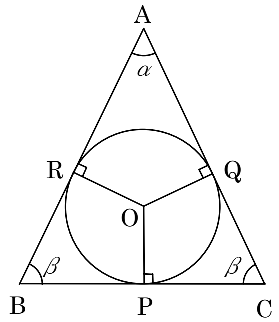
1　　　　［筑波大・理］



(1)　二等辺三角形 ABC の半径 1 の内接円の中心を O とおくと，△AOQ において，

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\mathrm{AQ}},\ \ \mathrm{AQ}=\frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}}$$

△COQ において同様に，$\mathrm{QC}=\dfrac{1}{\tan\frac{\beta}{2}}$

(2)　まず，$\mathrm{BC}=2\mathrm{PC}=2\mathrm{QC}=\dfrac{2}{\tan\frac{\beta}{2}}=\dfrac{2}{t}$

また，A, O, P は同一直線上にあるので，

$$\mathrm{AP}=\mathrm{PC}\tan\beta=\mathrm{QC}\tan\beta=\frac{1}{\tan\frac{\beta}{2}}\cdot\frac{2\tan\frac{\beta}{2}}{1-\tan^2\frac{\beta}{2}}=\frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{1-t^2}=\frac{2}{1-t^2}$$

よって，△ABC の面積 S は，$S=\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AP}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{t}\cdot\dfrac{2}{1-t^2}=\dfrac{2}{t(1-t^2)}$

(3)　$\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{\pi-\alpha}{4}$ より $0<\dfrac{\beta}{2}<\dfrac{\pi}{4}$ となり，$0<\tan\dfrac{\beta}{2}<1$ すなわち $0<t<1$ である。

さて，$f(t)=t(1-t^2)$ とおくと，$S=\dfrac{2}{f(t)}$ となり，

$$f'(t)=1-3t^2$$

すると，$f(t)$ の増減は右表のようになり，$0<t<1$ において $0<f(t)\leqq\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ であり，

$$S\geqq2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0

等号が成り立つのは，$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\tan\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ のときなので，$\beta=\dfrac{\pi}{3}$ である。このとき $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ となり，△ABC は正三角形である。

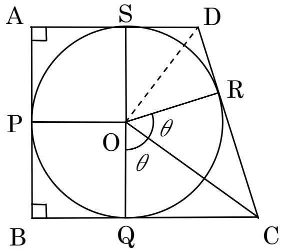
［解　説］

三角比と図形についての基本問題です。加えて，最小値を求めるときに微分法を利用するように構成されています。

２　　　　［京都大］

四角形 ABCD について，その内接円の中心を O，また内接円との接点を P，Q，R，S とおく。条件(a)より，90° の内角が隣り合う場合と向かい合う場合に分けて考える。

(i)　90° の内角が隣り合う $(\angle A=\angle B=90^\circ)$ のとき

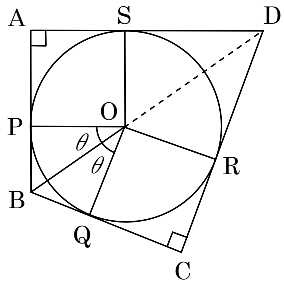


右図のように $\angle COQ=\angle COR=\theta$ $(0^\circ<\theta<90^\circ)$ とおくと，$\angle DOR=\angle DOS=90^\circ-\theta$ となる。これより，四角形 ABCD の面積 S は，

$$S=1^2+1^2+2\cdot\frac{1}{2}\tan\theta+2\cdot\frac{1}{2}\tan(90^\circ-\theta)$$
$$=2+\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\geqq 2+2\sqrt{\tan\theta\cdot\frac{1}{\tan\theta}}=4$$

等号成立は $\tan\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$ $(\theta=45^\circ)$ のときであり，このとき四角形 ABCD は正方形となる。

(ii)　90° の内角が向かい合う $(\angle A=\angle C=90^\circ)$ のとき



右図のように $\angle BOP=\angle BOQ=\theta$ $(0^\circ<\theta<90^\circ)$ とおくと，$\angle DOR=\angle DOS=90^\circ-\theta$ となる。これより，四角形 ABCD の面積 S は，

$$S=1^2+2\cdot\frac{1}{2}\tan\theta+1^2+2\cdot\frac{1}{2}\tan(90^\circ-\theta)$$
$$=2+\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$$

