１　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［広島大・理］

m, n を自然数とする。次の問いに答えよ。

(1)　$m \geqq 2$，$n \geqq 2$ とする。異なる m 種類の文字から重複を許して n 個を選び，1 列に並べる。このとき，ちょうど 2 種類の文字を含む文字列は何通りあるか求めよ。

(2)　$n \geqq 3$ とする。3 種類の文字 a, b, c から重複を許して n 個を選び，1 列に並べる。このとき a, b, c すべての文字を含む文字列は何通りあるか求めよ。

(3)　$n \geqq 3$ とする。n 人を最大 3 組までグループ分けする。このときできたグループ数が 2 である確率 p_n を求めよ。ただし，どのグループ分けも同様に確からしいとする。たとえば，$n=3$ のとき，A, B, C の 3 人をグループ分けする方法は，

$\{(\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C})\}$，$\{(\mathrm{A},\ \mathrm{B}),\ (\mathrm{C})\}$，$\{(\mathrm{A},\ \mathrm{C}),\ (\mathrm{B})\}$，

$\{(\mathrm{B},\ \mathrm{C}),\ (\mathrm{A})\}$，$\{(\mathrm{A}),\ (\mathrm{B}),\ (\mathrm{C})\}$

の 5 通りであるので，$p_3 = \dfrac{3}{5}$ である。

(4)　(3)の確率 p_n が $\dfrac{1}{3}$ 以下となるような n の値の範囲を求めよ。

2 ［名古屋大・理］

数直線上にある 1, 2, 3, 4, 5 の 5 つの点と 1 つの石を考える。石がいずれかの点にあるとき,

$$\begin{cases} \text{石が点 } 1 \text{ にあるならば, 確率 } 1 \text{ で点 } 2 \text{ に移動する} \\ \text{石が点 } k\ (k=2,\ 3,\ 4) \text{ にあるならば, 確率 } \dfrac{1}{2} \text{ で点 } k-1 \text{ に, 確率 } \dfrac{1}{2} \text{ で点 } k+1 \text{ に} \\ \text{移動する} \\ \text{石が点 } 5 \text{ にあるならば, 確率 } 1 \text{ で点 } 4 \text{ に移動する} \end{cases}$$

という試行を行う。石が点 1 にある状態から始め, この試行を繰り返す。また, 石が移動した先の点に印をつけていく(点 1 には初めから印がついているものとする)。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 試行を 6 回繰り返した後に, 石が点 k $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ にある確率をそれぞれ求めよ。

(2) 試行を 6 回繰り返した後に, 5 つの点すべてに印がついている確率を求めよ。

(3) 試行を n 回 $(n \geqq 1)$ 繰り返した後に, ちょうど 3 つの点に印がついている確率を求めよ。

$\boxed{3}$ ［東京大・文］

投げたとき表と裏の出る確率がそれぞれ$\dfrac{1}{2}$のコインを 1 枚用意し，次のように左から順に文字を書く。

コインを投げ，表が出たときは文字列 AA を書き，裏が出たときは文字 B を書く。さらに繰り返しコインを投げ，同じ規則に従って，AA, B をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。たとえば，コインを 5 回投げ，その結果が順に表，裏，裏，表，裏であったとすると，得られる文字列は，AABBAAB となる。このとき，左から 4 番目の文字は B，5 番目の文字は A である。

(1) n を正の整数とする。n 回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ。

(2) n を 2 以上の整数とする。n 回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字が B となる確率を求めよ。

$\boxed{4}$　　［京都大・理］

2 つの関数を，$f_0(x)=\dfrac{x}{2}$，$f_1(x)=\dfrac{x+1}{2}$ とおく。$x_0=\dfrac{1}{2}$ から始め，各 $n=1,\ 2,\ \cdots$ について，それぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ で $x_n=f_0(x_{n-1})$ または $x_n=f_1(x_{n-1})$ と定める。このとき $x_n<\dfrac{2}{3}$ となる確率 P_n を求めよ。

5　　　　［信州大・医］

n を 2 以上の自然数とする。n 人でじゃんけんをする。各人はグー，チョキ，パーをそれぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で出すものとする。勝者が 1 人に決まるまでじゃんけんを繰り返す。ただし，負けた人はその後のじゃんけんには参加しない。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 1 回目のじゃんけんで，勝者がただ 1 人に決まる確率を求めよ。

(2) 1 回目のじゃんけんで，あいこになる確率を求めよ。

(3) $n=5$ のとき，ちょうど 2 回のじゃんけんで，勝者がただ 1 人に決まる確率を求めよ。

6　　［東北大・理］

サイコロを 3 回振って出た目の数をそれぞれ順に $a,\ b,\ c$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$a,\ b,\ c$ がある直角三角形の 3 辺の長さとなる確率を求めよ。

(2)　$a,\ b,\ c$ がある鈍角三角形の 3 辺の長さとなる確率を求めよ。

7　　［東京大・文］

A, B, C の 3 つのチームが参加する野球の大会を開催する。以下の方式で試合を行い，2 連勝したチームが出た時点で，そのチームを優勝チームとして大会は終了する。

