n}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left\{1-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}}{1-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}=-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left\{1-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$

さて，$e=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ より，

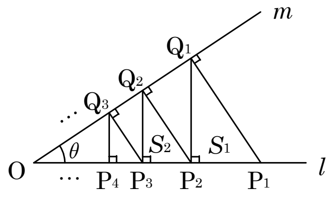
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)}=\frac{1}{e}\end{aligned}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=-\left(1-\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}-1$

［解　説］

数列の極限についての基本問題です。相似な図形と等比数列が融合した構図となっています。

$\boxed{6}$ ［広島大］



(1)　$Q_1P_2=P_1Q_1\cos\theta$，$P_2Q_2=Q_1P_2\cos\theta$ より，

$$P_2Q_2=P_1Q_1\cos^2\theta,\ \frac{P_2Q_2}{P_1Q_1}=\cos^2\theta$$

(2)　$\triangle P_1Q_1P_2$ と $\triangle P_2Q_2P_3$ は相似なので, (1)より,

$$\frac{S_2}{S_1}=\cos^4\theta$$

(3)　$P_1Q_1=OP_1\sin\theta=\sin\theta$ より,

$$S_1=\frac{1}{2}P_1Q_1\cdot Q_1P_2\sin\theta=\frac{1}{2}\sin^3\theta\cos\theta$$

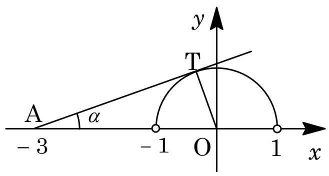
(2)と同様にして，$S_{n+1}=S_n\cos^4\theta$ となり, $0<\cos^4\theta<1$ から,

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{S_1}{1-\cos^4\theta}=\frac{\sin^3\theta\cos\theta}{2(1+\cos^2\theta)(1-\cos^2\theta)}=\frac{\sin\theta\cos\theta}{2(1+\cos^2\theta)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\sin 2\theta}{2\left(1+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)}=\frac{\sin 2\theta}{2(3+\cos 2\theta)}$$

(4)　$m=\dfrac{\sin 2\theta}{3+\cos 2\theta}=\dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta-(-3)}$ とおくと，$0<2\theta<\pi$ より，m は点 $A(-3,\ 0)$ と半円 $x^2+y^2=1$ ($y>0$) 上の点を結ぶ直線の傾きになる。

ここで, m の値が最大となるのは, この直線が円に接するときであり, 接点を T とし, x 軸の正の部分となす角を α とおくと,



$$\tan\alpha=\frac{OT}{AT}=\frac{1}{\sqrt{3^2-1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

よって, (3)より $S=\dfrac{1}{2}m$ なので, S の最大値は，$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{8}$ である。

［解　説］

有名な構図の頻出問題です。(4)では，微分法の利用が一般的ですが，ここでは分数関数を直線の傾きとしてみる解法を採用しました。

$\boxed{7}$　［東京工大］

k を整数とするとき，$f(x)$ の定義より，$f(x+k)=f(x)+k$ となり，

$$f(ax-7)=f(ax)-7,\ f(bx+3)=f(bx)+3$$

すると，$\dfrac{1}{f(ax-7)}-\dfrac{1}{f(bx+3)}=\dfrac{1}{f(ax)-7}-\dfrac{1}{f(bx)+3}$

$$=\frac{f(bx)-f(ax)+10}{(f(ax)-7)(f(bx)+3)}\cdots\cdots\cdots(*)$$

同様に，$f(x)$ の定義より，$x\leqq f(x)<x+1$ となり，

$$ax\leqq f(ax)<ax+1,\ bx\leqq f(bx)<bx+1$$

すると, $x>0$ において,

$$a\leqq\frac{f(ax)}{x}<a+\frac{1}{x},\ b\leqq\frac{f(bx)}{x}<b+\frac{1}{x}$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(ax)}{x}=a$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(bx)}{x}=b$

ここで，$g(x)=x^c\left(\dfrac{1}{f(ax-7)}-\dfrac{1}{f(bx+3)}\right)$とおくと，

(i)　$a\neq b$ のとき

$(*)$より，$g(x)=x^{c-1}\cdot\dfrac{\dfrac{f(bx)}{x}-\dfrac{f(ax)}{x}+\dfrac{10}{x}}{\left(\dfrac{f(ax)}{x}-\dfrac{7}{x}\right)\left(\dfrac{f(bx)}{x}+\dfrac{3}{x}\right)}$

すると，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)$は，$c-1>0$ のとき発散，$c-1\leqq 0$ のとき収束する。

