1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［一橋大］

(1)　$C(p,\ q)$とおくと，$OC=1$から，$p^2+q^2=1$ ………①

また，$A(a,\ 0)$，$B(0,\ b)$に対し，$AB=BC=CA$より，

$$a^2+b^2=p^2+(q-b)^2\ \cdots\cdots\cdots②,\quad a^2+b^2=(p-a)^2+q^2\ \cdots\cdots\cdots③$$

①②より，$a^2=1-2bq$となり，$b\neq0$のとき$q=\dfrac{1-a^2}{2b}$ ………④

①③より，$b^2=1-2ap$となり，$a\neq0$のとき$p=\dfrac{1-b^2}{2a}$ ………⑤

④⑤を①に代入すると，$\dfrac{(1-b^2)^2}{4a^2}+\dfrac{(1-a^2)^2}{4b^2}=1$となり，

$$b^2(1-b^2)^2+a^2(1-a^2)^2=4a^2b^2\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

なお，$b=0$のときは$a=\pm1$，$a=0$のときは$b=\pm1$となるが，この場合も⑥はともに成立し，左辺を展開すると，

$$a^6+b^6-2(a^4+b^4)+a^2+b^2=4a^2b^2$$

ここで，$s=a^2+b^2$，$t=ab$とすると，

$$s^3-3t^2s-2(s^2-2t^2)+s=4t^2,\quad s(s^2-3t^2-2s+1)=0$$

$s=0$のとき$a=b=0$，そして②から$p=q=0$となり不適なので，$s\neq0$から，

$$s^2-3t^2-2s+1=0\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

(2)　$\triangle ABC$は正三角形なので，その面積をSとおくと，

$$S=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2)=\frac{\sqrt{3}}{4}s\ \cdots\cdots\cdots⑧$$

さて，⑦より$(s-1)^2-3t^2=0$から，$s=1\pm\sqrt{3}t$ ………⑨

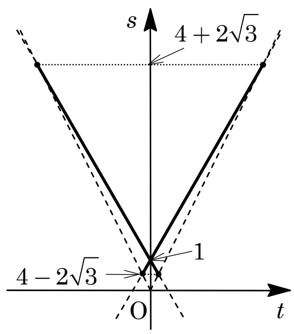
また，$s=(a+b)^2-2ab$から，$(a+b)^2=s+2t$となり，$s+2t\geqq0$ ……⑩で，

$$a+b=\pm\sqrt{s+2t}$$

すると，a，bは，2次方程式$x^2\mp\sqrt{s+2t}\,x+t=0$の2つの解となり，

$$D=(s+2t)-4t=s-2t\geqq0\ \cdots\cdots\cdots⑪$$

⑨かつ⑩かつ⑪を ts 平面上に図示すると，右図の実線部となる。



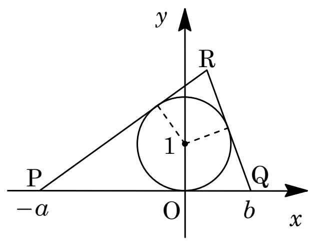
これより，$4-2\sqrt{3}\leqq s\leqq4+2\sqrt{3}$となり，⑧から，

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(4-2\sqrt{3})\leqq S\leqq\frac{\sqrt{3}}{4}(4+2\sqrt{3}),\quad \sqrt{3}-\frac{3}{2}\leqq S\leqq\sqrt{3}+\frac{3}{2}$$

［解　説］

(2)では図をかいてsの範囲を求めましたが，⑨よりtを消去しても可能です。

2　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［名古屋大・文］



(1)　直線 QR は x 軸に平行でないので，その法線ベクトルの成分を$(1,\ m)$とおくと，その方程式は，

$$(x-b)+my=0\,,\ x+my-b=0\ \cdots\cdots\cdots①$$

①は，円 $C: x^2+(y-1)^2=1$ に接することより，

$$\frac{|m-b|}{\sqrt{1+m^2}}=1\,,\ (m-b)^2=1+m^2$$

よって，$2bm=b^2-1$ より，$m=\dfrac{b^2-1}{2b}$ となり，①に代入すると，

$$x+\frac{b^2-1}{2b}y-b=0\,,\ 2bx+(b^2-1)y-2b^2=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

(2)　直線 PR の方程式は，(1)の結果から，$-2ax+(a^2-1)y-2a^2=0\ \cdots\cdots\cdots③$

②③を連立すると，$\{a(b^2-1)+b(a^2-1)\}y=2ab^2+2a^2b$ となり，

$$\{ab(a+b)-(a+b)\}y=2ab(a+b)\,,\ y=\frac{2ab}{ab-1}\quad (ab\neq 1\,,\ a+b>0)$$

②に代入すると，$2bx+\dfrac{2ab}{ab-1}(b^2-1)-2b^2=0$ となり，

$$x+\frac{a}{ab-1}(b^2-1)-b=0\,,\ x=-\frac{a}{ab-1}(b^2-1)+b=\frac{a-b}{ab-1}$$

これより，$\mathrm{R}\Big(\dfrac{a-b}{ab-1},\ \dfrac{2ab}{ab-1}\Big)$ である。

(3)　R の y 座標が正より，$\dfrac{2ab}{ab-1}>0$ すなわち $ab>1$ であり，このとき，

$$\mathrm{QR}^2=\Big(\frac{a-b}{ab-1}-b\Big)^2+\Big(\frac{2ab}{ab-1}\Big)^2=\frac{a^2(1-b^2)^2+4a^2b^2}{(ab-1)^2}=\frac{a^2(1+b^2)^2}{(ab-1)^2}$$

よって，$\mathrm{QR}=\dfrac{a(1+b^2)}{ab-1}$ となり，同様にすると $\mathrm{PR}=\dfrac{b(1+a^2)}{ab-1}$ となる。

そこで，$\triangle$PQR の周の長さを T とすると，$\mathrm{PQ}=a+b$ より，

$$T=a+b+\frac{a(1+b^2)}{ab-1}+\frac{b(1+a^2)}{ab-1}=\frac{2ab(a+b)}{ab-1}\ \cdots\cdots\cdots④$$

(4)　$\mathrm{PQ}=4$ で R の y 座標が正より，$a+b=4\,,\ ab>1$ である。

ここで，$\sqrt{ab}\leqq\dfrac{a+b}{2}=2$ より $ab\leqq 4$ となり，$1<ab\leqq 4$ である。すると，④から，

