1　　［東北大・文］

$a>0$ を実数とする。関数 $f(t)=-4t^3+(a+3)t$ の $0\leqq t\leqq 1$ における最大値を $M(a)$ とする。

(1)　$M(a)$ を求めよ。

(2)　実数 $x>0$ に対し，$g(x)=M(x)^2$ とおく。xy 平面において，関数 $y=g(x)$ のグラフに点 $(s,\ g(s))$ で接する直線が原点を通るとき，実数 $s>0$ とその接線の傾きを求めよ。

(3)　a が正の実数全体を動くとき，$k=\dfrac{M(a)}{\sqrt{a}}$ の最小値を求めよ。

2　［東京医歯大］

実数 $a,\ b$ に対し，$f(x)=x^3-3ax+b$ とおく。$-1\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$a>0$ のとき，$f(x)$ の極値を $a,\ b$ を用いて表せ。

(2)　$b\geqq 0$ のとき，M を $a,\ b$ を用いて表せ。

(3)　$a,\ b$ が実数全体を動くとき，M のとりうる値の範囲を求めよ。

3　　　　［九州大・理］

C_1，C_2 をそれぞれ次式で与えられる放物線の一部分とする。

$$C_1 : y = -x^2 + 2x\ (0 \leqq x \leqq 2),\ C_2 : y = -x^2 - 2x\ (-2 \leqq x \leqq 0)$$

また，a を実数とし，直線 $y = a(x+4)$ を l とする。

(1)　直線 l と C_1 が異なる 2 つの共有点をもつための a の値の範囲を求めよ。

以下，a が(1)の条件を満たすとする。このとき，l と C_1 で囲まれた領域の面積を S_1，x 軸と C_2 で囲まれた領域で l の下側にある部分の面積を S_2 とする。

(2)　S_1 を a を用いて表せ。

(3)　$S_1 = S_2$ を満たす実数 a が $0 < a < \dfrac{1}{5}$ の範囲に存在することを示せ。

4　　［一橋大］

a を実数とし，$f(x)=x^3-3ax$ とする。区間 $-1\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M とする。M の最小値とそのときの a の値を求めよ。

$\boxed{5}$ ［岡山大］

関数 $f(x)=8x^3-6x-1$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)=0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(2) $a=\cos\dfrac{5\pi}{9}$ とするとき，$f(a)$ の値を求めよ。

(3) 不等式 $-\dfrac{1}{5}<\cos\dfrac{5\pi}{9}<-\dfrac{1}{6}$ を証明せよ。

6　　［九州大・文］

座標平面において，x 軸上に 3 点 $(0,\ 0)$，$(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ $(0<\alpha<\beta)$ があり，曲線 $C: y = x^3 + ax^2 + bx$ が x 軸とこの 3 点で交わっているものとする。ただし，a, b は実数である。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　曲線 C と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和を S とする。S を α と β の式で表せ。

(2)　β の値を固定して，$0<\alpha<\beta$ の範囲で α を動かすとき，S を最小とする α を β の式で表せ。

７　　　　［大阪大・文］

曲線$C : y=\left|\dfrac{1}{2}x^2-6\right|-2x$を考える。

(1)　Cと直線$L : y=-x+t$が異なる４点で交わるようなtの値の範囲を求めよ。

(2)　CとLが異なる４点で交わるとし，その交点をx座標が小さいものから順に，P_1，P_2，P_3，P_4とするとき，$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}|+|\overrightarrow{\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4}|}{|\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}|}=4$となるような$t$の値を求めよ。

(3)　tが(2)の値をとるとき，Cと線分$\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$で囲まれる図形の面積を求めよ。

$\boxed{8}$ 　　［筑波大・理］

$a,\ b,\ c$ を実数とし，β, m をそれぞれ $0<\beta<1$，$m>0$ を満たす実数とする。また,関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は $x=\beta,\ -\beta$ で極値をとり，$f(-1)=f(\beta)=-m$，$f(1)=f(-\beta)=m$ を満たすとする。