(i)と同様に，四角形 ABCD が正方形のとき S は最小値 4 をとる。

(i)(ii)より，四角形 ABCD の面積の最小値は 4 である。

［解　説］

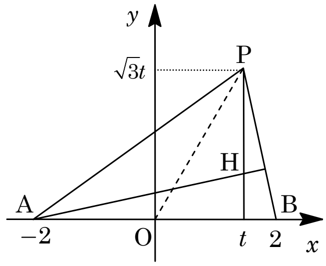
いったん 2 つの場合に分けましたが，計算を進めていくと，同じものとなります。そして，結論は予想通りとなりました。

3　　　　　　　　　　　　　　　　［東北大］

(1)　$t>0$ のとき $\angle\mathrm{PAB}<\dfrac{\pi}{2}$ であるので，$\triangle\mathrm{APB}$ が鋭角三角形となる条件は $\angle\mathrm{PBA}<\dfrac{\pi}{2}$ かつ $\angle\mathrm{APB}<\dfrac{\pi}{2}$ である。

すると，$t<2$ かつ $\mathrm{OP}>2$ $(2t>2)$ となる。

よって，求める t の範囲は，$1<t<2$ である。



(2)　P から辺 AB に引いた垂線の式は，$x=t$ ………①

また，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(t-2,\ \sqrt{3}t)$ より，A から辺 BP に引いた垂線の式は，

$$(t-2)(x+2)+\sqrt{3}ty=0\ \text{………②}$$

①②を連立して，$(t-2)(t+2)+\sqrt{3}ty=0$ より，$y=\dfrac{4-t^2}{\sqrt{3}t}$

よって，$\triangle\mathrm{APB}$ の垂心 H の座標は，$\left(t,\ \dfrac{4-t^2}{\sqrt{3}t}\right)$ である。

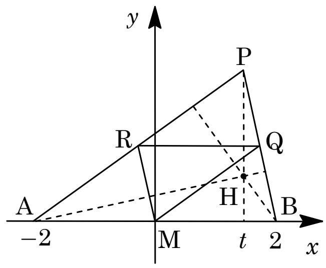
(3)　M, Q, R は，それぞれ辺 AB, BP, PA の中点なので，

$$\mathrm{RQ}/\!/\mathrm{AB},\ \mathrm{QM}/\!/\mathrm{PA},\ \mathrm{RM}/\!/\mathrm{PB}$$

ここで，H は $\triangle\mathrm{APB}$ の垂心より，

$$\mathrm{PH}\perp\mathrm{RQ},\ \mathrm{BH}\perp\mathrm{QM},\ \mathrm{AH}\perp\mathrm{RM}\ \text{………③}$$

さて，xy 平面に垂直に z 軸をとり，$\triangle\mathrm{ABP}$ を線分 MQ, QR, RM で折り曲げてできる四面体において，P, A, B が重なってできる頂点を C とする。



すると，③より，s を正の実数として，$\mathrm{C}\left(t,\ \dfrac{4-t^2}{\sqrt{3}t},\ s\right)$ と表せる。

そこで，$\mathrm{CM}=2$ から，$t^2+\left(\dfrac{4-t^2}{\sqrt{3}t}\right)^2+s^2=4$ となり，

$$s^2=4-t^2-\frac{(4-t^2)^2}{3t^2}=\frac{-4t^4+20t^2-16}{3t^2}$$

よって，$s=\dfrac{2\sqrt{-t^4+5t^2-4}}{\sqrt{3}t}$ となり，四面体 CMQR の体積を V とすると，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\triangle\mathrm{ABP}\right)s=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}t\cdot\frac{2\sqrt{-t^4+5t^2-4}}{\sqrt{3}t}=\frac{1}{3}\sqrt{-\left(t^2-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4}}$$

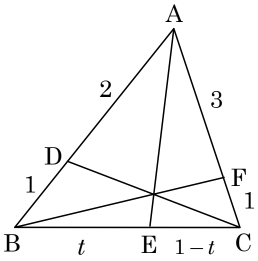
$1<t<2$ から，$t^2=\dfrac{5}{2}$ $\left(t=\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)$ のとき，V は最大値 $\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\dfrac{1}{2}$ をとる。