よって，収束する c の最大値は$c=1$で，このとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)=\frac{b-a}{ab}$ である。

(ii)　$a=b$ のとき

$(*)$より，$g(x)=x^{c-2}\cdot\dfrac{10}{\left(\dfrac{f(ax)}{x}-\dfrac{7}{x}\right)\left(\dfrac{f(ax)}{x}+\dfrac{3}{x}\right)}$

すると，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)$は，$c-2>0$ のとき発散，$c-2\leqq 0$ のとき収束する。

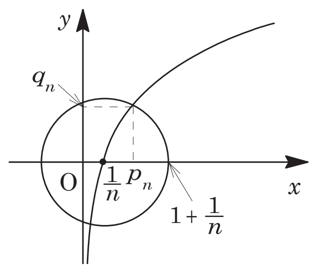
よって，収束する c の最大値は$c=2$で，このとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)=\frac{10}{a^2}$ である。

［解　説］

題意を言い換えた不等式$x\leqq f(x)<x+1$のみで評価すると，$a=b$のときがアバウトになりすぎます。そこで，収束する形を作るという基本に戻ったのが上の解です。もっとも，さらに基本なのは「x が大きくなると$f(x)$は x と同じようなもの」という感覚ですが。

8　　　　　［大阪大］

(1)　点 $(p_n,\ q_n)$ は，$y=\log(nx)$ と $\left(x-\dfrac{1}{n}\right)^2+y^2=1$ の



第１象限にある交点であるので,

$q_n=\log(np_n)$ ………①

$\left(p_n-\dfrac{1}{n}\right)^2+{q_n}^2=1$ ………②

②より，$1-{q_n}^2=\left(p_n-\dfrac{1}{n}\right)^2=\dfrac{(np_n-1)^2}{n^2}$ ………③

①より，$np_n=e^{q_n}$ から，$np_n-1=e^{q_n}-1$ ………④

③④より，$1-{q_n}^2=\dfrac{(e^{q_n}-1)^2}{n^2}$

ここで, $0<q_n\leqq 1$ から, $0<e^{q_n}-1\leqq e-1$ となり，$1-{q_n}^2\leqq\dfrac{(e-1)^2}{n^2}$

さらに, $0<{q_n}^2\leqq 1$ から，$0\leqq 1-{q_n}^2$ となり,

$0\leqq 1-{q_n}^2\leqq\dfrac{(e-1)^2}{n^2}$

すると, $n\to\infty$のとき$1-{q_n}^2\to 0$すなわち${q_n}^2\to 1$となり，$q_n>0$ から,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}q_n=1$

(2)　$S_n=\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{p_n}\log(nx)\,dx=\Big[x\log(nx)\Big]_{\frac{1}{n}}^{p_n}-\int_{\frac{1}{n}}^{p_n}x\cdot\frac{1}{x}\,dx=p_n\log(np_n)-p_n+\frac{1}{n}$

(3)　(2)の結果に④を適用すると,

$nS_n=np_n\log(np_n)-np_n+1=q_ne^{q_n}-e^{q_n}+1=e^{q_n}(q_n-1)+1$ ………⑤

(1)から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}q_n=1$ なので，⑤より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}nS_n=1$ である。

［解 説］

ていねいな誘導のついた極限の問題です。この誘導がなければ難問です。

9　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［九州大］

(1)　$y=\dfrac{1}{x^2}$ に対して，$y'=-\dfrac{2}{x^3}$ となり，点 $Q_1\left(b,\ \dfrac{1}{b^2}\right)$

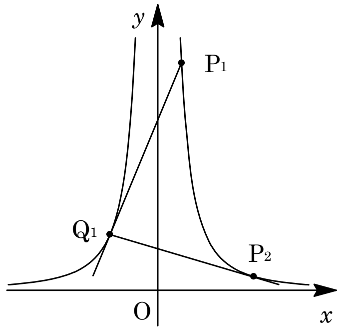
における接線の方程式は,

$$y-\frac{1}{b^2}=-\frac{2}{b^3}(x-b),\quad y=-\frac{2}{b^3}x+\frac{3}{b^2}$$

点 $P_1\left(a,\ \dfrac{1}{a^2}\right)$を通ることより，$\dfrac{1}{a^2}=-\dfrac{2}{b^3}a+\dfrac{3}{b^2}$

$$b^3-3a^2b+2a^3=0,\quad (b-a)^2(b+2a)=0$$

$b\neq a$ より，$b=-2a$ となり，$Q_1\left(-2a,\ \dfrac{1}{4a^2}\right)$となる。



(2)　(1)と同様にすると，P_2 は x 座標が $(-2)^2a=4a$ から，$P_2\left(4a,\ \dfrac{1}{16a^2}\right)$となり，

$$\overrightarrow{P_1Q_1}=\left(-3a,\ -\frac{3}{4a^2}\right),\quad \overrightarrow{P_1P_2}=\left(3a,\ -\frac{15}{16a^2}\right)$$

