1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東北大・文］

(1)　$f(t)=-4t^3+(a+3)t$ に対して，$f'(t)=-12t^2+a+3$

$a>0$ より，$f'(t)=0$ の解は $t=\pm\sqrt{\dfrac{a+3}{12}}$ となる。

(i)　$\sqrt{\dfrac{a+3}{12}}<1\ (0<a<9)$ のとき

$0\leqq t\leqq 1$ における $f(t)$ の増減は右表のようになる。これより，$f(t)$ は $t=\sqrt{\dfrac{a+3}{12}}$ において最大値 $M(a)$ をとり，

t	0	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{a+3}{12}}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$$M(a)=\sqrt{\frac{a+3}{12}}\Big(-4\cdot\frac{a+3}{12}+a+3\Big)=\frac{\sqrt{a+3}}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{3}(a+3)=\frac{\sqrt{3}}{9}(a+3)^{\frac{3}{2}}$$

(ii)　$\sqrt{\dfrac{a+3}{12}}\geqq 1\ (a\geqq 9)$ のとき

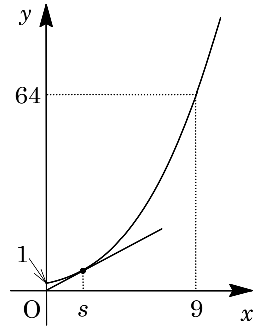
$0\leqq t\leqq 1$ において $f(t)$ は単調増加するので，$t=1$ において最大値 $M(a)$ をとり，

$$M(a)=-4+(a+3)=a-1$$

(2)　$g(x)=M(x)^2$ より，(1)から，

$$g(x)=\Big\{\frac{\sqrt{3}}{9}(x+3)^{\frac{3}{2}}\Big\}^2=\frac{1}{27}(x+3)^3\quad(0<x<9)$$

$$g(x)=(x-1)^2\quad(x\geqq 9)$$



さて，点 $(s,\ g(s))$ で接する直線が原点を通るより，

$$\frac{g(s)}{s}=g'(s)\cdots\cdots\cdots(*)$$

(i)　$0<s<9$ のとき

$(*)$より，$\dfrac{1}{27}\cdot\dfrac{(s+3)^3}{s}=\dfrac{1}{9}(s+3)^2$ から $s+3=3s$ となり，$s=\dfrac{3}{2}$

(ii)　$s\geqq 9$ のとき　$(*)$より，$\dfrac{(s-1)^2}{s}=2(s-1)$ から $s=-1$ となるが，成立しない。

(i)(ii)より，$s=\dfrac{3}{2}$ となり，このとき接線の傾きは，$\dfrac{1}{9}\Big(\dfrac{3}{2}+3\Big)^2=\dfrac{9}{4}$ である。

(3)　$k=\dfrac{M(a)}{\sqrt{a}}$ より，$k^2=\dfrac{M(a)^2}{a}=\dfrac{g(a)}{a}$ となり，k^2 は原点 O と点 $(a,\ g(a))$ を結ぶ直線の傾きとなる。

すると，(2)より k^2 の最小値は $\dfrac{9}{4}$ となるので，k の最小値は $\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\dfrac{3}{2}$ である。

［解 説］

微分法の総合問題です。(3)の分数関数を直線の傾きとみる方法は必須技法です。

$\boxed{2}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京医歯大］

(1)　$f(x)=x^3-3ax+b$ とおくと，$a>0$ のとき，

$$f'(x)=3x^2-3a=3(x^2-a)=3(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})$$

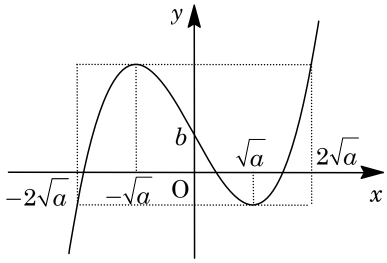
これより，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	$\cdots$	$-\sqrt{a}$	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

よって，極大値 $f(-\sqrt{a})=2a\sqrt{a}+b$，極小値 $f(\sqrt{a})=-2a\sqrt{a}+b$ である。

(2)　まず，$f(x)+f(-x)=2b$ より，$y=f(x)$ のグラフは点 $(0,\ b)$ に関して対称である。そして，$-1\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M とすると，$b\geqq 0$ の場合では，

(i)　$a>0$ のとき　(1)より $y=f(x)$ は右図のようになり，



(i-i)　$\sqrt{a}>1\ (a>1)$ のとき

$$M=|f(-1)|=f(-1)=-1+3a+b$$

(i-ii)　$\sqrt{a}\leqq 1<2\sqrt{a}\ \left(\frac{1}{4}<a\leqq 1\right)$ のとき

$$M=\left|f(-\sqrt{a})\right|=f(-\sqrt{a})=2a\sqrt{a}+b$$

(i-iii)　$2\sqrt{a}\leqq 1\ \left(0<a\leqq\frac{1}{4}\right)$ のとき

$$M=|f(1)|=f(1)=1-3a+b$$

(ii)　$a\leqq 0$ のとき　$f'(x)\geqq 0$ より $f(x)$ は単調増加し，

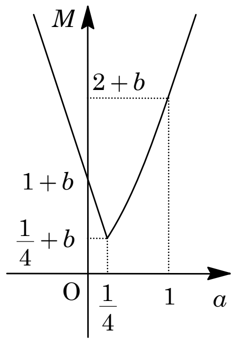
$$M=|f(1)|=f(1)=1-3a+b$$

(i)(ii)より，$|f(x)|$ の最大値 M は，

$$M=-1+3a+b\ (a>1),\quad M=2a\sqrt{a}+b\ \left(\frac{1}{4}<a\leqq 1\right)$$

$$M=1-3a+b\ \left(a\leqq\frac{1}{4}\right)$$

(3)　$b\geqq 0$ のとき，b の値を固定して，$a,\ M$ の関係を図示すると，右図のようになり，b が $b\geqq 0$ で動くとき，$M\geqq\frac{1}{4}$ である。