［解　説］

一見，無関係と思える(2)と(3)ですが，(2)は(3)に不可欠な誘導です。なお，直角三角形が題材になっている類題が，北大で 2009 年に出ています。

4　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［九州大］

(1)　△ABC において，$AD:DB=2:1$，$BE:EC=t:1-t$，$CF:FA=1:3$ であり，$t=t_0$ のとき, AE, BF, CD が 1 点で交わることより，チェバの定理から,

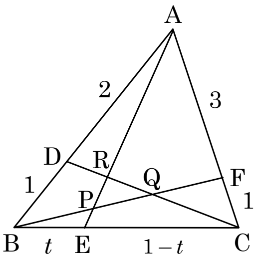


$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}=1,\ \ \frac{2}{1}\cdot\frac{t_0}{1-t_0}\cdot\frac{1}{3}=1$$

すると，$2t_0=3(1-t_0)$ から，$t_0=\dfrac{3}{5}$ となる。

(2)　条件より，$AP=kAE$，$CR=lCD$ なので,

$$AP:PE=k:1-k,\ \ CR:RD=l:1-l$$



さて, △AEC と直線 BF にメネラウスの定理を適用して,

$$\frac{AP}{PE}\cdot\frac{EB}{BC}\cdot\frac{CF}{FA}=1,\ \ \frac{k}{1-k}\cdot\frac{t}{1}\cdot\frac{1}{3}=1$$

すると，$kt=3(1-k)$ より，$k=\dfrac{3}{3+t}$ となる。

また, △CDB と直線 AE にメネラウスの定理を適用して,

$$\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DA}{AB}\cdot\frac{BE}{EC}=1,\ \ \frac{l}{1-l}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{t}{1-t}=1$$

すると，$2lt=3(1-l)(1-t)$ より，$(3-t)l=3-3t$，$l=\dfrac{3-3t}{3-t}$ となる。

(3)　$BQ:QF=m:1-m$ とし, △BFA と直線 CD にメネラウスの定理を適用して,

$$\frac{BQ}{QF}\cdot\frac{FC}{CA}\cdot\frac{AD}{DB}=1,\ \ \frac{m}{1-m}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{1}=1$$

すると，$2m=4(1-m)$ より，$m=\dfrac{2}{3}$ となる。

よって, △ABC の面積が 1 から, $\triangle BCQ=\dfrac{2}{3}\triangle BCF=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{4}\triangle ABC=\dfrac{1}{6}$

(4)　(2)から，$AP:PE=\dfrac{3}{3+t}:\left(1-\dfrac{3}{3+t}\right)=3:t$ となり,

$$\triangle ABP=\frac{3}{3+t}\triangle ABE=\frac{3}{3+t}\cdot t\triangle ABC=\frac{3t}{3+t}$$

また，$CR:RD=\dfrac{3-3t}{3-t}:\left(1-\dfrac{3-3t}{3-t}\right)=3-3t:2t$ から,

$$\triangle CAR=\frac{3-3t}{3-3t+2t}\triangle CAD=\frac{3-3t}{3-t}\cdot\frac{2}{3}\triangle ABC=\frac{2-2t}{3-t}$$

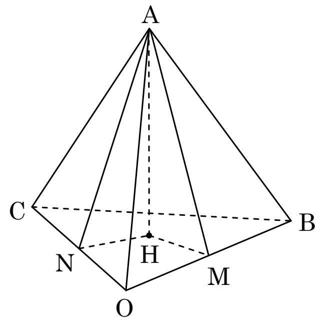
すると，$\triangle PQR=\triangle ABC-\triangle BCQ-\triangle CAR-\triangle ABP$ より,

$$\triangle PQR=1-\frac{1}{6}-\frac{2-2t}{3-t}-\frac{3t}{3+t}=\frac{25t^2-30t+9}{6(3-t)(3+t)}=\frac{(5t-3)^2}{6(3-t)(3+t)}$$

［解 説］

平面図形の基本定理を適用する問題です。ベクトルを利用する手もありますが。

5　　　　[京都大・理]