すると，$\triangle P_1Q_1P_2$ の面積 S_1 は,

$$S_1=\frac{1}{2}\left|(-3a)\left(-\frac{15}{16a^2}\right)-\left(-\frac{3}{4a^2}\right)\cdot 3a\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{45}{16a}+\frac{9}{4a}\right|=\frac{81}{32a}$$

(3)　$P_n\left(a_n,\ \dfrac{1}{{a_n}^2}\right)$，$Q_n\left(b_n,\ \dfrac{1}{{b_n}^2}\right)$とおくと, (1)と同様にして,

$$a_n=4^{n-1}a_1=4^{n-1}a,\quad b_n=4^{n-1}b_1=4^{n-1}\cdot(-2a)=-2\cdot 4^{n-1}a$$

(2)の結果を用いると，$\triangle P_nQ_nP_{n+1}$ の面積 S_n は,

$$S_n=\frac{81}{32(4^{n-1}a)}=\frac{81}{2a}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

(4)　等比数列 $\{S_n\}$ の公比は $\dfrac{1}{4}$ より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ は収束し,

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\dfrac{81}{32a}}{1-\dfrac{1}{4}}=\frac{27}{8a}$$

［解 説］

無限等比級数の応用問題です。誘導を利用して, 計算量を減少させることがポイントです。

10　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［北海道大］

(1)　条件より, $r>0$, $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ に対して，$a_0=r\cos\theta$，$b_0=r$ であり，

$$a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},\quad b_n=\sqrt{a_nb_{n-1}}$$

すると，帰納的に，$a_n>0$，$b_n>0$ である。

さて，$a_1=\dfrac{a_0+b_0}{2}=\dfrac{r\cos\theta+r}{2}=r\cdot\dfrac{\cos\theta+1}{2}=r\cos^2\dfrac{\theta}{2}$

$$b_1=\sqrt{a_1b_0}=\sqrt{r\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot r}=r\cos\frac{\theta}{2}$$

$$a_2=\frac{a_1+b_1}{2}=\frac{r\cos^2\frac{\theta}{2}+r\cos\frac{\theta}{2}}{2}=r\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{\cos\frac{\theta}{2}+1}{2}=r\cos\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{4}$$

$$b_2=\sqrt{a_2b_1}=\sqrt{r\cos\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{4}\cdot r\cos\frac{\theta}{2}}=r\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}$$

よって，$\dfrac{a_1}{b_1}=\cos\dfrac{\theta}{2}$，$\dfrac{a_2}{b_2}=\cos\dfrac{\theta}{4}$

(2)　0 以上の整数 n に対して，$\dfrac{a_n}{b_n}=\cos\dfrac{\theta}{2^n}$ であることを，数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=0$ のとき　$a_0=r\cos\theta$，$b_0=r$ より，$\dfrac{a_0}{b_0}=\cos\dfrac{\theta}{2^0}$ となり成り立つ。

(ii)　$n=k$ のとき　$\dfrac{a_k}{b_k}=\cos\dfrac{\theta}{2^k}$ すなわち $a_k=b_k\cos\dfrac{\theta}{2^k}$ が成り立つと仮定すると，

$$a_{k+1}=\frac{a_k+b_k}{2}=\frac{b_k\cos\frac{\theta}{2^k}+b_k}{2}=b_k\cdot\frac{\cos\frac{\theta}{2^k}+1}{2}=b_k\cos^2\frac{\theta}{2^{k+1}}$$

$$b_{k+1}=\sqrt{a_{k+1}b_k}=\sqrt{b_k\cos^2\frac{\theta}{2^{k+1}}\cdot b_k}=b_k\cos\frac{\theta}{2^{k+1}}$$

よって，$\dfrac{a_{k+1}}{b_{k+1}}=\cos\dfrac{\theta}{2^{k+1}}$ となり，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より, $n\geqq 0$ において，$\dfrac{a_n}{b_n}=\cos\dfrac{\theta}{2^n}$ である。

(3)　(2)より，$b_{n+1}=b_n\cos\dfrac{\theta}{2^{n+1}}$ なので, $n\geqq 1$ で,

$$\begin{aligned}b_n&=b_0\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cos\frac{\theta}{2^n}\\&=r\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cos\frac{\theta}{2^n}\end{aligned}$$