また，$b<0$ のとき，(2)と同様にすると，

(i)　$a>1$ のとき　$M=|f(1)|=-f(1)=-1+3a-b$

(ii)　$\frac{1}{4}<a\leqq 1$ のとき　$M=\left|f(\sqrt{a})\right|=-f(\sqrt{a})=2a\sqrt{a}-b$

(iii)　$a\leqq\frac{1}{4}$ のとき　$M=|f(-1)|=-f(-1)=1-3a-b$

(i)〜(iii)より，b が $b<0$ で動くとき，$M>\frac{1}{4}$ である。

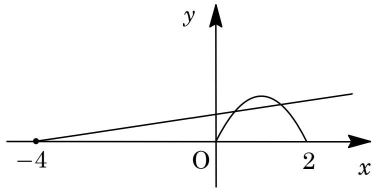
以上より，$a,\ b$ が実数全体を動くとき，M のとりうる範囲は $M\geqq\frac{1}{4}$ である。

［解 説］

よく見かける 3 次関数の増減に関する問題ですが，絶対値をとる設定のため，複雑になっています。なお，上のグラフに破線で長方形を書き込んでいますが，この知識が方針を立てるうえで，ポイントになります。

3　　［九州大・理］

(1)　$C_1: y=-x^2+2x\ (0\leqq x\leqq 2)$ と $l: y=a(x+4)$ の式を連立すると，$-x^2+2x=a(x+4)$ から，



$$x^2+(a-2)x+4a=0\cdots\cdots\cdots①$$

l と C_1 が $0<x<2$ で接する条件は，①より，

$$D=(a-2)^2-16a=0\cdots\cdots\cdots②$$

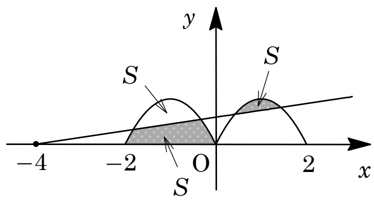
$$0<-\frac{a-2}{2}<2\cdots\cdots\cdots③$$

②より，$a^2-20a+4=0$，$a=10\pm4\sqrt{6}$ となり，③から $-2<a<2$ なので，満たす a の値は，$a=10-4\sqrt{6}$ である。したがって，l と C_1 が異なる 2 つの共有点をもつ条件は，右上図より，$0\leqq a<10-4\sqrt{6}$ である。

(2)　①の解 $x=\dfrac{-(a-2)\pm\sqrt{a^2-20a+4}}{2}$ を，$x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，l と C_1 で囲まれた領域の面積を S_1 は，

$$S_1=\int_\alpha^\beta\{-x^2+2x-a(x+4)\}dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$
$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\left(\sqrt{a^2-20a+4}\right)^3$$

(3)　まず，x 軸と C_1 で囲まれた領域の面積は，



$$\int_0^2(-x^2+2x)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$$

次に，C_1 と y 軸対称である $C_2: y=-x^2-2x\ (-2\leqq x\leqq 0)$ と $l: y=a(x+4)$ の式を連立すると，$x^2+(a+2)x+4a=0\cdots\cdots\cdots④$

ここで，l と C_2 で囲まれた領域の面積を S_3 とおき，(2)と同様にすると，④の解が $x=\dfrac{-(a+2)\pm\sqrt{a^2-12a+4}}{2}$ より，$S_3=\dfrac{1}{6}\left(\sqrt{a^2-12a+4}\right)^3$ となる。

さて，条件より x 軸と C_2 で囲まれた領域で l の下側にある部分の面積 S_2 に対し，$F(a)=S_1-S_2$ とおくと，$S_2=\dfrac{4}{3}-S_3$ より，

$$F(a)=\frac{1}{6}\left(\sqrt{a^2-20a+4}\right)^3+\frac{1}{6}\left(\sqrt{a^2-12a+4}\right)^3-\frac{4}{3}$$

すると，$F(0)=\dfrac{4}{3}>0$，$F\left(\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1+41\sqrt{41}}{5^3}-8\right)<0$ より，$F(a)=0$ すなわち $S_1=S_2$ を満たす実数 a が $0<a<\dfrac{1}{5}$ の範囲に存在する。

［解　説］

$10-4\sqrt{6}\fallingdotseq0.202$ より，(3)の結論は，図からほとんど明らかなのですが……。

$\boxed{4}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［一橋大］

$f(x)=x^3-3ax$ に対し，$f(-x)=-f(x)$ から，$|f(-x)|=|-f(x)|=|f(x)|$

すると，$-1\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値は，$0\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値に等しい。以下，$0\leqq x\leqq 1$ で考える。

さて，$f'(x)=3x^2-3a=3(x^2-a)$ より，

(i)　$a\leqq 0$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)$ は単調増加し，$|f(x)|$ の最大値 M は，

$$M=|f(1)|=f(1)=1-3a$$

x	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	↗	$1-3a$

(ii)　$a>0$ のとき

$f'(x)=3(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})$ となり，$x\geqq 0$ における $f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0	↘	$-2a\sqrt{a}$	↗

(ii-i)　$0<\sqrt{a}<1$ $(0<a<1)$ のとき

まず一般的に，X と Y の小さくない方を $\max\{X,\ Y\}$ と表すと，$0\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値 M は，

$$M=\max\{|f(\sqrt{a})|,\ |f(1)|\}=\max\{2a\sqrt{a},\ |1-3a|\}$$

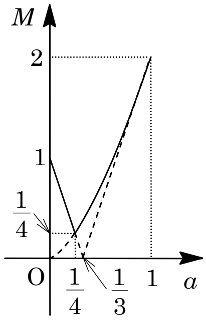
ここで，$2a\sqrt{a}=|1-3a|$ として，両辺を 2 乗すると，

$$4a^3=(1-3a)^2,\ 4a^3-9a^2+6a-1=0$$

すると，$(4a-1)(a-1)^2=0$ から，$a=\frac{1}{4},\ 1$

これより，a と M の関係は右図の実線のようになり，

$$M=1-3a\left(0<a<\frac{1}{4}\right),\ M=2a\sqrt{a}\left(\frac{1}{4}\leqq a<1\right)$$