四面体 OABC において，頂点 A から面 OBC に下ろした垂線の足を H，また辺 OB，OC の中点をそれぞれ M，N とおく。

条件より，点 H は△OBC の外心なので，

$$\mathrm{HM}\perp\mathrm{OB} \quad \text{かつ} \quad \mathrm{HN}\perp\mathrm{OC}$$

すると，AH は面 OBC に垂直で $\mathrm{HM}\perp\mathrm{OB}$ なので，三垂線の定理から，$\mathrm{AM}\perp\mathrm{OB}$ となる。すなわち，△AOB は $\mathrm{AO}=\mathrm{AB}$ の二等辺三角形である。

同様に，AH は面 OBC に垂直で $\mathrm{HN}\perp\mathrm{OC}$ なので，三垂線の定理から，$\mathrm{AN}\perp\mathrm{OC}$ となる。すなわち，△AOC は $\mathrm{AO}=\mathrm{AC}$ の二等辺三角形である。

したがって，$\mathrm{AO}=\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ である。

また，頂点 B から面 OCA に下ろした垂線の足が△OCA の外心なので，同様にすると，$\mathrm{BO}=\mathrm{BC}=\mathrm{BA}$ である。

さらに，頂点 C から面 OAB に下ろした垂線の足が△OAB の外心なので，同様にすると，$\mathrm{CO}=\mathrm{CA}=\mathrm{CB}$ である。

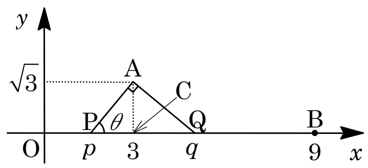
以上より，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$ となるので，四面体 OABC は正四面体である。

[解　説]

空間図形の証明問題です。同じ構図の問題で「重心」となっているのが文系で出題されていますが，そこではベクトル利用で解答例をつくりました。それに対して，理系では「外心」ですので，ベクトルでの表現が難しく，ここでは三垂線の定理を適用した解答例にしています。

6　　［千葉大・文］

(1)　$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(3,\ \sqrt{3})$，$\mathrm{B}(9,\ 0)$に対し，線分 OB 上に点$\mathrm{P}(p,\ 0)$，$\mathrm{Q}(q,\ 0)$があり，$\angle\mathrm{PAQ}=90^\circ$を満たしている。ただし，$0\leqq p<3<q\leqq 9$である。



$\angle\mathrm{APQ}=\theta$とすると，$\mathrm{AP}\sin\theta=\sqrt{3}$ ………①

$$\mathrm{AQ}\sin(90^\circ-\theta)=\sqrt{3}\ ,\ \ \mathrm{AQ}\cos\theta=\sqrt{3}\ \text{………②}$$

ここで，$\triangle\mathrm{APQ}$の面積をSとすると，①②から，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sin\theta}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos\theta}=\frac{3}{\sin 2\theta}$$

(2)　まず，(1)から$S=\dfrac{3}{\sin 2\theta}\geqq 3$である。ここで，等号が成立するのは$\sin 2\theta=1$，すなわち$\theta$は鋭角から$\theta=45^\circ$のときである。

このとき，$\triangle\mathrm{APQ}$ は直角二等辺三角形となり，$\mathrm{C}(3,\ 0)$とおくと$\mathrm{PC}=\mathrm{QC}=\sqrt{3}$から，P, Q はともに線分 OB 上にある。

よって，S の最小値は 3 であり，このとき P の x 座標は$3-\sqrt{3}$，Q の x 座標は$3+\sqrt{3}$となる。

(3)　まず，$\triangle\mathrm{AOB}=\dfrac{1}{2}\cdot 9\cdot\sqrt{3}=\dfrac{9}{2}\sqrt{3}$となり，条件より$S=\dfrac{2}{3}\triangle\mathrm{AOB}$から，

$$\frac{3}{\sin 2\theta}=\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{2}\sqrt{3}\ ,\ \ \sin 2\theta=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \ \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2\sqrt{3}}\text{………③}$$

ここで，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$なので，③と合わせると，

$$\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=2\sqrt{3}\ ,\ \ \tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=2\sqrt{3}\ ,\ \ \tan^2\theta-2\sqrt{3}\tan\theta+1=0$$