すると，

$$\begin{aligned}b_n\sin\frac{\theta}{2^n}&=r\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cos\frac{\theta}{2^n}\sin\frac{\theta}{2^n}\\&=r\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}\\&=r\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cdot\frac{1}{2^2}\sin\frac{\theta}{2^{n-2}}\\&=r\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2^n}r\sin\theta\end{aligned}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{\frac{1}{2^n} r\sin\theta}{\sin\frac{\theta}{2^n}} = \frac{r\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\frac{\theta}{2^n}}{\sin\frac{\theta}{2^n}} = \frac{r\sin\theta}{\theta}$

(2)より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \cos\frac{\theta}{2^n} = \frac{r\sin\theta}{\theta}$

［解　説］

漸化式と極限についての問題です。解法の流れを読み取ることは難しくありません。ただ, (3)で, 数列$\{b_n\}$の一般項を, 2 倍角の公式を用いてまとめる部分は, 経験がものをいいます。

$\boxed{11}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京工大］

(1)　x を正の実数として，$x=\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)\right]$……(＊)が解をもつ条件は,

$$x\leqq\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)<x+1\ \ (x\text{ は正の整数})\ \cdots\cdots\cdots①$$

①より，$2x^2\leqq x^2+a$ から，$x\leqq\sqrt{a}$

また，$x^2+a<2x^2+2x$ から $x^2+2x-a>0$ となり，$x>\sqrt{a+1}-1$ より，①は,

$$\sqrt{a+1}-1<x\leqq\sqrt{a}\ \ (x\text{ は正の整数})\ \cdots\cdots\cdots②$$

$a=7$ のとき，②から $\sqrt{8}-1<x\leqq\sqrt{7}$ となり，解は $x=2$

$a=8$ のとき，②から $3-1<x\leqq\sqrt{8}$ となり，解なし

$a=9$ のとき，②から $\sqrt{10}-1<x\leqq 3$ となり，解は $x=3$

(2)　$a=1$ のとき，②から $\sqrt{2}-1<x\leqq 1$ となり，解は $x=1$

$a=2$ のとき，②から $\sqrt{3}-1<x\leqq\sqrt{2}$ となり，解は $x=1$

$a=3$ のとき，②から $2-1<x\leqq\sqrt{3}$ となり，解なし

$a=4$ のとき，②から $\sqrt{5}-1<x\leqq 2$ となり，解は $x=2$

$a=5$ のとき，②から $\sqrt{6}-1<x\leqq\sqrt{5}$ となり，解は $x=2$

$a=6$ のとき，②から $\sqrt{7}-1<x\leqq\sqrt{6}$ となり，解は $x=2$

そこで, (1)の結果と合わせると, (＊)が解をもたないのは，$a=3,\ 8,\ \cdots$ となり,

$$a_1=3,\ a_2=8$$

(3)　まず, n を正の整数として,

(i)　$n^2\leqq a<(n+1)^2-1$ ($n\leqq\sqrt{a}$ かつ $\sqrt{a+1}-1<n$) のとき

②の整数解は，$x=n$ である。

(ii)　$a=(n+1)^2-1$ のとき

②に代入すると，$n<x\leqq\sqrt{(n+1)^2-1}$ ………③

ここで，$\sqrt{(n+1)^2-1}-n=\dfrac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}<\dfrac{2n}{n+n}=1$ から，③は整数解をもたない。

(i)(ii)より，$a_n=(n+1)^2-1=n(n+2)$ となり,

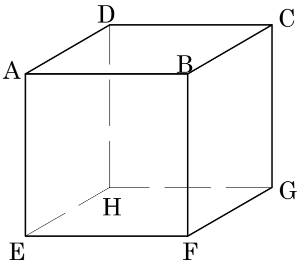
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}$$

［解 説］

ガウス記号を題材としたおもしろい問題です。初めに考えた通りを記述しましたので, (2)は冗長な解答例となっています。

12　　　　　　　　　　　　　　　　　［大阪大］



(1)　時刻 1 に，点 P は A から B, D, E のいずれかに移動，点 Q は C から B, D, G のいずれかに移動している。

これより，異なる頂点に位置する (P，Q) は，

(B，D)，(B，G)，(D，B)，(D，G)

(E，B)，(E，D)，(E，G)

(2)　まず，(1)から，P と Q が異なる頂点に位置するとき，その位置は 1 つの面の対角線の両端である。

そこで，(P，Q) が異なる頂点に位置するとき，1 回の移動で可能な $3^2=9$ 通りの (P，Q) の位置のうち，異なる頂点であるのは，(1)から 7 通りである。