(ii-ii)　$\sqrt{a}\geqq 1$ $(a\geqq 1)$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)$ は単調減少し，$|f(x)|$ の最大値 M は，

$$M=|f(1)|=-f(1)=-1+3a$$

(i)(ii)より，$-1\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値 M は，

$$M=1-3a\left(a<\frac{1}{4}\right),\ M=2a\sqrt{a}\left(\frac{1}{4}\leqq a<1\right),\ M=-1+3a\ (a\geqq 1)$$

以上より，M は $a=\frac{1}{4}$ のとき最小値 $\frac{1}{4}$ をとる。

［解 説］

関数の最大・最小に関する有名問題です。まったく同じ問題の演習経験があるかもしれません。なお，ポイントは偶関数に気付くことです。

$\boxed{5}$ ［岡山大］

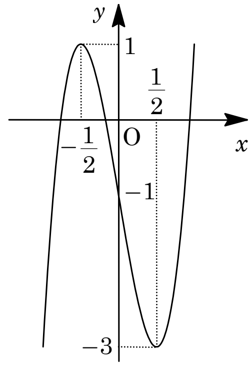
(1) $f(x) = 8x^3 - 6x - 1$ に対し，

$$f'(x) = 24x^2 - 6 = 6(2x+1)(2x-1)$$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$

これより，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$y = f(x)$ のグラフは x 軸と 3 つの共有点をもつ。

したがって，$f(x) = 0$ を満たす実数 x は 3 個存在する。



(2) $\theta = \frac{5}{9}\pi$ とおき，$a = \cos\theta$ のとき，

$$f(a) = 8a^3 - 6a - 1 = 2(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) - 1$$
$$= 2\cos 3\theta - 1 = 2\cos\frac{5\pi}{3} - 1 = 2\cdot\frac{1}{2} - 1 = 0$$

(3) $\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{9} < \frac{2\pi}{3}$ より，$\cos\frac{\pi}{2} > \cos\frac{5\pi}{9} > \cos\frac{2\pi}{3}$ となり，

$$-\frac{1}{2} < a < 0$$

すると，(2)より，a は $f(x) = 0$ の 3 つの解のうち，まん中のものであり，

$$f\left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{8}{125} + \frac{6}{5} - 1 = \frac{17}{125} > 0,\quad f\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{27} + 1 - 1 = -\frac{1}{27} < 0$$

よって，$-\frac{1}{5} < a < -\frac{1}{6}$，すなわち $-\frac{1}{5} < \cos\frac{5\pi}{9} < -\frac{1}{6}$ である。

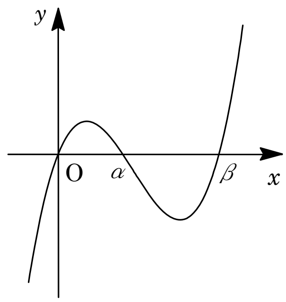
［解　説］

微分法の不等式への応用問題です。ここでは，余弦の 3 倍角の公式がポイントになっています。

$\boxed{6}$ ［九州大・文］

(1) 曲線$C: y=x^3+ax^2+bx$がx軸と 3 点$(0,\ 0)$，$(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ $(0<\alpha<\beta)$で交わっているので，Cは，

$$y=x(x-\alpha)(x-\beta)=x^3-(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x$$



さて，Cとx軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和をSとし，$f(x)=x^3-(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x$とおくと，

$$S=\int_0^\alpha f(x)dx+\int_\alpha^\beta -f(x)dx$$
$$=\int_0^\alpha f(x)dx-\left(\int_0^\beta f(x)dx-\int_0^\alpha f(x)dx\right)$$
$$=2\int_0^\alpha f(x)dx-\int_0^\beta f(x)dx$$
$$=2\left[\frac{x^4}{4}-\frac{\alpha+\beta}{3}x^3+\frac{\alpha\beta}{2}x^2\right]_0^\alpha-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{\alpha+\beta}{3}x^3+\frac{\alpha\beta}{2}x^2\right]_0^\beta$$
$$=2\left(\frac{\alpha^4}{4}-\frac{\alpha^4+\alpha^3\beta}{3}+\frac{\alpha^3\beta}{2}\right)-\left(\frac{\beta^4}{4}-\frac{\alpha\beta^3+\beta^4}{3}+\frac{\alpha\beta^3}{2}\right)$$
$$=-\frac{1}{6}\alpha^4+\frac{1}{3}\alpha^3\beta+\frac{1}{12}\beta^4-\frac{1}{6}\alpha\beta^3$$

(2) βの値を固定し，Sをαの関数と考え$S(\alpha)$と記すと，(1)から，

$$S(\alpha)=-\frac{1}{6}\alpha^4+\frac{\beta}{3}\alpha^3-\frac{\beta^3}{6}\alpha+\frac{1}{12}\beta^4\quad(0<\alpha<\beta)$$
$$S'(\alpha)=-\frac{2}{3}\alpha^3+\beta\alpha^2-\frac{\beta^3}{6}=-\frac{1}{6}(4\alpha^3-6\beta\alpha^2+\beta^3)$$
$$=-\frac{1}{6}(2\alpha-\beta)(2\alpha^2-2\beta\alpha-\beta^2)$$

すると，$\alpha=\frac{\beta}{2}$，$\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}\beta$のとき$S'(\alpha)=0$となり，$0<\alpha<\beta$における$S(\alpha)$の増減は右表のようになる。

α	0	$\cdots$	$\frac{\beta}{2}$	$\cdots$	β
$S'(\alpha)$		$-$	0	$+$	
$S(\alpha)$		$\searrow$		$\nearrow$	