よって，$\tan\theta=\sqrt{3}\pm\sqrt{2}$ ……④となる。

さて，$\mathrm{PC}=\sqrt{3}\tan(90^\circ-\theta)=\dfrac{\sqrt{3}}{\tan\theta}$，$\mathrm{QC}=\sqrt{3}\tan\theta$で，条件から，$0<\mathrm{PC}\leqq 3$，$0<\mathrm{QC}\leqq 6$であるので，

$$0<\frac{\sqrt{3}}{\tan\theta}\leqq 3\text{………⑤},\ \ 0<\sqrt{3}\tan\theta\leqq 6\text{………⑥}$$

⑤より$\tan\theta\geqq\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，⑥より$0<\tan\theta\leqq 2\sqrt{3}$となり$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\leqq\tan\theta\leqq 2\sqrt{3}$

すると，④から$\tan\theta=\sqrt{3}+\sqrt{2}$となり，このとき，

$$\mathrm{PC}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=3-\sqrt{6}\ ,\ \ \mathrm{QC}=\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2})=3+\sqrt{6}$$

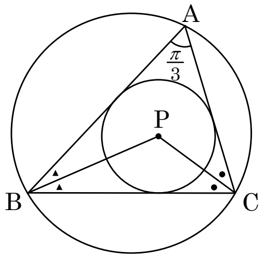
よって，P の x 座標$3-(3-\sqrt{6})=\sqrt{6}$，Q の x 座標$3+(3+\sqrt{6})=6+\sqrt{6}$である。

［解　説］

三角関数の図形への応用問題で，いろいろな解法が考えられます。

７　　　　［京都大・理］

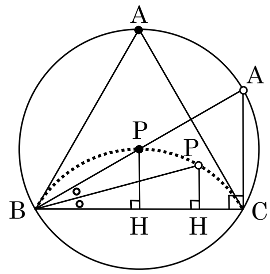
(1)　△ABC の内心を P とするとき，



$$\angle\mathrm{BPC}=\pi-(\angle\mathrm{PBC}+\angle\mathrm{PCB})$$
$$=\pi-\frac{1}{2}(\angle\mathrm{ABC}+\angle\mathrm{ACB})=\pi-\frac{1}{2}(\pi-\angle\mathrm{A})$$
$$=\pi-\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2}{3}\pi$$

(2)　△ABC の外接円の半径は 1 から，正弦定理より，

$$\mathrm{BC}=2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$

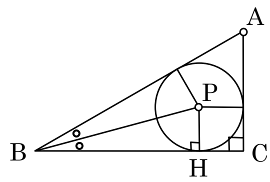


さて，△ABC は$\angle\mathrm{A}=\frac{\pi}{3}$である鋭角三角形である。ここで，$\triangle\mathrm{A_1BC}$を正三角形，$\triangle\mathrm{A_2BC}$を$\angle\mathrm{C}=\frac{\pi}{2}$の直角三角形としたとき，対称性から一般性を失うことなく，点 A は右図の弧$\mathrm{A_1A_2}$上を動くとしてもよい。ただし，点$\mathrm{A_1}$は含み，点$\mathrm{A_2}$は含まない。

また，点 P は$\angle\mathrm{BPC}=\frac{2}{3}\pi$から BC を弦とする点線の円弧上を動く。そして，$\mathrm{A}=\mathrm{A_1}$のとき$\mathrm{P}=\mathrm{P_1}$，$\mathrm{A}=\mathrm{A_2}$のとき$\mathrm{P}=\mathrm{P_2}$とする。さらに，$\mathrm{P_1}$から BC に垂線$\mathrm{P_1H_1}$，$\mathrm{P_2}$から BC に垂線$\mathrm{P_2H_2}$を引く。

すると，△ABC の内接円の半径rのとりうる値は，$\mathrm{P_2H_2}<r\leqq\mathrm{P_1H_1}$である。

そこで，$\angle\mathrm{P_1BH_1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$から，$\mathrm{P_1H_1}=\frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$



また，$\triangle\mathrm{A_2BC}$は，$\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{AC}=1$，$\mathrm{BC}=\sqrt{3}$なので，右図から，

$$(\sqrt{3}-\mathrm{P_2H_2})+(1-\mathrm{P_2H_2})=2,\ \mathrm{P_2H_2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