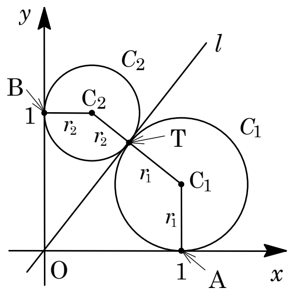
$$T=\frac{8ab}{ab-1}=\frac{8}{1-\dfrac{1}{ab}}\geqq\frac{8}{1-\dfrac{1}{4}}=\frac{32}{3}$$

これより，$ab=4\ (a=b=2)$ のとき T は最小値 $\dfrac{32}{3}$ をとる。

［解　説］

別解もいろいろ可能な円と直線に関する標準的な問題です。特に(3)は……。

３　［東京大・文］



円 C_1 と x 軸，円 C_2 と y 軸，C_1 と C_2 の接点を，それぞれ A, B, T とおくと，$\mathrm{OB}=\mathrm{OT}=\mathrm{OA}=1$ より，$\mathrm{B}(0,\ 1)$ となる。

すると，円 C_1 の半径 r_1，円 C_2 の半径 r_2 より，円 C_1 の中心 $\mathrm{C_1}(1,\ r_1)$，円 C_2 の中心 $\mathrm{C_2}(r_2,\ 1)$ と表せる。

ここで，円 C_1 と C_2 が接する条件は，$\mathrm{C_1C_2}=r_1+r_2$ より，

$$\sqrt{(r_2-1)^2+(1-r_1)^2}=r_1+r_2$$

これより，$(r_2-1)^2+(1-r_1)^2=(r_1+r_2)^2$ となり，

$$r_1r_2+r_1+r_2=1,\ (1+r_1)r_2=1-r_1,\ r_2=\frac{1-r_1}{1+r_1}\cdots\cdots\cdots(*)$$

よって，$0<r_1<1$ のもとで，$(*)$から，

$$8r_1+9r_2=8r_1+\frac{9-9r_1}{1+r_1}=8r_1+\frac{-9(1+r_1)+18}{1+r_1}=8r_1-9+\frac{18}{1+r_1}$$
$$=8+8r_1+\frac{18}{1+r_1}-17=8(1+r_1)+\frac{18}{1+r_1}-17$$

そこで，相加平均と相乗平均の関係を用いて，

$$8(1+r_1)+\frac{18}{1+r_1}-17\geqq 2\sqrt{8(1+r_1)\cdot\frac{18}{1+r_1}}-17=2\sqrt{2^3\cdot 2\cdot 3^2}-17=7$$

等号は，$8(1+r_1)=\dfrac{18}{1+r_1}$ すなわち $1+r_1=\dfrac{3}{2}\left(r_1=\dfrac{1}{2}\right)$ のとき成り立ち，この値は $0<r_1<1$ を満たしている。

以上より，$8r_1+9r_2$ の最小値は 7 である。

このとき，$r_1=\dfrac{1}{2}$，$(*)$から $r_2=\dfrac{1}{3}$ となり，$\mathrm{C_1}\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\mathrm{C_2}\left(\dfrac{1}{3},\ 1\right)$ である。そして，接点 T は線分 $\mathrm{C_1C_2}$ を $r_1:r_2=\dfrac{1}{2}:\dfrac{1}{3}=3:2$ に内分する点より，$\mathrm{T}(p,\ q)$ とおくと，

$$p=\frac{2+1}{5}=\frac{3}{5},\ q=\frac{1+3}{5}=\frac{4}{5}$$

よって，線分 OT の傾きは $\dfrac{q}{p}=\dfrac{4}{3}$ となり，直線 l の方程式は $y=\dfrac{4}{3}x$ である。

［解　説］

解法のポイントは，冒頭に記した点 B の y 座標が 1 という点です。当然といえば当然ですが……。ただ，ここを外すとシビアな結果になります。なお，分数関数の微分法は範囲外ですので，最小値を求める際には，相加平均と相乗平均の関係を利用するように式変形をしています。

4　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大・文］

2 点 $A(-1,\ 1)$，$B(1,\ -1)$ および点 $P(x,\ y)$ $(|x|\leqq 1)$ に対して，まず条件(ii)から，点 A, P, B は同一直線上にあることより，点 P の範囲は，$y=-x$ $(|x|\leqq 1)$ である。

次に，条件(i)から，2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ ……①とおくと，2 点 A, B を通ることより，

$$a-b+c=1\ \cdots\cdots\text{②},\quad a+b+c=-1\ \cdots\cdots\text{③}$$

②③より，$b=-1$，$c=-a$ となり，①に代入すると，

$$y=ax^2-x-a=a\Big(x-\frac{1}{2a}\Big)^2-a-\frac{1}{4a}\ \cdots\cdots\text{④}$$

すると，頂点の x 座標の絶対値が 1 以上より，$\left|\dfrac{1}{2a}\right|\geqq 1$ から $0<|a|\leqq\dfrac{1}{2}$ ………⑤

そこで，点 P の範囲は，⑤の条件のもとで曲線④の $|x|\leqq 1$ における通過領域である。

まず，④を $(x^2-1)a-(x+y)=0$ ……⑥と変形すると，点 $P(x,\ y)$ の範囲を表す不等式は，この a についての方程式⑥が，⑤の範囲に実数解をもつ条件として得られる。

(a)　$x=\pm 1$ のとき　$x+y=0$ のとき，任意の a に対して⑥は成立するので，

$$(x,\ y)=(1,\ -1),\ (-1,\ 1)$$

(b)　$x\neq\pm 1$ のとき　⑥より $a=\dfrac{x+y}{x^2-1}$ となり，⑤に代入すると，$0<\left|\dfrac{x+y}{x^2-1}\right|\leqq\dfrac{1}{2}$

$$0<|x+y|\leqq\frac{1}{2}|x^2-1|,\quad 0<|x+y|\leqq-\frac{1}{2}(x^2-1)\ (|x|\leqq 1)$$