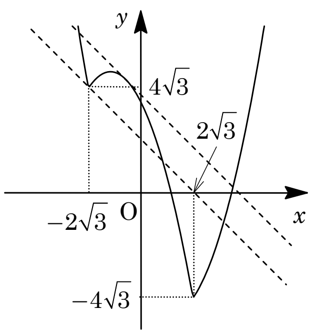
よって，$\alpha=\frac{\beta}{2}$のとき，Sは最小となる。

［解 説］

定積分と面積についての基本問題です。ただ，(2)の結論は感覚的にわかりますが。

7　　［大阪大・文］

(1)　曲線 $C : y=\left|\dfrac{1}{2}x^2-6\right|-2x$ に対して，



(i)　$\dfrac{1}{2}x^2-6\geqq 0\ (x\leqq -2\sqrt{3},\ 2\sqrt{3}\leqq x)$ のとき

$$y=\frac{1}{2}x^2-2x-6=\frac{1}{2}(x-2)^2-8\cdots\cdots\cdots①$$

(ii)　$\dfrac{1}{2}x^2-6<0\ (-2\sqrt{3}<x<2\sqrt{3})$ のとき

$$y=-\frac{1}{2}x^2-2x+6=-\frac{1}{2}(x+2)^2+8\cdots\cdots\cdots②$$

さて，直線 $L : y=-x+t$ ……③が点 $(-2\sqrt{3},\ 4\sqrt{3})$ を通るとき，$t=-2\sqrt{3}+4\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ となる。

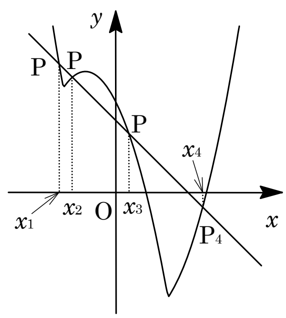
また，L が放物線②と $x=s$ で接するとき，②から $y'=-x-2$ なので，

$$-s-2=-1,\ s=-1$$

すると，接点 $\left(-1,\ \dfrac{15}{2}\right)$ となり，このとき $t=-1+\dfrac{15}{2}=\dfrac{13}{2}$ である。

以上より，C と L が異なる 4 点で交わる t の範囲は，$2\sqrt{3}<t<\dfrac{13}{2}$ である。

(2)　C と L が異なる 4 点 P_1，P_2，P_3，P_4 で交わるとき，その x 座標をそれぞれ x_1，x_2，x_3，x_4 とおく。



まず，①③を連立して，$\dfrac{1}{2}x^2-2x-6=-x+t$ となり，

$$x^2-2x-2t-12=0$$

この解が $x=x_1$，x_4 より，

$$x_1+x_4=2,\ x_1x_4=-2t-12\cdots\cdots\cdots④$$

次に，②③を連立して，$-\dfrac{1}{2}x^2-2x+6=-x+t$ となり，

$$x^2+2x+2t-12=0$$

この解が $x=x_2$，x_3 より，$x_2+x_3=-2$，$x_2x_3=2t-12\cdots\cdots\cdots⑤$

すると，L の傾きが -1 から，

$$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|=\sqrt{2}(x_2-x_1),\ \left|\overrightarrow{P_3P_4}\right|=\sqrt{2}(x_4-x_3),\ \left|\overrightarrow{P_2P_3}\right|=\sqrt{2}(x_3-x_2)$$

ここで，条件より，$\dfrac{\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|+\left|\overrightarrow{P_3P_4}\right|}{\left|\overrightarrow{P_2P_3}\right|}=4$ なので，$\dfrac{(x_2-x_1)+(x_4-x_3)}{x_3-x_2}=4$

$$x_4-x_1=5(x_3-x_2),\ (x_4-x_1)^2=25(x_3-x_2)^2$$

$$(x_1+x_4)^2-4x_1x_4=25\{(x_2+x_3)^2-4x_2x_3\}$$

④⑤を代入して，$4-4(-2t-12)=25\{4-4(2t-12)\}$ となり，

$$1+2t+12=25(1-2t+12),\ 52t-312=0$$

よって，求める t の値は，$t=6$ である。

(3)　$t=6$ のとき，$x_2+x_3=-2$，$x_2x_3=0$ より，$(x_2,\ x_3)=(-2,\ 0)$ となる。

このとき，C と線分 $\mathrm{P_2P_3}$ で囲まれる図形の面積 S は，

$$S=\int_{-2}^{0}\left\{-\frac{1}{2}x^2-2x+6-(-x+6)\right\}dx=-\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}x(x+2)\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\right)(0+2)^3=\frac{2}{3}$$

［解　説］

絶対値つき関数のグラフを題材とした総合問題です。解答例では，C と L をそのまま扱いましたが，曲線 $y=\left|\frac{1}{2}x^2-6\right|-x$ と直線 $y=t$ という組で処理しても構いません。計算量が少しだけ減少します。

$\boxed{8}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［筑波大・理］

(1) 関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は $x=\beta,\ -\beta\ (0<\beta<1)$ で極値をとるので，$f'(\beta)=f'(-\beta)=0$ となり，$f'(x)=3x^2+2ax+b$ から，

$$f'(x)=3(x+\beta)(x-\beta)=3x^2-3\beta^2$$

すると，k を定数として，$f(x)=x^3-3\beta^2x+k$ である。

さて，条件より，$m>0$ で，$f(-1)=f(\beta)=-m$ より，

$$-1+3\beta^2+k=-m\ \cdots\cdots\text{①},\ -2\beta^3+k=-m\ \cdots\cdots\text{②}$$

また，$f(1)=f(-\beta)=m$ より，

$$1-3\beta^2+k=m\ \cdots\cdots\text{③},\ 2\beta^3+k=m\ \cdots\cdots\text{④}$$

②④より，$k=0$，$m=2\beta^3$ となり，①③に代入すると①と③は一致し，

$$2\beta^3+3\beta^2-1=0,\ (2\beta-1)(\beta+1)^2=0$$

すると，$0<\beta<1$ から $\beta=\dfrac{1}{2}$ となり，$m=2\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{4}$