(a)　1 試合目で A と B が対戦する。

(b)　2 試合目で，1 試合目の勝者と，1 試合目で待機していた C が対戦する。

(c)　k 試合目で優勝チームが決まらない場合は，k 試合目の勝者と，k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する。ここで k は 2 以上の整数とする。

なお，すべての対戦において，それぞれのチームが勝つ確率は $\dfrac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする。

(1)　ちょうど 5 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(2)　n を 2 以上の整数とする。ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(3)　m を正の整数とする。総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝する確率を求めよ。

８　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［名古屋大・理］

玉が 2 個ずつ入った 2 つの袋 A，B があるとき，袋 B から玉を 1 個取り出して袋 A に入れ，次に袋 A から玉を 1 個取り出して袋 B に入れる，という操作を 1 回の操作と数えることにする。A に赤玉が 2 個，B に白玉が 2 個入った状態から始め，この操作を n 回繰り返した後に袋 B に入っている赤玉の個数が k 個である確率を $P_n(k)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$k=0,\ 1,\ 2$ に対する $P_1(k)$ を求めよ。

(2)　$k=0,\ 1,\ 2$ に対する $P_n(k)$ を求めよ。

９　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［広島大・文］

n を 2 以上の自然数とする。次の問いに答えよ。

(1)　変量 x のデータの値が x_1, x_2, …, x_n であるとし, $f(a)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2$ とする。$f(a)$ を最小にする a は x_1, x_2, …, x_n の平均値で, そのときの最小値は x_1, x_2, …, x_n の分散であることを示せ。

(2)　c を定数として, 変量 y, z の k 番目のデータの値が

$$y_k=k\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n),\ \ z_k=ck\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

であるとする。このとき y_1, y_2, …, y_n の分散が z_1, z_2, …, z_n の分散より大きくなるための c の必要十分条件を求めよ。

(3)　変量 x のデータの値が x_1, x_2, …, x_n であるとし, その平均値を $\overline{x}$ とする。新たにデータを得たとし, その値を x_{n+1} とする。x_1, x_2, …, x_n, x_{n+1} の平均値を x_{n+1}, $\overline{x}$ および n を用いて表せ。

(4)　次の 40 個のデータの平均値, 分散, 中央値を計算すると, それぞれ, ちょうど 40, 670, 35 であった。

120	10	60	70	30	20	20	30	20	60
40	50	40	10	30	40	40	30	20	70
100	20	20	40	40	60	70	20	50	10
30	10	50	80	10	30	70	10	60	10

新たにデータを得たとし, その値が 40 であった。このとき, 41 個のすべてのデータの平均値, 分散, 中央値を求めよ。ただし, 得られた値が整数でない場合は, 小数第 1 位を四捨五入せよ。

10　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［京都大・文］

n を 2 以上の自然数とする。さいころを n 回振り，出た目の最大値 M と最小値 L の差 $M-L$ を X とする。

(1)　$X=1$ である確率を求めよ。

(2)　$X=5$ である確率を求めよ。

11　　［東京大・理］

座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という。格子点上を次の規則に従って動く点 P を考える。

(a)　最初に，点 P は原点 O にある。

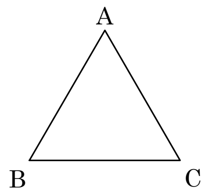
(b)　ある時刻で点 P が格子点 $(m,\ n)$ にあるとき，その 1 秒後の点 P の位置は，隣接する格子点 $(m+1,\ n)$，$(m,\ n+1)$，$(m-1,\ n)$，$(m,\ n-1)$ のいずれかであり，また，これらの点に移動する確率は，それぞれ $\dfrac{1}{4}$ である。

(1)　点 P が，最初から 6 秒後に直線 $y=x$ 上にある確率を求めよ。

(2)　点 P が，最初から 6 秒後に原点 O にある確率を求めよ。

$\boxed{12}$ ［広島大・理］

表が出る確率が p, 裏が出る確率が $1-p$ であるようなコインがある。ただし, $0<p<1$ である。このとき, 右図のような正三角形の 3 頂点 A, B, C を次の規則で移動する動点 R を考える。



コインを投げて表が出れば R は反時計まわりに隣の頂点に移動し, 裏が出れば R は時計まわりに隣の頂点に移動する。

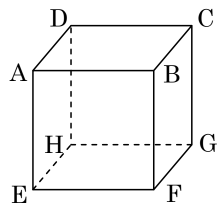
R は最初 A にあり, 全部で $(2N+3)$ 回移動する。ここで, N は自然数である。移動回数がちょうど k に達したときに R が A に初めて戻る確率を P_k $(k=2,\ 3,\ \cdots,\ 2N+3)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) P_2, P_3 を求めよ。