以上より，$\frac{\sqrt{3}-1}{2}<r\leqq\frac{1}{2}$である。

［解　説］

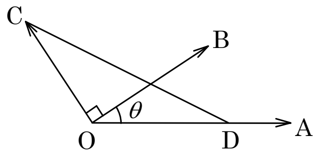
平面図形の計量についての基本的な問題です。(1)の誘導により，内心の軌跡が導けます。

$\boxed{8}$ ［信州大・医］

条件(a)から，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角 θ に対し，$\tan\theta=\dfrac{1}{t+1}$ ………①

条件(b)から，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t-3$ ……②，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$ ……③

ここで，$0<t<3$ より，①から $\theta=\angle\mathrm{AOB}$ は鋭角，②から $\angle\mathrm{AOC}$ は鈍角となり，③より $\angle\mathrm{BOC}$ は直角なので，



$$\angle\mathrm{AOC}=\theta+\frac{\pi}{2}$$

すると，②より，$\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}\cdot\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=t-3$

$$-\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}\cdot\sin\theta=t-3,\ \mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}=\frac{3-t}{\sin\theta}\ \cdots\cdots\cdots④$$

さて，線分 OA を $t:1$ に内分する点 D に対して，△OCD の面積 $S(t)$ は，

$$S(t)=\frac{1}{2}\mathrm{OD}\cdot\mathrm{OC}\cdot\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t+1}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}\cdot\cos\theta$$

④を代入すると，$S(t)=\dfrac{t}{2(t+1)}\cdot\dfrac{3-t}{\sin\theta}\cdot\cos\theta=\dfrac{t(3-t)}{2(t+1)}\cdot\dfrac{1}{\tan\theta}$ となり，①から，

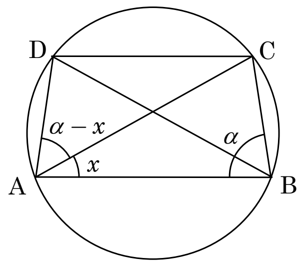
$$S(t)=\frac{t(3-t)}{2(t+1)}\cdot(t+1)=-\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}t=-\frac{1}{2}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{8}$$

よって，$S(t)$ は $t=\dfrac{3}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{9}{8}$ をとる。

［解　説］

ベクトルの内積が絡んだ形式をしていますが，内容は三角比の応用です。

９　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［京都大・理］



半径 1 の円に内接する四角形 ABCD に対して，$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{DAB}=\alpha\left(0<\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$から，

$$\angle\mathrm{BCD}=\angle\mathrm{ADC}=\pi-\alpha$$

これより，四角形 ABCD は AB // DC の等脚台形である。

さて，$\angle\mathrm{BAC}=x\ (0<x<\alpha)$ とおくと，$\angle\mathrm{CAD}=\alpha-x$，$\angle\mathrm{ACB}=\pi-(\alpha+x)$となり，正弦定理より，

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin x}=2\cdot1,\ \frac{\mathrm{CD}}{\sin(\alpha-x)}=2\cdot1,\ \frac{\mathrm{AB}}{\sin(\alpha+x)}=2\cdot1$$

すると，$\mathrm{BC}=2\sin x$，$\mathrm{CD}=2\sin(\alpha-x)$，$\mathrm{AB}=2\sin(\alpha+x)$ となり，$\mathrm{DA}=\mathrm{BC}$ から，4 辺の長さの積$k=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DA}$は,

$$\begin{aligned}k&=16\sin^2x\sin(\alpha+x)\sin(\alpha-x)=8\sin^2x(\cos2x-\cos2\alpha)\\&=8\sin^2x(1-2\sin^2x-1+2\sin^2\alpha)=-16\sin^4x+16\sin^2\alpha\sin^2x\\&=-16\left(\sin^2x-\frac{1}{2}\sin^2\alpha\right)^2+4\sin^4\alpha\end{aligned}$$

$0<x<\alpha$ なので $0<\sin x<\sin\alpha$ となり，$\sin^2x=\dfrac{1}{2}\sin^2\alpha\left(\sin x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha\right)$のとき，$k$ は最大値 $4\sin^4\alpha$ をとる。