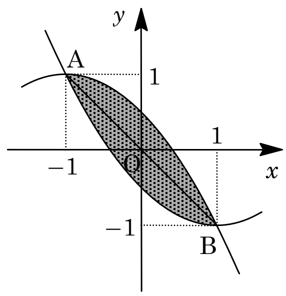
(b-i)　$x+y>0$ のとき　$x+y\leqq-\dfrac{1}{2}(x^2-1)$ より，

$$y\leqq-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(x+1)^2+1$$

(b-ii)　$x+y<0$ のとき　$-x-y\leqq-\dfrac{1}{2}(x^2-1)$ より，

$$y\geqq\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x-1)^2-1$$

以上より，条件(i)または(ii)を満たす点 P の範囲は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



この領域の面積を S とすると，

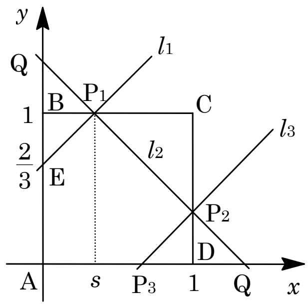
$$S=\int_{-1}^{1}\Big\{\Big(-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}\Big)-\Big(\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}\Big)\Big\}dx$$

$$=-\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)\,dx=\frac{1}{6}(1+1)^3=\frac{4}{3}$$

［解　説］

放物線の通過領域の問題です。すばやく結論の導ける条件(ii)から記しています。

$\boxed{5}$ ［千葉大・文］



(1) 点 $E\left(0,\ \dfrac{2}{3}\right)$ と点 $P_1(s,\ 1)$ $(0<s<1)$ を通る直線 l_1 を，$y=1$ に関して対称移動した直線を l_2 とする。

すると，l_2 は P_1 と E を $y=1$ に関して対称移動した点 $Q_1\left(0,\ \dfrac{4}{3}\right)$ を通ることより，その傾きが $-\dfrac{1}{3s}$ となり，

$$l_2 : y=-\frac{1}{3s}x+\frac{4}{3}$$

l_2 が $D(1,\ 0)$ を通るとき，$0=-\dfrac{1}{3s}+\dfrac{4}{3}$ から，$s=\dfrac{1}{4}$

(2) l_2 と x 軸との交点 Q_2 は，$0=-\dfrac{1}{3s}x+\dfrac{4}{3}$ から $x=4s$ となり，$Q_2(4s,\ 0)$ から，

$$DP_3=DQ_2=4s-1\ \cdots\cdots\cdots①$$

(3) P_3 は線分 AD 上にあることから，①より $0\leqq 4s-1\leqq 1$ となり，$\dfrac{1}{4}\leqq s\leqq\dfrac{1}{2}\ \cdots\cdots\cdots②$

このとき，P_2 は線分 CD 上にある。そこで，$EP_1=Q_1P_1$，$P_2P_3=P_2Q_2$ から，$F=EP_1+P_1P_2+P_2P_3$ とおくと，

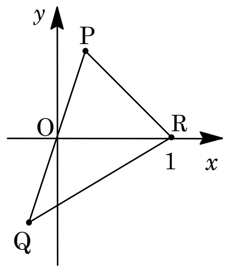
$$F=Q_1P_1+P_1P_2+P_2Q_2=Q_1Q_2=\sqrt{(4s)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{4}{3}\sqrt{9s^2+1}$$

すると，②より $\dfrac{25}{16}\leqq 9s^2+1\leqq\dfrac{13}{4}$ となるので，F の最大値は $\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{13}{4}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{13}$，最小値は $\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{25}{16}}=\dfrac{5}{3}$ である。

［解 説］

折れ線の長さの和に関する問題です。線対称移動がポイントですが，その誘導は問題文中に示されています。

$\boxed{6}$ ［東京大・文］



3 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{Q}(-x,\ -y)$，$\mathrm{R}(1,\ 0)$ に対し，

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}} = 2(x,\ y),\ \overrightarrow{\mathrm{RP}} = (x-1,\ y),\ \overrightarrow{\mathrm{RQ}} = -(x+1,\ y)$$

条件より，$\triangle\mathrm{PQR}$ は鋭角三角形なので，まず $\overrightarrow{\mathrm{QP}} \neq \vec{0}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{RP}} \neq \vec{0}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{RQ}} \neq \vec{0}$ となり，

$$(x,\ y) \neq (0,\ 0),\ (x,\ y) \neq (1,\ 0),\ (x,\ y) \neq (-1,\ 0)$$

この条件のもとで，$\angle\mathrm{RPQ} < 90^\circ$ から，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}} > 0$ すなわち $\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RP}} > 0$ となり，

$$x(x-1) + y^2 > 0,\ x^2 + y^2 - x > 0,\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 > \frac{1}{4} \cdots\cdots\cdots ①$$

また，$\angle\mathrm{PQR} < 90^\circ$ から，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}} > 0$ すなわち $\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}} < 0$ となり，

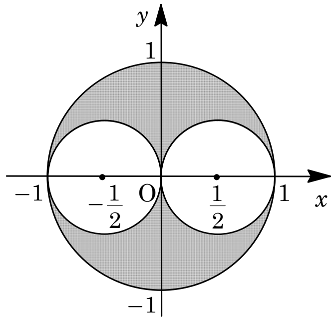
$$-x(x+1) - y^2 < 0,\ x^2 + y^2 + x > 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 > \frac{1}{4} \cdots\cdots\cdots ②$$

さらに，$\angle\mathrm{PRQ} < 90^\circ$ から，$\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}} > 0$ となり，

$$-(x-1)(x+1) - y^2 > 0,\ x^2 + y^2 - 1 < 0$$

$$x^2 + y^2 < 1 \cdots\cdots\cdots ③$$

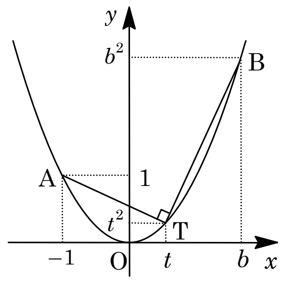


①②③より，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の範囲は右図の網点部である。ただし，境界は含まない。なお，3 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(-1,\ 0)$ を除く条件は満たされている。