(2) P_{2m}, P_{2m+1} $(2\leqq m\leqq N+1)$ を求めよ。

(3) $p=\dfrac{1}{2}$ とする。移動回数がちょうど $2N+3$ に達したときに R が A に 2 度目に戻る確率 Q を求めよ。

$\boxed{13}$ ［名古屋大・文］



右図のような立方体がある。この立方体の 8 つの頂点の上を点 P が次の規則で移動する。時刻 0 では点 P は頂点 A にいる。時刻が 1 増えるごとに点 P は，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する。たとえば時刻 n で点 P が頂点 H にいるとすると，時刻 $n+1$ では，それぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で頂点 D，E，G のいずれかにいる。自然数 $n \geqq 1$ に対して，(i) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 B，D，E のいずれかにいる確率を p_n，(ii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 C，F，H のいずれかにいる確率を q_n，(iii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 G にいる確率を r_n，とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　p_2，q_2，r_2 と p_3，q_3，r_3 を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき，p_n，q_n，r_n を求めよ。

(3)　自然数 $m \geqq 1$ に対して，点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m を求めよ。

14　　［北海道大・文］

赤色, 青色, 黄色のサイコロが 1 つずつある。この 3 つのサイコロを同時に投げる。赤色, 青色, 黄色のサイコロの出た目の数をそれぞれ R, B, Y とし, 自然数 s, t, u を $s=100R+10B+Y$, $t=100B+10Y+R$, $u=100Y+10R+B$ で定める。

(1)　s, t, u のうち少なくとも 2 つが 500 以上となる確率を求めよ。

(2)　$s>t>u$ となる確率を求めよ。

15　　［千葉大・文］

箱の中に n 枚のカードが入っている。ただし $n \geqq 3$ とする。そのうち 1 枚は金色，1 枚は銀色，残りの $(n-2)$ 枚は白色である。この箱からカードを 1 枚取り出し，その色が金なら 50 点，銀なら 10 点，白なら 0 点と記録し，カードを箱に戻す。この操作を繰り返し，記録した点の合計が k 回目にはじめてちょうど 100 点となる確率を $P(k)$ とする。

(1)　確率 $P(4)$ を求めよ。

(2)　確率 $P(6)$ を求めよ。

(3)　確率 $P(11)$ を求めよ。

16　　［東北大・理］

n を 2 以上, a を 1 以上の整数とする。箱の中に, 1 から n までの番号札がそれぞれ 1 枚ずつ, 合計 n 枚入っている。この箱から, 1 枚の札を無作為に取り出して元に戻す, という試行を a 回繰り返す。ちょうど a 回目の試行でそれまでに取り出した札に書かれた数の和がはじめて n 以上となる確率を $p(a)$ とする。

(1)　$p(1)$ と $p(n)$ を求めよ。

(2)　$p(2)$ を求めよ。

(3)　n が 3 以上の整数のとき $p(3)$ を求めよ。

$\boxed{17}$ ［岡山大・理］

図 1 のような経路の図があり，次のようなゲームを考える。最初はⒶから出発し，1 回の操作で，1 個のさいころを投げて，出た目の数字が矢印にあればその方向に進み，なければその場にとどまる。この操作を繰り返し，Ⓓに到達したらゲームは終了する。

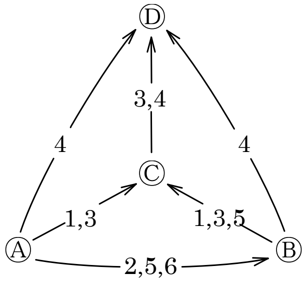


図1：経路の図

例えばⒷにいるときは，1，3，5 の目が出ればⒸへ進み，4 の目が出ればⒹへ進み，2，6 の目が出ればその場にとどまる。n を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1) ちょうど n 回の操作を行った後にⒷにいる確率を n の式で表せ。

(2) ちょうど n 回の操作を行った後にⒸにいる確率を n の式で表せ。

(3) ちょうど n 回の操作でゲームを終了する確率を n の式で表せ。

18 ［九州大・理］

1 から 4 までの数字を 1 つずつ書いた 4 枚のカードが箱に入っている。箱の中から 1 枚カードを取り出してもとに戻す試行を n 回続けて行う。k 回目に取り出したカードの数字を X_k とし，積 $X_1X_2\cdots X_n$ を 4 で割った余りが 0，1，2，3 である確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n，s_n とする。p_n，q_n，r_n，s_n を求めよ。

$\boxed{19}$ ［大阪大・理］

p, q を $0<p<1$, $0<q<1$ を満たす実数とし, n を 2 以上の整数とする。2 つのチーム A, B が野球の試合を n 回行う。1 試合目に A が勝つ確率は p であるとする。また, A が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は p であり, B が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は q であるとする。なお, 試合結果に引き分けはなく, 勝敗が決まるとする。

(1)　n 試合目に A が勝つ確率 a_n を求めよ。

(2)　$n \geqq 3$ とする。B が連勝せずにちょうど 2 試合に勝つ確率 b_n を求めよ。