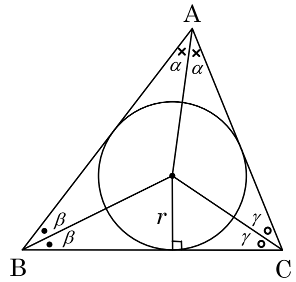
［解 説］

円に内接する台形は等脚台形となりますが，これに正弦定理の適用させて 4 辺の長さを評価する問題です。

10　　［東北大・理］

(1)　△ABC において，$\angle A = 2\alpha$，$\angle B = 2\beta$，$\angle C = 2\gamma$ より，

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}\cdots\cdots\cdots①$$



ここで，△ABC の内接円の半径 r に対して，

$$BC=\frac{r}{\tan\beta}+\frac{r}{\tan\gamma}=r\left(\frac{\cos\beta}{\sin\beta}+\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\right)$$

$$=r\cdot\frac{\cos\beta\sin\gamma+\sin\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}=r\cdot\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}$$

①より，$\sin(\beta+\gamma)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$ となり，$BC=r\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}\cdots\cdots\cdots②$

また，△ABC の外接円の半径 R に対して，正弦定理から，

$$BC=2R\sin2\alpha=4R\sin\alpha\cos\alpha\cdots\cdots\cdots③$$

②③から，$r\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}=4R\sin\alpha\cos\alpha$ となり，$r=4R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ より，

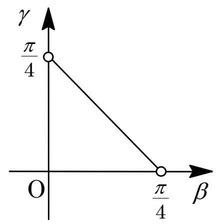
$$h=\frac{r}{R}=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\cdots\cdots\cdots④$$

(2)　△ABC が直角三角形のとき，$\angle A=\frac{\pi}{2}\left(\alpha=\frac{\pi}{4}\right)$としても一般性を失わない。

このとき，①から $\beta+\gamma=\frac{\pi}{4}$ となり，④より，

$$h=4\sin\frac{\pi}{4}\sin\beta\sin\gamma=2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\{\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma)\}$$

$$=\sqrt{2}\left\{\cos(\beta-\gamma)-\cos\frac{\pi}{4}\right\}=\sqrt{2}\cos(\beta-\gamma)-1$$



ここで，$-\frac{\pi}{4}<\beta-\gamma<\frac{\pi}{4}$ なので，$\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos(\beta-\gamma)\leqq1$ から，

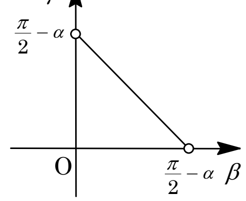
$$h\leqq\sqrt{2}\cdot1-1=\sqrt{2}-1$$

等号は $\cos(\beta-\gamma)=1$ すなわち $\beta=\gamma$ のとき成立するので，このとき△ABC は直角二等辺三角形となる。

(3)　まず，α を $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ で固定すると，①から $\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}-\alpha$ となり，(2)と同様に，

$$h=4\sin\alpha\cdot\frac{1}{2}\{\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma)\}=2\sin\alpha\left\{\cos(\beta-\gamma)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right\}$$

$$=2\sin\alpha\{\cos(\beta-\gamma)-\sin\alpha\}$$



ここで，$-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)<\beta-\gamma<\frac{\pi}{2}-\alpha$ なので，

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)<\cos(\beta-\gamma)\leqq1$$

すると，$\sin\alpha<\cos(\beta-\gamma)\leqq1$ から，

$$h\leqq2\sin\alpha(1-\sin\alpha)=2\sin\alpha-2\sin^2\alpha=-2\left(\sin\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots⑤$$

そこで，α を $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で動かすと，$0<\sin\alpha<1$ から，

$$-2\left(\sin\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\leqq\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤⑥より，$h\leqq\dfrac{1}{2}$ となる。

そして，等号が成立するのは，$\beta=\gamma$ かつ $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$ のときで，$\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{\pi}{6}$ から，△ABC は正三角形となる。

［解 説］

三角関数の三角形への応用問題です。(3)は 1 文字を固定して最大・最小を考える設問ですが，(2)を誘導としてとらえると，その方針は明快です。