そして，$f(x)=x^3-\dfrac{3}{4}x$ から，$a=0$，$b=-\dfrac{3}{4}$，$c=0$

(2) 関数 $g(x)=x^3+px^2+qx+r$ は，$-1\leqq x\leqq 1$ のとき $-m\leqq g(x)\leqq m$ を満たし，$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくとき，

$$h(-1)=f(-1)-g(-1)=-m-g(-1)\leqq 0\ \cdots\cdots\text{⑤}$$
$$h(-\beta)=f(-\beta)-g(-\beta)=m-g(-\beta)\geqq 0\ \cdots\cdots\text{⑥}$$
$$h(\beta)=f(\beta)-g(\beta)=-m-g(\beta)\leqq 0\ \cdots\cdots\text{⑦}$$
$$h(1)=f(1)-g(1)=m-g(1)\geqq 0\ \cdots\cdots\text{⑧}$$

ここで，$h(x)$ は 2 次以下の関数となり，$h(x)=sx^2+tx+u$ とおくと，⑤⑧より，

$$s-t+u\leqq 0\ \cdots\cdots\text{⑨},\ s+t+u\geqq 0\ \cdots\cdots\text{⑩}$$

そして，$\beta=\dfrac{1}{2}$ から，⑥⑦より，

$$\frac{1}{4}s-\frac{1}{2}t+u\geqq 0\ \cdots\cdots\text{⑪},\ \frac{1}{4}s+\frac{1}{2}t+u\leqq 0\ \cdots\cdots\text{⑫}$$

すると，⑩－⑨から $t\geqq 0$，⑫－⑪から $t\leqq 0$ となるので，$t=0$ である。

これより，⑨から $s+u\leqq 0$，⑩から $s+u\geqq 0$ となるので，$s+u=0\ \cdots\cdots$⑬

さらに，⑪から $\dfrac{1}{4}s+u\geqq 0$，⑫から $\dfrac{1}{4}s+u\leqq 0$ となるので，$\dfrac{1}{4}s+u=0\ \cdots\cdots$⑭

⑬⑭より，$s=u=0$ となり，以上より $h(x)=0$ である。

［解　説］

微分の応用問題です。なお，(2)は図を書くと結論は明らかなのですが，それを示すのは……。ということで，数式を用いて処理をしました。

9 ［広島大・理］

(1)　$a>0$ のとき，$f(t)=t^3-2at+1$ に対して，

$$f'(t)=3t^2-2a$$

$t\geqq 0$ において $f(t)$ の増減を調べると，右表のようになり，最小値は,

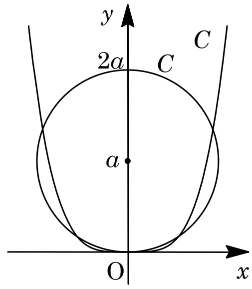
t	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{2a}{3}}$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	1	$\searrow$		$\nearrow$

$$f\Big(\sqrt{\frac{2a}{3}}\Big)=\Big(\frac{2a}{3}-2a\Big)\sqrt{\frac{2a}{3}}+1=-\frac{4}{3}a\sqrt{\frac{2a}{3}}+1=-\frac{4}{9}a\sqrt{6a}+1$$

(2)　条件より，$-\frac{4}{9}A\sqrt{6A}+1=0$ となるので，$\frac{4}{9}A\sqrt{6A}=1$ から，

$$\frac{16\cdot 6}{81}A^3=1,\ A^3=\frac{81}{16\cdot 6}=\frac{27}{32}$$

(3)　$C_1: y=x^4$ ……①，$C_2: x^2+(y-a)^2=a^2$ ……②を連立し，



$$x^2+(x^4-a)^2=a^2,\ x^8-2ax^4+x^2=0$$

ここで，$x^2=t\geqq 0$ とおくと，$t^4-2at^2+t=0$ から，

$$t(t^3-2at+1)=0 \text{………③}$$

すると，$t=0$ ……④または $t^3-2at+1=0$ ……⑤

さて，(1)から⑤は $f(t)=0$ となり，しかも $t\neq 0$ である。

また，(2)から $A=\sqrt[3]{\frac{27}{32}}=\frac{3}{4}\sqrt[3]{2}$ となるので，C_1 と C_2 の共有点の個数は，

(i)　$-\frac{4}{9}a\sqrt{6a}+1>0\ \Big(0<a<\frac{3}{4}\sqrt[3]{2}\Big)$ のとき

⑤の実数解は 0 個なので，③の実数解は④の $t=0$ のみとなる。よって，C_1 と C_2 の共有点の個数は 1 である。

(ii)　$-\frac{4}{9}a\sqrt{6a}+1=0\ \Big(a=\frac{3}{4}\sqrt[3]{2}\Big)$ のとき

⑤の異なる正の実数解は 1 個なので，③の実数解は④の $t=0$ と合わせて 2 個となる。よって，C_1 と C_2 の共有点の個数は $1+1\times 2=3$ である。

(iii)　$-\frac{4}{9}a\sqrt{6a}+1<0\ \Big(a>\frac{3}{4}\sqrt[3]{2}\Big)$ のとき

⑤の異なる正の実数解は 2 個なので，③の実数解は④の $t=0$ と合わせて 3 個となる。よって，C_1 と C_2 の共有点の個数は $1+2\times 2=5$ である。

(4)　C_1 上の点 $\mathrm{P}(p,\ p^4)$ と点 $(0,\ a)$ の距離を d とおくと，

$$d^2=p^2+(p^4-a)^2=p^8-2ap^4+p^2+a^2$$

ここで，$p^2=t\geqq 0$ とおくと，$d^2=t^4-2at^2+t+a^2=tf(t)+a^2$

さて，d^2 の最小値は a^2 なので，$t\geqq 0$ において $tf(t)\geqq 0$ すなわち $f(t)\geqq 0$ が必要となり，(3)から，$0<a\leqq\frac{3}{4}\sqrt[3]{2}$ である。