(1) a, b, c および β, m の値を求めよ。

(2) 関数 $g(x)=x^3+px^2+qx+r$ は，$-1\leqq x\leqq 1$ に対して $f(-1)\leqq g(x)\leqq f(1)$ を満たすとする。$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくとき，$h(-1)$，$h(-\beta)$，$h(\beta)$，$h(1)$ それぞれと 0 との大きさを比較することにより，$h(x)$ を求めよ。

9　　　　［広島大・理］

$a>0$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(t)=t^3-2at+1$ の区間 $t\geqq 0$ における最小値を，a を用いて表せ。

(2)　(1)で求めた最小値が 0 となるときの a の値を A とおく。A^3 を求めよ。

(3)　座標平面上の曲線 $y=x^4$ を C_1，点 $(0,\ a)$ を中心とする半径 a の円を C_2 とする。C_1 と C_2 の共有点の個数を調べよ。

(4)　座標平面において，点 P が曲線 $y=x^4$ 上を動くときの点 P と点 $(0,\ a)$ の距離の最小値を考える。その最小値が a に等しくなるような a の値の範囲を求めよ。

10　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［金沢大・文］

$a>0$ とし，放物線 $C: y=a(x-1)^2+1$ を考える。C 上の点 P における C の接線 l の方程式を $y=Ax+B$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) P の x 座標を s とするとき，A と B を a と s を用いて表せ。

(2) 接線 l は，原点 O(0, 0) を通り，傾きは正であるとする。このとき，l の方程式を求めよ。

(3) (2)で求めた接線 l と放物線 C および y 軸で囲まれた図形の面積 $S(a)$ を求めよ。

(4) $\dfrac{S(a)}{\sqrt[4]{a}}$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

$\boxed{11}$ ［名古屋大・文］

a を正の定数とする。2 次関数 $f(x)=ax^2$ と 3 次関数 $g(x)=x(x-4)^2$ について，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=g(x)$ について，極値を求め，そのグラフを描け。

(2) 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ は相異なる 3 点で交わることを示せ。

(3) 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるように a の値を定めよ。またそのとき，2 つの曲線の交点の x 座標を求めよ。

$\boxed{12}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大］

$a>0$ とし，$f(x)=x^3-3a^2x$ とおく。

(1)　$x \geqq 1$ で $f(x)$ が単調に増加するための，a についての条件を求めよ。

(2)　次の 2 条件を満たす点 $(a,\ b)$ の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ。

条件 1：方程式 $f(x)=b$ は相異なる 3 実数解をもつ。

条件 2：さらに，方程式 $f(x)=b$ の解を $\alpha<\beta<\gamma$ とすると $\beta>1$ である。

$\boxed{13}$　［金沢大・文］

関数$f(x)$は等式 $f(x)=|x-1|+\int_0^2 xf(t)dt$を満たすとし，$\int_0^2 f(t)dt=a$とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$f(2)$をaを用いて表せ。

(2)　aの値を求めよ。

(3)　kは定数とする。$y=xf(x)-k$のグラフと$y=ax^2$のグラフの共有点の個数を求めよ。

$\boxed{14}$ ［千葉大］

a を正の数とし，t は $0 \leqq t < a$ を満たす数とする。点 $(t,\ (t-a)^2)$ における曲線 $y=(x-a)^2$ の接線と，x 軸および y 軸で囲まれた領域を $D(t)$ とする。

(1) 領域 $D(t)$ の表す図形の面積を a および t を用いて表せ。

(2)領域 $D(t)$ の表す図形の面積の最大値，およびそのときの t の値を a を用いて表せ。

(3) s は $0 \leqq s \leqq t$ を満たす数とする。領域 $D(t)$ と領域 $D(s)$ を合わせてできる領域 $D(t) \cup D(s)$ の表す図形の面積の最大値，およびそのときの s と t の値を a を用いて表せ。