［解 説］

点と座標に関する基本問題です。解答例ではベクトルを利用していますが，余弦定理の適用でも構いません。

７　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［名古屋大・文］



$A(-1,\ 1)$，$B(b,\ b^2)$，$T(t,\ t^2)\ (-1<t<b)$に対し，

$$\overrightarrow{AT}=(t+1,\ t^2-1)=(t+1)(1,\ t-1)$$

$$\overrightarrow{BT}=(t-b,\ t^2-b^2)=(t-b)(1,\ t+b)$$

さて，条件から，あるtに対して，$\overrightarrow{AT}\perp\overrightarrow{BT}$より，

$$\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{BT}=0,\ 1+(t-1)(t+b)=0$$

$$t^2+(b-1)t-b+1=0\cdots\cdots\cdots(*)$$

これより，$(*)$を満たすtが$-1<t<b$に少なくとも１つ存在する条件を求める。

ここで，$f(t)=t^2+(b-1)t-b+1=\left(t+\dfrac{b-1}{2}\right)^2-\dfrac{b^2+2b-3}{4}$とおくと，

$$f(-1)=-2b+3,\ f(b)=2b^2-2b+1=2\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>0$$

(i)　$-2b+3\geqq 0\ \left(-1<b\leqq\dfrac{3}{2}\right)$のとき

$(*)$を満たす　t　が$-1<t<b$に少なくとも　１　つ存在する条件は，$f(-1)\geqq 0$かつ$f(b)>0$より，

$$-1<-\frac{b-1}{2}<b\cdots\cdots\cdots①,\ -\frac{b^2+2b-3}{4}\leqq 0\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$-2b<b-1<2$となり，$\dfrac{1}{3}<b<3$

②より，$(b+3)(b-1)\geqq 0$となり，$b\leqq -3,\ 1\leqq b$

よって，$-1<b\leqq\dfrac{3}{2}$と合わせると，$1\leqq b\leqq\dfrac{3}{2}$となる。

(ii)　$-2b+3<0\ \left(b>\dfrac{3}{2}\right)$のとき

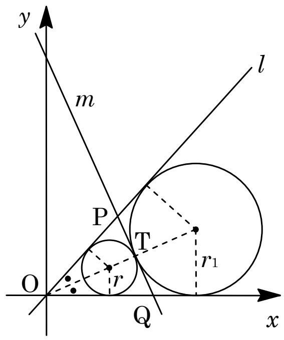
$f(-1)<0$かつ$f(b)>0$より，$(*)$を満たすtが$-1<t<b$に存在する。

(i)(ii)より，求める条件は，$b\geqq 1$である。

［解　説］

図形的な条件を数式化した後は，２ 次方程式の解の配置の問題になります。ここでは，$f(b)>0$を見つけることがポイントとなっています。

8　　　　[筑波大・理]



(1)　円 C_1，C_2 の半径を，それぞれ r_1，r_2 とする。

すると，$d_1=\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ から，

$$r_1=d_1\sin\theta=2\sin^2\theta\cos\theta$$

また，$r_2=d_2\sin\theta$，$d_1-d_2=r_1+r_2$ から，

$$2\sin\theta\cos\theta-d_2=2\sin^2\theta\cos\theta+d_2\sin\theta$$

$$(1+\sin\theta)d_2=2\sin\theta\cos\theta(1-\sin\theta)$$

よって，$d_2=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta(1-\sin\theta)}{1+\sin\theta}$ となり，

$$r_2=\frac{2\sin^2\theta\cos\theta(1-\sin\theta)}{1+\sin\theta}$$

(2)　円 C_1 と C_2 の接点を T とおくと，$\mathrm{OT}\perp\mathrm{PQ}$ から，

$$\mathrm{PQ}=2\mathrm{OT}\tan\theta=2(d_1-r_1)\tan\theta=2(2\sin\theta\cos\theta-2\sin^2\theta\cos\theta)\tan\theta$$

$$=4\sin\theta\cos\theta(1-\sin\theta)\tan\theta=4\sin^2\theta(1-\sin\theta)$$

ここで，$t=\sin\theta$ とおくと，$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ から $0<t<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ となり，$\mathrm{PQ}=f(t)$ として，

$$f(t)=4t^2(1-t)=4t^2-4t^3$$

$$f'(t)=8t-12t^2=4t(2-3t)$$

すると，$f(t)$ の増減は右表のようになり，PQ の最大値は $f\left(\dfrac{2}{3}\right)=4\cdot\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{16}{27}$ である。

t	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

(3)　(2)から，$\sin\theta=\dfrac{2}{3}$ より $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ となり，このとき直線 m の傾きは，

$$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

また，$\mathrm{PQ}=\dfrac{16}{27}$ から $\mathrm{TQ}=\dfrac{8}{27}$ となり，$\mathrm{OQ}=\dfrac{\mathrm{TQ}}{\sin\theta}=\dfrac{8}{27}\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{4}{9}$ から点 Q の座標は $\mathrm{Q}\left(\dfrac{4}{9},\ 0\right)$ である。すると，直線 m の方程式は，

$$y=-\frac{\sqrt{5}}{2}\left(x-\frac{4}{9}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{2}x+\frac{2}{9}\sqrt{5}$$

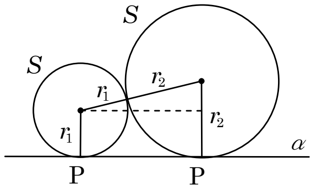
[解　説]

円と接線の関係をもとに，微分を利用して最大・最小へと繋ぐ問題です。問題文に参考図が書かれているため，解きやすくなっています。

9　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京工大］

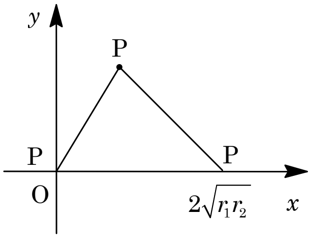
(1)　球S_1，S_2と平面αの接点P_1，P_2を含み，αに垂直な断面を考えると，三平方の定理から，

$$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2=\sqrt{(r_1+r_2)^2-|r_1-r_2|^2}=\sqrt{4r_1r_2}=2\sqrt{r_1r_2}$$



(2)　S_1とS_2の両方に外接している球 S について，半径をr，平面αとの接点を P とする。

ここで，α上に座標系を設定して，P_1を原点とし，P_2をx軸の正の部分にとると，(1)から$\mathrm{P}_2(2\sqrt{r_1r_2},\ 0)$となる。そして，$\mathrm{P}(x,\ y)$とおく。