逆に，このとき $t=0$ で $tf(t)=0$ となるので，d^2 の最小値は a^2 である。

以上より，求める条件は$0 < a \leqq \dfrac{3}{4}\sqrt[3]{2}$である。

［解 説］

微分の応用についての問題です。(3)では x を消去するか，y を消去するか迷いますが，(1)を誘導とみると後者に落ち着きます。また，t の個数と x の個数の対応関係に注意が必要です。なお，(4)の結論は(3)から明らかですが，その過程も念のため記しておきました。重複しますが。

10　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［金沢大・文］

(1)　$C: y=a(x-1)^2+1\ (a>0)$ に対して，$\mathrm{P}(s,\ a(s-1)^2+1)$ における接線 l の方程式は，$y'=2a(x-1)$ から，$y-\{a(s-1)^2+1\}=2a(s-1)(x-s)$ となり，

$$y=2a(s-1)x-as^2+a+1\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

条件より，$(*)$が $y=Ax+B$ に一致するので，

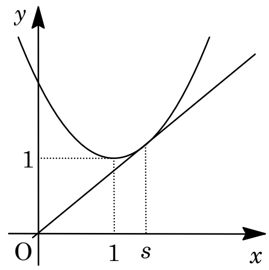
$$A=2a(s-1),\ B=-as^2+a+1$$

(2)　条件より，$A=2a(s-1)>0$ から $s>1$ となり，また $B=-as^2+a+1=0$ より，

$$s^2=\frac{a+1}{a},\ s=\sqrt{\frac{a+1}{a}}$$

すると，$A=2a\left(\sqrt{\dfrac{a+1}{a}}-1\right)=2\left(\sqrt{a(a+1)}-a\right)$ から，

$$l: y=2\left(\sqrt{a(a+1)}-a\right)x$$



(3)　l と C および y 軸で囲まれた図形の面積 $S(a)$ は，

$$S(a)=\int_0^s\{a(x-1)^2+1-2a(s-1)x\}dx$$

$$=\int_0^s(ax^2-2asx+a+1)dx$$

$$=\left[\frac{a}{3}x^3-asx^2+(a+1)x\right]_0^s=\frac{a}{3}s^3-as^3+(a+1)s$$

$$=\left(-\frac{2}{3}a\cdot\frac{a+1}{a}+a+1\right)\sqrt{\frac{a+1}{a}}=\frac{1}{3}(a+1)\sqrt{\frac{a+1}{a}}$$

(4)　$\dfrac{S(a)}{\sqrt[4]{a}}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a+1}{\sqrt[4]{a}}\sqrt{\dfrac{a+1}{a}}=\dfrac{1}{3}\sqrt[4]{\dfrac{(a+1)^6}{a^3}}$ となり，

$$\frac{(a+1)^6}{a^3}=\left(\frac{a+1}{\sqrt{a}}\right)^6=\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^6\geqq\left(2\sqrt{\sqrt{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}}\right)^6=2^6$$

ここで，等号は $\sqrt{a}=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$，すなわち $a=1$ のときに成立する。

したがって，$\dfrac{S(a)}{\sqrt[4]{a}}$ は $a=1$ のとき最小値 $\dfrac{1}{3}\sqrt[4]{2^6}=\dfrac{1}{3}\cdot 2^{\frac{3}{2}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$ をとる。

［解　説］

微積分の総合問題です。(3)で被積分関数が $a(x-s)^2$ となることに気付けば，計算が少し簡単になります。また，(4)では求めた式を 4 乗根の中に入れてしまうと，相加平均と相乗平均の出番になります。

11　　　　［名古屋大・文］

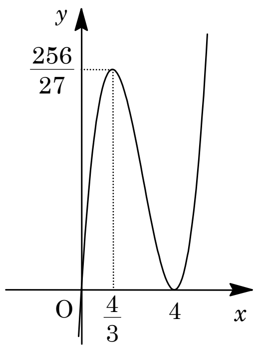
(1)　$g(x)=x(x-4)^2$ に対して,

$$g'(x)=(x-4)^2+2x(x-4)=(x-4)(3x-4)$$

すると，$g(x)$ の増減は右表のようになり，極大値は $\dfrac{256}{27}\left(x=\dfrac{4}{3}\right)$，極小値は 0 $(x=4)$ である。

x	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	4	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	$\frac{256}{27}$	↘	0	↗

また, グラフの概形は右図のようになる。



(2)　$f(x)=ax^2\ (a>0)$ に対し，$g(x)=f(x)$ とおくと,

$$x(x-4)^2=ax^2,\ x\{x^2-(a+8)x+16\}=0$$

これより，$x=0$，$x^2-(a+8)x+16=0$ ……①となる。

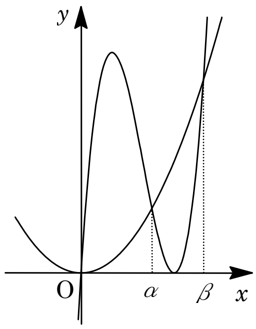
ここで, $x=0$ は①を満たさず, 判別式 D は,

$$D=(a+8)^2-64=a(a+16)>0$$

したがって, $g(x)=f(x)$ は異なる 3 つの実数解をもつ。すなわち, 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ は相異なる 3 点で交わる。

(3)　①の解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと,

$$\alpha+\beta=a+8 \cdots\cdots\cdots ②,\quad \alpha\beta=16 \cdots\cdots\cdots ③$$



ここで, 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるので,

$$\int_0^\alpha\{g(x)-f(x)\}dx=\int_\alpha^\beta\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$\int_0^\alpha\{g(x)-f(x)\}dx+\int_\alpha^\beta\{g(x)-f(x)\}dx=0$$

よって，$\displaystyle\int_0^\beta\{g(x)-f(x)\}dx=0$ ……④となり，④の左辺を I とおくと,

$$I=\int_0^\beta\{x^3-(a+8)x^2+16x\}dx=\Big[\frac{x^4}{4}-\frac{a+8}{3}x^3+8x^2\Big]_0^\beta$$

$$=\frac{\beta^4}{4}-\frac{a+8}{3}\beta^3+8\beta^2=\frac{\beta^2}{12}\{3\beta^2-4(a+8)\beta+96\}$$

