1　　［筑波大・理］

半径 1 の円を内接円とする三角形 ABC が，辺 AB と辺 AC の長さが等しい二等辺三角形であるとする。辺 BC, CA, AB と内接円の接点をそれぞれ P, Q, R とする。また，$\alpha=\angle\mathrm{CAB}$，$\beta=\angle\mathrm{ABC}$ とし，三角形 ABC の面積を S とする。

(1)　線分 AQ の長さを α を用いて表し，線分 QC の長さを β を用いて表せ。

(2)　$t=\tan\dfrac{\beta}{2}$ とおく。このとき，S を t を用いて表せ。

(3)　不等式 $S\geqq 3\sqrt{3}$ が成り立つことを示せ。さらに，等号が成立するのは，三角形 ABC が正三角形のときに限ることを示せ。

２　　［京都大］

次の 2 つの条件を同時に満たす四角形のうち面積が最小のものの面積を求めよ。

(a)　少なくとも 2 つの内角は 90° である。

(b)　半径 1 の円が内接する。ただし, 円が四角形に内接するとは, 円が四角形の 4 つの辺すべてに接することをいう。

$\boxed{3}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東北大］

$t>0$ を実数とする。座標平面において，3 点 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ 0)$，$\mathrm{P}(t,\ \sqrt{3}t)$ を頂点とする三角形 ABP を考える。

(1)　三角形 ABP が鋭角三角形となるような t の範囲を求めよ。

(2)　三角形 ABP の垂心の座標を求めよ。

(3)　辺 AB, BP, PA の中点をそれぞれ M, Q, R とおく。t が(1)で求めた範囲を動くとき，三角形 ABP を線分 MQ, QR, RM で折り曲げてできる四面体の体積の最大値と，そのときの t の値を求めよ。

4　　　　［九州大］

t を$0<t<1$を満たす実数とする。面積が 1 である三角形 ABC において，辺 AB, BC, CA をそれぞれ$2:1$，$t:1-t$，$1:3$に内分する点を D, E, F とする。また，AE と BF, BF と CD, CD と AE の交点をそれぞれ P, Q, R とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　3 直線 AE, BF, CD が 1 点で交わるときの t の値t_0 を求めよ。

以下，t は$0<t<t_0$ を満たすものとする。

(2)　$\mathrm{AP}=k\mathrm{AE}$，$\mathrm{CR}=l\mathrm{CD}$を満たす実数 k, l をそれぞれ求めよ。

(3)　三角形 BCQ の面積を求めよ。

(4)　三角形 PQR の面積を求めよ。

5　　［京都大・理］

四面体 OABC が次の条件を満たすならば，それは正四面体であることを示せ。

条件：頂点 A，B，C からそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は対面の外心を通る。

ただし，四面体のある頂点の対面とは，その頂点を除く他の 3 つの頂点がなす三角形のことをいう。

$\boxed{6}$ ［千葉大・文］

座標平面上に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(3,\ \sqrt{3})$，$\mathrm{B}(9,\ 0)$ がある。線分 OB 上に 2 点 P, Q を $\angle\mathrm{PAQ} = 90^\circ$ となるようにとる。ただし，点 Q の x 座標は点 P の x 座標より大きいものとする。$\angle\mathrm{APQ} = \theta$ とし，$\triangle\mathrm{APQ}$ の面積を S とする。

(1) S を θ を用いて表せ。

(2) S の最小値，およびそのときの点 P と点 Q の x 座標を求めよ。

(3) S が $\triangle\mathrm{AOB}$ の面積の $\dfrac{2}{3}$ 倍となるとき，点 P と点 Q の x 座標を求めよ。

7　［京都大・理］

$\triangle$ABC は鋭角三角形であり，$\angle \mathrm{A} = \dfrac{\pi}{3}$ であるとする。また$\triangle$ABC の外接円の半径は 1 であるとする。

(1) $\triangle$ABC の内心を P とするとき，$\angle$BPC を求めよ。

(2) $\triangle$ABC の内接円の半径 r のとりうる値の範囲を求めよ。

8　　［信州大・医］

$0<t<3$ を満たす実数 t に対し，平面上の相異なる 4 点 O，A，B，C を次の条件(a)，(b)を満たすようにとる。

(a)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を θ とするとき，$\tan\theta=\dfrac{1}{t+1}$

(b)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t-3$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$

線分 OA を $t:1$ に内分する点を D とし，△OCD の面積を $S(t)$ とする。$S(t)$ の最大値を求めよ。

９　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［京都大・理］

α は $0 < \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とし，四角形 ABCD に関する次の 2 つの条件を考える。

(i)　四角形 ABCD は半径 1 の円に内接する。

(ii)　$\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{DAB} = \alpha$

条件(i)と(ii)を満たす四角形のなかで，4 辺の長さの積 $k = \mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DA}$ が最大となるものについて，k の値を求めよ。

$\boxed{10}$　　［東北大・理］

三角形 ABC の内接円の半径を r, 外接円の半径を R とし, $h=\dfrac{r}{R}$ とする。また, $\angle\mathrm{A}=2\alpha$, $\angle\mathrm{B}=2\beta$, $\angle\mathrm{C}=2\gamma$ とおく。

(1) $h=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ となることを示せ。

(2) 三角形 ABC が直角三角形のとき $h\leqq\sqrt{2}-1$ が成り立つことを示せ。また, 等号が成り立つのはどのような場合か。

(3) 一般の三角形 ABC に対して $h\leqq\dfrac{1}{2}$ が成り立つことを示せ。また, 等号が成り立つのはどのような場合か。