すると，(1)の結論から，$\mathrm{P}_1\mathrm{P}=2\sqrt{r_1r}$，$\mathrm{P}_2\mathrm{P}=2\sqrt{r_2r}$となることから，

$$\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{r_1r}\ \cdots\cdots\text{①},\quad \sqrt{(x-2\sqrt{r_1r_2})^2+y^2}=2\sqrt{r_2r}\ \cdots\cdots\text{②}$$

すると，$x^2+y^2=4r_1r$，$(x-2\sqrt{r_1r_2})^2+y^2=4r_2r$となり，$r$を消去すると，

$$r_2(x^2+y^2)=r_1(x^2-4\sqrt{r_1r_2}x+4r_1r_2+y^2)$$

$$(r_2-r_1)x^2+(r_2-r_1)y^2+4r_1\sqrt{r_1r_2}x-4r_1^2r_2=0\ \cdots\cdots\text{③}$$

(i)　$r_1=r_2$のとき

③から，$4r_1^2x-4r_1^3=0$となり，$x=r_1$

よって，点 P は線分$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$の垂直二等分線上にある。

(ii)　$r_1\neq r_2$のとき

③から，$x^2+y^2+\dfrac{4r_1\sqrt{r_1r_2}}{r_2-r_1}x-\dfrac{4r_1^2r_2}{r_2-r_1}=0$となり，

$$\left(x+\frac{2r_1\sqrt{r_1r_2}}{r_2-r_1}\right)^2+y^2=\frac{4r_1^3r_2}{(r_2-r_1)^2}+\frac{4r_1^2r_2}{r_2-r_1},\quad \left(x+\frac{2r_1\sqrt{r_1r_2}}{r_2-r_1}\right)^2+y^2=\frac{4r_1^2r_2^2}{(r_2-r_1)^2}$$

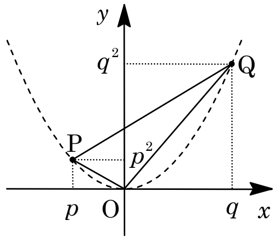
よって，点 P は中心$\left(-\dfrac{2r_1\sqrt{r_1r_2}}{r_2-r_1},\ 0\right)$，半径$\dfrac{2r_1r_2}{|r_2-r_1|}$の円上にある。

［解 説］

外接する球面に関する問題で，ときどき見かけるものです。(2)については，2 つの定点P_1，P_2からの距離の条件から，点 P の軌跡は垂直二等分線またはアポロニウスの円というのがわかります。ただ，解答例ではそのプロセスも簡単に記しています。

10

［千葉大・理］



(1)　点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ $(p<q)$ に対して，$\mathrm{PQ}=2$ より，

$$(q-p)^2+(q^2-p^2)^2=4\ ,\ (q-p)^2\{1+(q+p)^2\}=4$$

ここで，$p+q=\sqrt{t}$ $(t\geqq 0)$……①より，

$$(q-p)^2(1+t)=4\ ,\ q-p=\frac{2}{\sqrt{1+t}}\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$q=\dfrac{1}{2}\Big(\sqrt{t}+\dfrac{2}{\sqrt{1+t}}\Big)=\dfrac{\sqrt{t}}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$ ………③

$$p=\frac{1}{2}\Big(\sqrt{t}-\frac{2}{\sqrt{1+t}}\Big)=\frac{\sqrt{t}}{2}-\frac{1}{\sqrt{1+t}}\ \cdots\cdots\cdots④$$

(2)　△OPQ の面積を S とすると，③④より，

$$S=\frac{1}{2}\left|pq^2-p^2q\right|=\frac{1}{2}\left|pq(q-p)\right|=\frac{1}{2}\left|\Big(\frac{t}{4}-\frac{1}{1+t}\Big)\cdot\frac{2}{\sqrt{1+t}}\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+t}}\left|\frac{t^2+t-4}{4(1+t)}\right|=\frac{\left|t^2+t-4\right|}{4(1+t)\sqrt{1+t}}$$

(3)　条件より $S=1$ なので，$\dfrac{\left|t^2+t-4\right|}{4(1+t)\sqrt{1+t}}=1$ となり，

$$\left|t^2+t-4\right|=4(1+t)\sqrt{1+t}\ ,\ (t^2+t-4)^2=16(1+t)^3\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤を展開してまとめると，$t^4-14t^3-55t^2-56t=0$ となり，

$$t=0\ \cdots\cdots\cdots⑥,\ t^3-14t^2-55t-56=0\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

ここで，$f(t)=t^3-14t^2-55t-56$ とおくと，

$$f'(t)=3t^2-28t-55=(t-11)(3t+5)$$

すると，$f(t)$ の増減は右表のようになり，$t>0$ において⑦の解はただ１つ存在する。

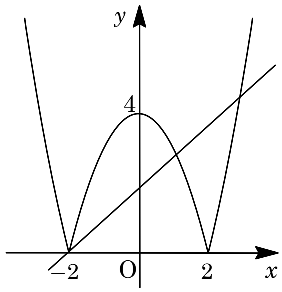
t	0	$\cdots$	11	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	-56	↘		↗

以上より，⑤の解すなわち $S=1$ となる t の個数は，⑥を合わせて 2 である。

［解　説］

放物線を題材にした図形と式についての問題です。(3)では，同値変形とはいうものの，両辺を 2 乗して 4 次方程式⑤を導く段階で少し躊躇しましたが，$t=0$ が解の 1 つであることがわかり……。

$\boxed{11}$ ［東北大・理］



(1)　$C : y = |x^2 - 4|$ に対して,

$y = x^2 - 4$　$(x \leqq -2,\ 2 \leqq x)$ ………①

$y = -x^2 + 4$　$(-2 < x < 2)$ ………②

また, $l : y = ax + b$ ……③が点 $(-2,\ 0)$ を通ることより,

$-2a + b = 0$, $b = 2a$

ここで, ②より $y' = -2x$ となり, $x = -2$ のとき $y' = 4$ から, l と C がちょうど 3 つの共有点をもつ l の傾き a の範囲は, $0 < a < 4$ である。