すると，$\beta>0$ なので, ④から，$3\beta^2-4(a+8)\beta+96=0$ ………⑤

そこで, ②⑤から $3\beta^2-4(\alpha+\beta)\beta+96=0$ となり，$-\beta^2-4\alpha\beta+96=0$

③を代入すると $-\beta^2-64+96=0$ となり，$\beta^2=32$ から $\beta=4\sqrt{2}$ である。

そして, ③から $\alpha=\dfrac{16}{4\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ なので, ②から,

$$a=2\sqrt{2}+4\sqrt{2}-8=6\sqrt{2}-8$$

このとき，2 つの曲線の交点の x 座標は，$x=0$，α，β から，

$$x=0,\ 2\sqrt{2},\ 4\sqrt{2}$$

［解 説］

定積分と面積に関する有名な設定が題材になっています。ポイントは④式を導くところで，それ以降は②③⑤の連立方程式を解いているにすぎません。

$\boxed{12}$ ［東京大］

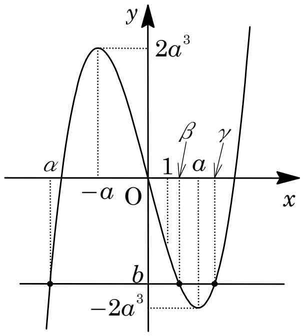
(1)　$f(x)=x^3-3a^2x\quad(a>0)$に対して，$f'(x)=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$

これより，$f(x)$の増減は右表のようになる。

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$2a^3$	$\searrow$	$-2a^3$	$\nearrow$

すると，$x\geqq 1$で$f(x)$が単調に増加する条件は，$0<a\leqq 1$である。

(2)　方程式$f(x)=b$は相異なる 3 実数解をもち，その解を$\alpha<\beta<\gamma$とすると，$\alpha<-a<\beta<a<\gamma$であり，しかも$\beta>1$である条件は，右図から，



$a>1$ ………①

$-2a^3<b<f(1)=1-3a^2$ ………②

ここで，②の 2 つの境界線$b=-2a^3$と$b=1-3a^2$の関係は，両式を連立すると，

$-2a^3=1-3a^2$，$2a^3-3a^2+1=0$

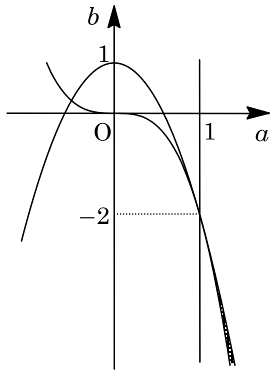
$(2a+1)(a-1)^2=0$

よって，$a=-\dfrac{1}{2}$で交わり，$a=1$で接する。

以上より，点$(a,\ b)$の動きうる範囲は，①②から，

$a>1$，$-2a^3<b<1-3a^2$

この不等式を ab 平面上に図示すると，右図の網点部になる。ただし，境界は領域に含まない。



［解　説］

微分の方程式への応用問題です。内容は基本的です。

$\boxed{13}$　　［金沢大・文］

(1)　条件より，$f(x)=|x-1|+\int_0^2 xf(t)dt=|x-1|+x\int_0^2 f(t)dt$

ここで，$\int_0^2 f(t)dt=a$ ……①とおくと，$f(x)=|x-1|+ax$ ……②となり，

$$f(2)=|2-1|+2a=1+2a$$

(2)　②より，$f(x)=x-1+ax=(a+1)x-1\ \ (x\geqq 1)$

$$f(x)=-x+1+ax=(a-1)x+1\ \ (x<1)$$

①に代入すると，

$$a=\int_0^2 f(t)dt=\int_0^1\{(a-1)t+1\}dt+\int_1^2\{(a+1)t-1\}dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}(a-1)t^2+t\right]_0^1+\left[\frac{1}{2}(a+1)t^2-t\right]_1^2=\frac{1}{2}(a-1)+1+\frac{1}{2}(a+1)\cdot 3-1$$
$$=2a+1$$

よって，$a=-1$となる。

(3)　(2)より，$f(x)=-1\ (x\geqq 1)$，$f(x)=-2x+1\ (x<1)$

ここで，$y=xf(x)-k$ ……③と $y=-x^2$ ……④を連立すると，

$$xf(x)-k=-x^2,\ xf(x)+x^2=k$$

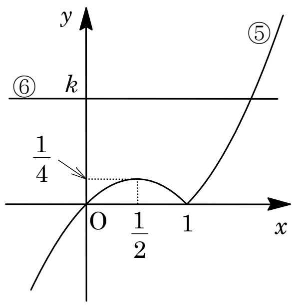
すると，$y=xf(x)+x^2$ ……⑤のグラフと $y=k$ ……⑥のグラフの共有点の個数は，③のグラフと④のグラフの共有点の個数に一致し，⑤より，

(i)　$x\geqq 1$のとき

$$xf(x)+x^2=-x+x^2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

(ii)　$x<1$のとき

$$xf(x)+x^2=x(-2x+1)+x^2=-x^2+x$$
$$=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$



(i)(ii)より，③と④のグラフの共有点の個数は，右図より，

$$1\text{個}\left(k<0,\ \frac{1}{4}<k\right),\ 2\text{個}\left(k=0,\ \frac{1}{4}\right),\ 3\text{個}\left(0<k<\frac{1}{4}\right)$$