すると，時刻 n において，P と Q が異なる頂点に位置する確率を r_n とすると，

$$r_{n+1}=\frac{7}{9}r_n,\quad r_n=r_0\left(\frac{7}{9}\right)^n=\left(\frac{7}{9}\right)^n$$

(3)　時刻 n において，(P，Q) がともに上面 ABCD の異なる頂点か，またはともに下面 EFGH の異なる頂点に位置する状態を A_n とし，(P，Q) のいずれか一方が上面 ABCD，他方が下面 EFGH の頂点に位置する状態を B_n とする。

すると，状態 A_n である確率が p_n，状態 B_n である確率が q_n である。

さて，(1)から，状態 A_n から状態 A_{n+1} に推移する確率は $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$，状態 B_n から状態 A_{n+1} に推移する確率は $\frac{2}{9}$，これら以外の状態から状態 A_{n+1} への推移はないので，

$$p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{2}{9}q_n\ \cdots\cdots\cdots ①$$

(4)　(2)(3)より，$p_n+q_n=r_n$ なので，$q_n=r_n-p_n=\left(\frac{7}{9}\right)^n-p_n\ \cdots\cdots\cdots ②$

①②より，$p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^n-\frac{2}{9}p_n=\frac{1}{9}p_n+\frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^n$ となり，

$$p_{n+1}-\frac{1}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^{n+1}=\frac{1}{9}\left\{p_n-\frac{1}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^n\right\}$$

すると，$p_0=1$ から，$p_n-\frac{1}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^n=\left\{p_0-\frac{1}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^0\right\}\left(\frac{1}{9}\right)^n=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^n$ となり，②から，

$$p_n=\frac{1}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^n+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^n,\quad q_n=\frac{2}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^n-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^n$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{p_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot7^n-2}{7^n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-2\cdot7^{-n}}{1+2\cdot7^{-n}}=2$

［解　説］

問題文が長く，また答案の書きにくい問題です。(3)の状態 B_n からの推移確率については，上面を AEFB，下面を DHGC として見ると，(1)が利用できます。なお，漸化式の解法については「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

$\boxed{13}$ ［千葉大］

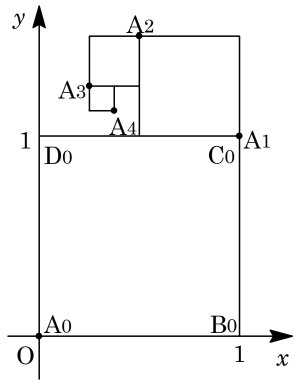
(1) 条件を図示すると，$\overrightarrow{A_0A_1}=(1,\ 1)$，$\overrightarrow{A_1A_2}=r(-1,\ 1)$，$\overrightarrow{A_2A_3}=r^2(-1,\ -1)$，$\overrightarrow{A_3A_4}=r^3(1,\ -1)$ となるので,

$$\overrightarrow{A_0A_2}=\overrightarrow{A_0A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}=(1-r,\ 1+r)$$

$$\overrightarrow{A_0A_3}=\overrightarrow{A_0A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}=(1-r-r^2,\ 1+r-r^2)$$

$$\overrightarrow{A_0A_4}=\overrightarrow{A_0A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}=(1-r-r^2+r^3,\ 1+r-r^2-r^3)$$

よって，$A_2(1-r,\ 1+r)$，$A_3(1-r-r^2,\ 1+r-r^2)$，$A_4(1-r-r^2+r^3,\ 1+r-r^2-r^3)$ である。



(2) $A_{4n}(x_n,\ y_n)$ とおくとき, (1)と同様にして,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA_{4n+4}}-\overrightarrow{OA_{4n}}&=\overrightarrow{A_{4n}A_{4n+1}}+\overrightarrow{A_{4n+1}A_{4n+2}}+\overrightarrow{A_{4n+2}A_{4n+3}}+\overrightarrow{A_{4n+3}A_{4n+4}}\\&=(r^4)^n\overrightarrow{A_0A_1}+(r^4)^n\overrightarrow{A_1A_2}+(r^4)^n\overrightarrow{A_2A_3}+(r^4)^n\overrightarrow{A_3A_4}\\&=r^{4n}(\overrightarrow{A_0A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4})=r^{4n}\overrightarrow{A_0A_4}\end{aligned}$$