よって, 求める a, b の条件は, $b = 2a$ $(0 < a < 4)$ である。

(2)　l と C がちょうど 3 つの共有点をもつ条件は, l と x 軸の交点に注目して,

(i)　l が点 $(-2,\ 0)$ を通るとき　(1)より, $b = 2a$ $(0 < a < 4)$

(ii)　l が点 $(2,\ 0)$ を通るとき　(1)と同様に, $2a + b = 0$ より $b = -2a$

そして, ②より $x = 2$ のとき $y' = -4$ から, l の傾き a の範囲が $-4 < a < 0$ となり, まとめると, $b = -2a$ $(-4 < a < 0)$ である。

(iii) l が点 $(-2,\ 0)$, $(2,\ 0)$ 以外の点を通るとき

x 軸との交点が $-2 < x < 2$ のときは, l と C が 3 つの共有点をもつ場合はない。

x 軸との交点が $x < -2$, $2 < x$ のとき, および x 軸と交点をもたないときは, l と C が $-2 < x < 2$ で接するときである。

②③を連立して, $-x^2 + 4 = ax + b$ より, $x^2 + ax + b - 4 = 0$ ………④

④が $-2 < x < 2$ に重解をもつことより,

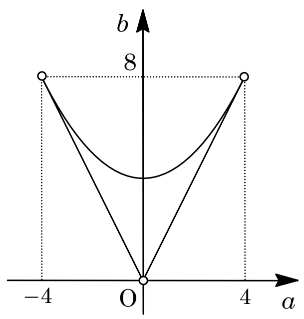
$D = a^2 - 4(b - 4) = 0$, $-2 < -\dfrac{a}{2} < 2$

よって, $b = \dfrac{a^2}{4} + 4$ $(-4 < a < 4)$ となる。

このとき, ①と③は 2 交点をもつ。

(i)〜(iii)より, 点 $(a,\ b)$ の軌跡は右図の実線部になる。

ただし, 原点と 2 点 $(\pm 4,\ 8)$ は含まない。



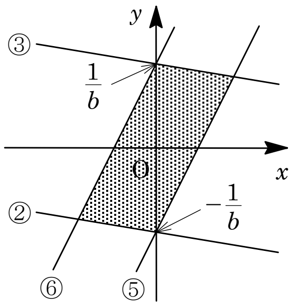
［解　説］

絶対値付き関数のグラフと直線の位置関係に関する問題です。まず図を書き, それをもとに計算をしています。

$\boxed{12}$ ［一橋大］

$a>0$，$b>0$，$c>0$，$a+b+c=1$ に対し，$|ax+by|\leqq 1$ ……①より，

$$-1\leqq ax+by\leqq 1,\ -\frac{a}{b}x-\frac{1}{b}\leqq y\leqq -\frac{a}{b}x+\frac{1}{b}$$



境界線は，$y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{1}{b}$ ……②，$y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{1}{b}$ ……③

また，$|cx-by|\leqq 1$ ……④より，

$$-1\leqq cx-by\leqq 1,\ \frac{c}{b}x-\frac{1}{b}\leqq y\leqq \frac{c}{b}x+\frac{1}{b}$$

境界線は，$y=\dfrac{c}{b}x-\dfrac{1}{b}$ ……⑤，$y=\dfrac{c}{b}x+\dfrac{1}{b}$ ……⑥

①かつ④の表す領域 D は，直線②と③，および直線⑤と⑥が，平行で，しかも原点対称であることより，右上図の平行四辺形の内部または辺上となる。

そして，直線③と⑤を連立すると，$-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{1}{b}=\dfrac{c}{b}x-\dfrac{1}{b}$ より，

$$(a+c)x=2,\ x=\frac{2}{a+c}$$

よって，領域 D の面積を S とおくと，対称性より，

$$S=2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{b}\cdot\frac{2}{a+c}\right)=\frac{4}{b(a+c)}=\frac{4}{b(1-b)}=\frac{4}{-b^2+b}$$

ここで，$f(b)=-b^2+b$ とおくと，$f(b)=-\left(b-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$ より，$0<b<1$ において，

$$0<f(b)\leqq\frac{1}{4}\quad\left(\text{等号は}\,b=\frac{1}{2}\,\text{のとき成立}\right)$$

したがって，S は $b=\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 16 をとる。

［解 説］

領域についての問題です。ただ，平行四辺形の 1 つの対角線が y 軸上にあったり，また面積が 1 文字で表せたり，かなり解きやすい設定になっています。

$\boxed{13}$ ［広島大・理］

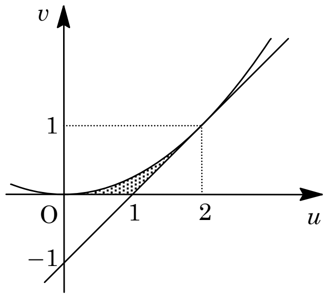
(1)　まず，$f(t)=t^2-ut+v=\left(x-\dfrac{u}{2}\right)^2-\dfrac{u^2}{4}+v$ とおく。

条件(A)より，$f(t)=0$ の 2 解 $t=x,\ y$ について，$0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1$ なので，

$-\dfrac{u^2}{4}+v\leqq 0$ ………①，$0\leqq\dfrac{u}{2}\leqq 1$ ………②

$f(0)=v\geqq 0$ ………③

$f(1)=1-u+v\geqq 0$ ………④



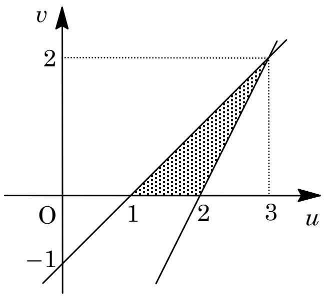
①③から $0\leqq v\leqq\dfrac{u^2}{4}$，②から $0\leqq u\leqq 2$，④から $v\geqq u-1$ となるので，点 $(u,\ v)$ の存在範囲は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

(2)　条件(B)より，$f(t)=0$ の 2 解 $t=x,\ y$ について，$0\leqq x\leqq 1,\ 1\leqq y\leqq 2$ なので，

$f(0)=v\geqq 0$ ………⑤

$f(1)=1-u+v\leqq 0$ ………⑥

$f(2)=4-2u+v\geqq 0$ ………⑦

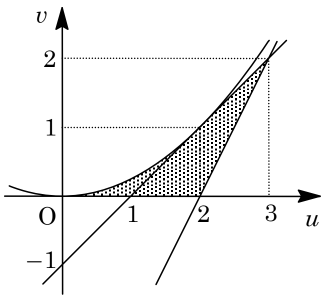


⑤⑥から $0\leqq v\leqq u-1$，⑦から $v\geqq 2u-4$ となるので，点 $(u,\ v)$ の存在範囲は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