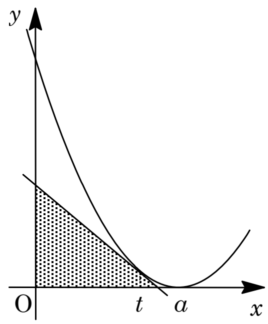
［解　説］

置換え型の積分方程式と 2 次関数と方程式の融合問題です。誘導が詳しいので，方針は明快です。

14　　［千葉大］

(1)　曲線 $y=(x-a)^2$ に対し $y'=2(x-a)$ となり，$0\leqq t<a$ において，点 $(t,\ (t-a)^2)$ における接線の方程式は，

$$y-(t-a)^2=2(t-a)(x-t)$$
$$y=2(t-a)x-t^2+a^2\ \cdots\cdots\cdots①$$



すると，①と y 軸との交点は $(0,\ -t^2+a^2)$ となり，また x 軸との交点は $\left(\dfrac{t+a}{2},\ 0\right)$ である。

そこで，接線①と x 軸および y 軸で囲まれた領域 $D(t)$ の面積を $S(t)$ とおくと，

$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{t+a}{2}(-t^2+a^2)=\frac{1}{4}(-t^3-at^2+a^2t+a^3)\ \cdots\cdots\cdots②$$

(2)　②より，$S'(t)=\dfrac{1}{4}(-3t^2-2at+a^2)=-\dfrac{1}{4}(3t-a)(t+a)$

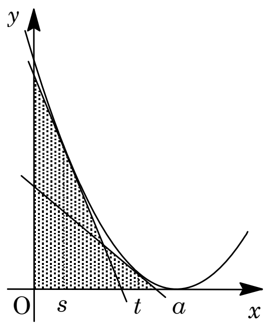
すると，$0\leqq t<a$ における $S(t)$ の増減は右表のようになる。これより，$S(t)$ は $t=\dfrac{a}{3}$ のとき最大となり，最大値は，

t	0	$\cdots$	$\dfrac{a}{3}$	$\cdots$	a
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗		↘	

$$S\left(\frac{a}{3}\right)=\frac{1}{4}\left(-\frac{a^3}{27}-\frac{a^3}{9}+\frac{a^3}{3}+a^3\right)=\frac{8}{27}a^3$$

(3)　$0\leqq s\leqq t<a$ のとき，点 $(s,\ (s-a)^2)$ における接線の方程式は，①より，

$$y=2(s-a)x-s^2+a^2\ \cdots\cdots\cdots③$$



さて，2 つの領域 $D(t)$ と $D(s)$ を合わせてできる領域 $D(t)\cup D(s)$ の面積を $T(t,\ s)$ とすると，

(i)　$0\leqq s=t<a$ のとき

$T(t,\ s)=S(t)$ より，(2)から最大値は $\dfrac{8}{27}a^3$ である。

(ii)　$0\leqq s<t<a$ のとき

①③を連立すると，$2(t-a)x-t^2+a^2=2(s-a)x-s^2+a^2$ から，

$$2(t-s)x=t^2-s^2,\quad x=\frac{t+s}{2}$$

よって，$T(t,\ s)=S(t)+\dfrac{1}{2}\{(-s^2+a^2)-(-t^2+a^2)\}\cdot\dfrac{t+s}{2}$ となり，

$$T(t,\ s)=\frac{1}{4}(-t^3-at^2+a^2t+a^3)+\frac{1}{4}(t^3+st^2-s^2t-s^3)\ \cdots\cdots\cdots④$$

ここで，t を $t=t_0\ (0<t_0<a)$ で固定し，s を $0\leqq s<t_0$ で動かすと考え，

$$T(t_0,\ s)=\frac{1}{4}(-t_0{}^3-at_0{}^2+a^2t_0+a^3)+\frac{1}{4}(t_0{}^3+t_0{}^2s-t_0s^2-s^3)$$

$$T'(t_0,\ s)=-\frac{1}{4}(3s^2+2t_0s-{t_0}^2)$$
$$=-\frac{1}{4}(3s-t_0)(s+t_0)$$

s	0	$\cdots$	$\frac{t_0}{3}$	$\cdots$	t_0
$T'(t_0,\ s)$		$+$	0	$-$	
$T(t_0,\ s)$		$\nearrow$		$\searrow$	

すると，$0\leqq s<t_0$ における $T(t_0,\ s)$ の増減は右表のようになる。これより，$T(t_0,\ s)$ は $s=\dfrac{t_0}{3}$ のとき最大となり，最大値は,

$$T\left(t_0,\ \frac{t_0}{3}\right)=\frac{1}{4}(-{t_0}^3-a{t_0}^2+a^2t_0+a^3)+\frac{1}{4}\left({t_0}^3+\frac{{t_0}^3}{3}-\frac{{t_0}^3}{9}-\frac{{t_0}^3}{27}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{5}{27}{t_0}^3-a{t_0}^2+a^2t_0+a^3\right)$$

さらに，この状態を保ったまま t_0 を $0<t_0<a$ で動かすと考え，変数を t_0 から t に戻し $U(t)=T\left(t,\ \dfrac{t}{3}\right)$ とおき直すと，$U(t)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{5}{27}t^3-at^2+a^2t+a^3\right)$ から,

$$U'(t)=\frac{1}{4}\left(\frac{5}{9}t^2-2at+a^2\right)$$
$$=\frac{1}{36}(5t-3a)(t-3a)$$

t	0	$\cdots$	$\frac{3}{5}a$	$\cdots$	a
$U'(t)$		$+$	0	$-$	
$U(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

すると，$0<t<a$ における $U(t)$ の増減は右表のようになる。

これより，$U(t)$ は $t=\dfrac{3}{5}a$ のとき最大となり，最大値は,

$$U\left(\frac{3}{5}a\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{5}{27}\cdot\frac{27}{125}a^3-\frac{9}{25}a^3+\frac{3}{5}a^3+a^3\right)=\frac{8}{25}a^3$$

(i)(ii)より，$T(t,\ s)$ は，$t=\dfrac{3}{5}a$，$s=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{5}a=\dfrac{a}{5}$ のとき，最大値 $\dfrac{8}{25}a^3$ をとる。

［解 説］

微分と最大・最小に関する問題です。(3)は 2 変数関数が対象の設問で，1 文字を固定して処理しています。ただ，重複をいとわず丁寧に記述したところ，かなりの分量になってしまいました。