よって，$x_{n+1}-x_n=r^{4n}(1-r-r^2+r^3)$，$y_{n+1}-y_n=r^{4n}(1+r-r^2-r^3)$

(3) $p=1-r-r^2+r^3=(1-r)^2(1+r)$，$q=1+r-r^2-r^3=(1+r)^2(1-r)$ とおく。

すると, (2)より, $n\geqq 1$ において,

$$x_n=x_0+\sum_{k=0}^{n-1}pr^{4k}=p\sum_{k=0}^{n-1}r^{4k},\quad y_n=y_0+\sum_{k=0}^{n-1}qr^{4k}=q\sum_{k=0}^{n-1}r^{4k}$$

ここで, $0<r<1$ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}r^{4k}=\frac{1}{1-r^4}=\frac{1}{(1+r)(1-r)(1+r^2)}$ となり,

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{p}{1-r^4}=\frac{1-r}{1+r^2},\quad \lim_{n\to\infty}y_n=\frac{q}{1-r^4}=\frac{1+r}{1+r^2}$$

［解 説］

回転の行列を利用して，一般的に解くこともできますが，設問(2)を見て，(1)を延長した解答例を記しています。

$\boxed{14}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［京都大］

(i)　$0<a\leqq 1$ のとき

$1<1+a^n\leqq 2$ より，$1<(1+a^n)^{\frac{1}{n}}\leqq 2^{\frac{1}{n}}$ となり，$n\to\infty$ のとき $2^{\frac{1}{n}}\to 1$ から，

$$\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}=1$$

(ii)　$a>1$ のとき

$a^n<1+a^n<2a^n$ より，$a<(1+a^n)^{\frac{1}{n}}<2^{\frac{1}{n}}a$ となり，$n\to\infty$ のとき $2^{\frac{1}{n}}\to 1$ から，

$$\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}=a$$

［解 説］

見かけよりは難です。極限を大雑把にとらえ不等式で評価しました。

$\boxed{15}$　　［東北大］

(1)　$n \geqq 2$ のとき，$a_n > 1$ であることを，数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=2$ のとき　$a_1=1$ なので，$a_2=\sqrt{\dfrac{3a_1+4}{2a_1+3}}=\sqrt{\dfrac{7}{5}}>1$

(ii)　$n=k$ のとき　$a_k>1$ と仮定すると，

$$a_{k+1}-1=\sqrt{\frac{3a_k+4}{2a_k+3}}-1=\sqrt{1+\frac{a_k+1}{2a_k+3}}-1>0$$

(i)(ii)より，$n \geqq 2$ のとき，$a_n>1$ である。

(2)　$\alpha^2=\dfrac{3\alpha+4}{2\alpha+3}$ より，$2\alpha^3+3\alpha^2-3\alpha-4=0$ となり，$(\alpha+1)(2\alpha^2+\alpha-4)=0$

$\alpha>0$ より，$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}$

(3)　すべての自然数 n に対して $a_n<\alpha$ となることを，数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1$ のとき　$\alpha-a_1=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}-1=\dfrac{\sqrt{33}-5}{4}>0$ より，$a_1<\alpha$ が成り立つ。

(ii)　$n=k$ のとき　$a_k<\alpha$ と仮定する。

$$\alpha-a_{k+1}=\sqrt{\frac{3\alpha+4}{2\alpha+3}}-\sqrt{\frac{3a_k+4}{2a_k+3}}=\frac{\sqrt{(3\alpha+4)(2a_k+3)}-\sqrt{(2\alpha+3)(3a_k+4)}}{\sqrt{2\alpha+3}\sqrt{2a_k+3}}$$

$$=\frac{(3\alpha+4)(2a_k+3)-(2\alpha+3)(3a_k+4)}{\sqrt{2\alpha+3}\sqrt{2a_k+3}\left\{\sqrt{(3\alpha+4)(2a_k+3)}+\sqrt{(2\alpha+3)(3a_k+4)}\right\}}$$

$$=\frac{\alpha-a_k}{\sqrt{2\alpha+3}\sqrt{2a_k+3}\left\{\sqrt{(3\alpha+4)(2a_k+3)}+\sqrt{(2\alpha+3)(3a_k+4)}\right\}}$$

よって，$\alpha-a_{k+1}>0$ から，$a_{k+1}<\alpha$ である。

(i)(ii)より，すべての自然数 n に対して $a_n<\alpha$ である。

(4)　(1)と(3)の結果より，$1 \leqq a_n<\alpha$ となり，

$$\frac{\alpha-a_{n+1}}{\alpha-a_n}=\frac{1}{\sqrt{2\alpha+3}\sqrt{2a_n+3}\left\{\sqrt{(3\alpha+4)(2a_n+3)}+\sqrt{(2\alpha+3)(3a_n+4)}\right\}}$$

$$\leqq\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{5}\left(\sqrt{35}+\sqrt{35}\right)}=\frac{1}{10\sqrt{35}}$$