(3)　点 $(x,\ y)$ が 4 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$ を頂点とする長方形の周および内部を動くとき，x, y の条件は $0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 2$ と表せ，これは(1), (2)で与えられた「条件(A)または条件(B)」と一致する。

ここで，$f(t)=0$ の 2 解 $t=x,\ y$ について，解と係数の関係から，

$x+y=u,\ xy=v$



これより，点 $(x+y,\ xy)$ の動く範囲は点 $(u,\ v)$ の動く範囲に対応し，(1), (2)の結果を合わせると右図の網点部となる。そして，その面積 S は，

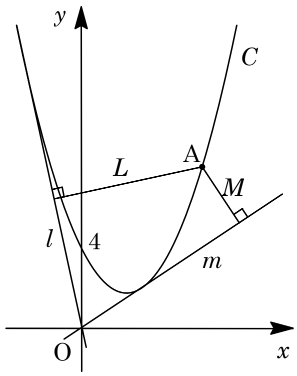
$$S=\int_0^2\frac{1}{4}u^2du+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{12}\Big[u^3\Big]_0^2+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$$

［解 説］

領域と 2 次方程式の解の配置を題材とした問題です。(1)と(2)の結果が(3)にストレートにつながっています。

14　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大・文］

(1)　$C: y=x^2-3x+4$ ……①に対し，原点を通る接線を $y=ax$ ……②とおく。



①と②を連立して，$x^2-(a+3)x+4=0$ となり，

$$D=(a+3)^2-4^2=0\,,\ \ a+3=\pm 4$$

よって，$a=-7,\ 1$ から，$l: y=-7x$，$m: y=x$ とおく。

ここで, C 上の点 $\mathrm{A}(t,\ t^2-3t+4)$ に対し, A と $l,\ m$ の距離をそれぞれ $L,\ M$ とすると,

$$L=\frac{|7t+t^2-3t+4|}{\sqrt{49+1}}=\frac{|t^2+4t+4|}{5\sqrt{2}}=\frac{(t+2)^2}{5\sqrt{2}}$$

$$M=\frac{|t-t^2+3t-4|}{\sqrt{1+1}}=\frac{|-t^2+4t-4|}{\sqrt{2}}=\frac{(t-2)^2}{\sqrt{2}}$$

すると，$\sqrt{L}=\dfrac{|t+2|}{\sqrt{5}\sqrt[4]{2}}$，$\sqrt{M}=\dfrac{|t-2|}{\sqrt[4]{2}}$ となり，

$$\sqrt{L}+\sqrt{M}=\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt[4]{2}}(|t+2|+\sqrt{5}|t-2|)$$

ここで，$f(t)=|t+2|+\sqrt{5}|t-2|$ とおくと，

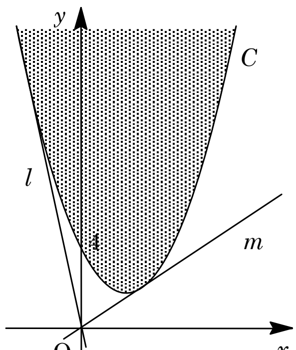
(i)　$t\geqq 2$ のとき　$f(t)=t+2+\sqrt{5}(t-2)=(1+\sqrt{5})t+2-2\sqrt{5}$

(ii)　$-2\leqq t<2$ のとき　$f(t)=t+2-\sqrt{5}(t-2)=(1-\sqrt{5})t+2+2\sqrt{5}$

(iii)　$t<-2$ のとき　$f(t)=-(t+2)-\sqrt{5}(t-2)=(-1-\sqrt{5})t-2+2\sqrt{5}$

$f(t)$ は $t=-2,\ 2$ で連続なので，$t=2$ のとき $f(t)$ は最小となる。すなわち，$t=2$ のとき $\sqrt{L}+\sqrt{M}$ は最小となり，このとき $\mathrm{A}(2,\ 2)$ である。

(2)　領域 $D: y\geqq x^2-3x+4$ は右図の網点部のようになる。



そこで，領域 D のすべての点 $(x,\ y)$ に対し不等式 $px+qy\leqq 0$ ……③が成り立つ条件は,

(a)　$q=0$ のとき　③は $px\leqq 0$ となる。

すると，領域 D のすべての点 $(x,\ y)$ に対し成立する条件は，$p=0$ である。

(b)　$q>0$ のとき　③は $y\leqq -\dfrac{p}{q}x$ となる。

すると，領域 D のすべての点 $(x,\ y)$ に対し成立する場合はない。

(c)　$q<0$ のとき　③は $y\geqq -\dfrac{p}{q}x$ となる。

すると，領域 D のすべての点 $(x,\ y)$ に対し成立する条件は，$l,\ m$ の傾きから,

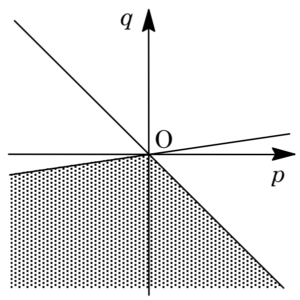
$$-7 \leqq -\frac{p}{q} \leqq 1,\ 7q \leqq p \leqq -q$$

すなわち，$q \leqq \dfrac{1}{7}p$ かつ $q \leqq -p$ である。

以上より，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ の動きうる範囲は,

$$q \leqq \frac{1}{7}p \text{ かつ } q \leqq -p$$

図示すると右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



［解 説］

図形と式に関する標準的な問題です。(1)の結論が(2)への誘導かとも思ったのですが，実際は(1)の途中結果が(2)への誘導でした。なお，(2)は，詳しく記述していませんが，集合の包含関係を用いて考えています。

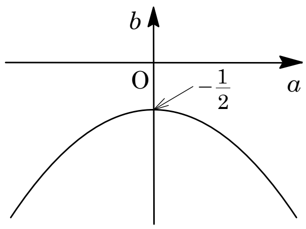
15　　　　［東北大・理］

(1)　$C : y=(x-a)^2+b$ ……①，$D : y=-x^2$ ……②を連立すると，

$$(x-a)^2+b=-x^2\,,\ \ 2x^2-2ax+a^2+b=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