すると，$r=\dfrac{1}{10\sqrt{35}}$ とすることができ，このとき，$\alpha-a_{n+1} \leqq r(\alpha-a_n)$ なので，

$$0<\alpha-a_n \leqq (\alpha-a_1)r^{n-1}=(\alpha-1)r^{n-1}$$

よって，$0<r<1$ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\alpha-a_n)=0$，すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha=\frac{-1+\sqrt{33}}{4}$

［解　説］

漸化式と極限についての頻出問題です。なお，誘導はていねいです。

16　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東北大］

(1)　$b_n=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}e^{n\sin\theta}\cos\theta\,d\theta=\Big[\frac{1}{n}e^{n\sin\theta}\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{n}\Big(e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\Big)$

(2)　$-\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{6}$ において，$\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq\cos\theta\leqq1$ であり，$e^{n\sin\theta}>0$ から，

$$\frac{\sqrt{3}}{2}e^{n\sin\theta}\leqq e^{n\sin\theta}\cos\theta\leqq e^{n\sin\theta}\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，①の各辺を $\theta=-\frac{\pi}{6}$ から $\theta=\frac{\pi}{6}$ まで積分すると，

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}e^{n\sin\theta}d\theta\leqq\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}e^{n\sin\theta}\cos\theta\,d\theta\leqq\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}e^{n\sin\theta}d\theta$$

よって，$\frac{\sqrt{3}}{2}a_n\leqq b_n\leqq a_n$ となり，$b_n\leqq a_n\leqq\frac{2}{\sqrt{3}}b_n$ である。

(3)　(1)(2)より，$nb_n\leqq na_n\leqq\frac{2}{\sqrt{3}}nb_n$ となり，$e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\leqq na_n\leqq\frac{2}{\sqrt{3}}\Big(e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\Big)$ から，

$$\frac{1}{n}\log\Big(e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\Big)\leqq\frac{1}{n}\log(na_n)\leqq\frac{1}{n}\log\frac{2}{\sqrt{3}}\Big(e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\Big)\cdots\cdots\cdots②$$

さて，$n\to\infty$ のとき，

$$\frac{1}{n}\log\Big(e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\Big)=\frac{1}{n}\log e^{\frac{n}{2}}(1-e^{-n})=\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{2}+\frac{1}{n}\log(1-e^{-n})\to\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{n}\log\frac{2}{\sqrt{3}}\Big(e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\Big)=\frac{1}{n}\log\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{n}\log\Big(e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\Big)\to0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

よって，②より，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(na_n)=\frac{1}{2}$

［解 説］

不等式を証明し，はさみうちの原理から極限へとつなぐ典型題です。

$\boxed{17}$　　［東京工大］

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，$\sin 4nx \geqq \sin x$ を満たす x の範囲は，$0 \leqq 4nx \leqq 2n\pi$ から，

$$2k\pi + x \leqq 4nx \leqq (2k+1)\pi - x \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$$

すると，$2k\pi + x \leqq 4nx$ より，$x \geqq \dfrac{2\pi}{4n-1}k$

また，$4nx \leqq (2k+1)\pi - x$ より，$x \leqq \dfrac{2\pi}{4n+1}k + \dfrac{\pi}{4n+1}$

よって，$\dfrac{2\pi}{4n-1}k \leqq x \leqq \dfrac{2\pi}{4n+1}k + \dfrac{\pi}{4n+1}$　$(k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$………(＊)

(＊)の x の区間の長さを d_k，その総和を S_n とおくと，

$$d_k = \frac{2\pi}{4n+1}k + \frac{\pi}{4n+1} - \frac{2\pi}{4n-1}k$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} d_k = \frac{2\pi}{4n+1}\cdot\frac{1}{2}(n-1)n + \frac{\pi}{4n+1}n - \frac{2\pi}{4n-1}\cdot\frac{1}{2}(n-1)n$$

$$= \frac{n^2}{4n+1}\pi - \frac{n(n-1)}{4n-1}\pi = \frac{n(2n+1)}{(4n+1)(4n-1)}\pi$$

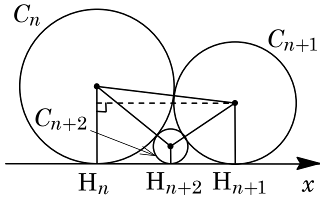
これより，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{\left(4+\frac{1}{n}\right)\left(4-\frac{1}{n}\right)}\pi = \frac{1}{8}\pi$ となる。