条件より，$D/4=a^2-2(a^2+b)=-a^2-2b>0$ のもとで，③の異なる 2 実数解 $x=\dfrac{a\pm\sqrt{-a^2-2b}}{2}$ の差が 1 から，

$$\frac{\sqrt{-a^2-2b}}{2}\cdot 2=1\,,\ \ -a^2-2b=1$$



よって，$b=-\dfrac{1}{2}a^2-\dfrac{1}{2}$ ……④となり，C の頂点 $(a,\ b)$ の軌跡は右図の放物線となる。

(2)　(1)のとき，C と D の 2 交点をを結ぶ直線は，①＋②より，

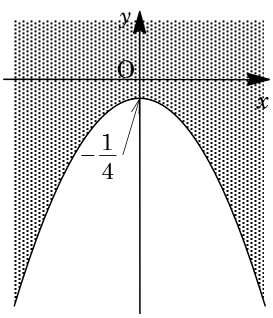
$$2y=(x-a)^2+b-x^2\,,\ \ 2y=-2ax+a^2+b$$

④を代入すると，$2y=-2ax+a^2-\dfrac{1}{2}a^2-\dfrac{1}{2}$ から，$4y=-4ax+a^2-1$ ………⑤

ここで，直線⑤が点 $(x,\ y)$ を通過する条件は，⑤を a についての 2 次方程式 $a^2-4xa-4y-1=0$ ……⑥とみたとき，⑥を満たす実数 a が存在する条件に対応するので，

$$D/4=4x^2-(-4y-1)=4x^2+4y+1\geqq 0$$

まとめると，$y\geqq -x^2-\dfrac{1}{4}$ となり，図示すると右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



［解　説］

放物線と直線に関する基本的な問題です。なお，(2)の 2 交点をを結ぶ直線の求め方は，交わる 2 つの円の共通弦の方程式を求める方法と同じです。また，通過領域は実数解条件で処理しています。

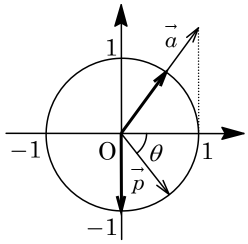
16　　［信州大・医］

直線$l: y=(\sin\theta)x+\cos\theta$に対し，$\vec{a}=(1,\ x)$，$\vec{p}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$とおくと，

$$l: y=\vec{a}\cdot\vec{p}=|\vec{a}||\vec{p}|\cos\varphi=\sqrt{x^2+1}\cos\varphi$$（φは$\vec{a}$と$\vec{p}$のなす角）………(＊)

さて，θが$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$を動くとき，(＊)の$y$のとりうる値の範囲を考えると，

(i)　$x\geqq 0$のとき

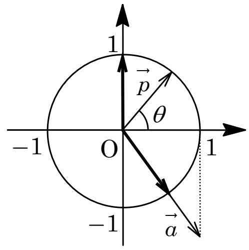


右図より，$\vec{a}\cdot\vec{p}$の値は，$\vec{p}$が$\vec{a}$と同じ向き$(\varphi=0)$のとき最大になり，$\vec{p}=(0,\ -1)$のとき最小になるので，

$$1\cdot 0+x\cdot(-1)\leqq\vec{a}\cdot\vec{p}\leqq\sqrt{x^2+1}\cos 0$$

$$-x\leqq y\leqq\sqrt{x^2+1}$$

(ii)　$x<0$のとき



右図より，$\vec{a}\cdot\vec{p}$の値は，$\vec{p}$が$\vec{a}$と同じ向き$(\varphi=0)$のとき最大になり，$\vec{p}=(0,\ 1)$のとき最小になるので，

$$1\cdot 0+x\cdot 1\leqq\vec{a}\cdot\vec{p}\leqq\sqrt{x^2+1}\cos 0$$

$$x\leqq y\leqq\sqrt{x^2+1}$$

(i)(ii)より，まとめると，$-|x|\leqq y\leqq\sqrt{x^2+1}$である。

［解　説］

直線の通過領域の問題です。いろいろな解法が考えられますが，ここでは$\cos\theta$と$\sin\theta$のセット，およびその係数に文字の入っていることに着目して内積を利用しました。なお，本問は結論が与えられていますので，不等式の証明という形での記述も可能です。

$\boxed{17}$ ［東京大・文］

(1)　$C: y=x^2\ (-1\leqq x\leqq 1)$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)\ (-1\leqq p\leqq 1)$ に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(2p,\ 2p^2)$$

ここで，$\mathrm{Q}(x,\ y)$ とおくと，$x=2p$，$y=2p^2$ から，

$$y=2\left(\frac{x}{2}\right)^2,\ \ y=\frac{1}{2}x^2\ (-2\leqq x\leqq 2)$$

したがって，点 Q の軌跡は，放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ の $-2\leqq x\leqq 2$ の部分である。

(2)　線分 OA 上の点 $\mathrm{R}(r,\ 0)\ (0\leqq r\leqq 1)$ に対して，

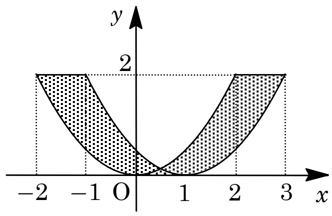
$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

ここで，点 R を固定すると，(1)から，点 S は点 R を頂点とする放物線の一部を動き，その方程式は，

$$y=\frac{1}{2}(x-r)^2\quad (r-2\leqq x\leqq r+2)\cdots\cdots\cdots(*)$$

そして，点 R を $0\leqq r\leqq 1$ で動かすと，$(*)$で表される放物線の一部は，x 軸方向に平行移動する。

これより点 S が動く領域は，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



この領域の面積を S とおくと，直線 $x=\dfrac{1}{2}$ についての対称性から，

$$S=2\left\{\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{2}x^2dx+1\cdot 2-\int_{1}^{3}\frac{1}{2}(x-1)^2dx\right\}$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{2}x^2dx+4-\int_{1}^{3}(x-1)^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{2}+4-\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_{1}^{3}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{63}{8}+4-\frac{1}{3}\cdot 8=\frac{95}{24}$$

［解　説］

軌跡を求める問題です。(2)は，東大で頻出の 1 文字固定をして考えるタイプです。