［解　説］

最初は和積公式で変形しましたが，深みにはまりそうなので，不等式を満たす x の範囲を，$x \leqq 4nx \leqq \pi - x$，$2\pi + x \leqq 4nx \leqq 2\pi + \pi - x$，$4\pi + x \leqq 4nx \leqq 4\pi + \pi - x$，…として求め，それをまとめたのが，上の解答例です。

$\boxed{18}$　　　　［名古屋大］

(1) 円 C_n，C_{n+1}，C_{n+2} の中心から x 軸に垂線を下ろし，その足をそれぞれ H_n，H_{n+1}，H_{n+2} とおくと，



$$\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+1}=\sqrt{(r_n+r_{n+1})^2-(r_n-r_{n+1})^2}$$
$$=2\sqrt{r_nr_{n+1}}$$

同様にして，$\mathrm{H}_{n+1}\mathrm{H}_{n+2}=2\sqrt{r_{n+1}r_{n+2}}$

$$\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+2}=2\sqrt{r_nr_{n+2}}$$

すると，$\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+1}=\mathrm{H}_{n+1}\mathrm{H}_{n+2}+\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+2}$ より，

$$2\sqrt{r_nr_{n+1}}=2\sqrt{r_{n+1}r_{n+2}}+2\sqrt{r_nr_{n+2}}$$

両辺を $2\sqrt{r_nr_{n+1}r_{n+2}}$ で割って，$\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{r_n}}+\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}$ ………①

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{r_n}}=a_n$ とおくと，$r_1=r_2=1$ から $a_1=a_2=1$ となり，①より，

$$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}，\ a_{n+2}-a_{n+1}-a_n=0 ………②$$

ここで，2 次方程式 $x^2-x-1=0$ の 2 つの解を $x=p,\ q\ (p<q)$ とおくと，$p=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，$q=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ となる。

すると，②を変形して，$a_{n+2}-pa_{n+1}=q(a_{n+1}-pa_n)$ から，

$$a_{n+1}-pa_n=(a_2-pa_1)q^{n-1}=(1-p)q^{n-1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}q^{n-1}=q^n ………③$$

同様に，②より，$a_{n+2}-qa_{n+1}=p(a_{n+1}-qa_n)$ となり，

$$a_{n+1}-qa_n=(a_2-qa_1)p^{n-1}=(1-q)p^{n-1}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}p^{n-1}=p^n ………④$$

③④より，$(-p+q)a_n=-p^n+q^n$ から，$a_n=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}p^n+\dfrac{1}{\sqrt{5}}q^n$

すると，条件から $a_n=s\alpha^n+t\beta^n$ なので，定数 α，β，s，t の値の 1 つとして，

$$\alpha=p=\frac{1-\sqrt{5}}{2}，\ \beta=q=\frac{1+\sqrt{5}}{2}，\ s=-\frac{1}{\sqrt{5}}，\ t=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

(3) (2)より，$r_n=\dfrac{1}{(s\alpha^n+t\beta^n)^2}$ より，$\dfrac{r_n}{k^n}=\dfrac{1}{k^n(s\alpha^n+t\beta^n)^2}$

まず，$k\leqq 0$ のとき，明らかに $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{k^n}$ が正の値に収束する場合はない。

そこで，$k>0$ として，$\dfrac{r_n}{k^n}=\dfrac{1}{\{s(\sqrt{k}\alpha)^n+t(\sqrt{k}\beta)^n\}^2}$

さて，$|\alpha|<1<|\beta|$ より，$|\sqrt{k}\alpha|<\sqrt{k}<|\sqrt{k}\beta|=\sqrt{k}\beta$ となり，

(i) $\sqrt{k}\beta>1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{k^n}=0$ となり，正の値に収束しない。

(ii)　$0<\sqrt{k}\beta<1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{k^n}=\infty$ となり，正の値に収束しない。

(iii)　$\sqrt{k}\beta=1\left(\sqrt{k}=\dfrac{1}{\beta}\right)$ のとき

このとき，$\dfrac{r_n}{k^n}=\dfrac{1}{\left\{s\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^n+t\right\}^2}$ となり，$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|<1$ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{k^n}=\frac{1}{t^2}=5$

(i)～(iii)より，数列 $\left\{\dfrac{r_n}{k^n}\right\}$ が正の値に収束するのは，$k=\dfrac{1}{\beta^2}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ のときであり，このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{k^n}=5$ である。

［解　説］

ときどき見かける有名な構図の問題で，(2)までは定番といってもよいものです。