1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［広島大・理］

(1)　異なる m 種類の文字から 2 種類の文字を選ぶ方法は，${}_m\mathrm{C}_2=\dfrac{m(m-1)}{2}$ 通り。

そして，この文字から重複を許して n 個を選び 1 列に並べるのは，2^n 通り。この中で，2 種類の文字を含むのは, 1 種類が 2 通りあるので，2^n-2 通りである。

よって，求める場合は，$\dfrac{m(m-1)}{2}(2^n-2)=m(m-1)(2^{n-1}-1)$ 通りである。

(2)　3 種類の文字から重複を許して n 個を選び 1 列に並べるのは，3^n 通り。

この中で，1 種類となるのは 3 通り，2 種類となるのは ${}_3\mathrm{C}_2(2^n-2)=3(2^n-2)$ 通りなので, 3 種類の文字を含む方法は,

$$3^n-3-3(2^n-2)=3^n-3\cdot 2^n+3 \quad（通り）$$

(3)　(i)　n 人を 1 組にグループ分けするとき　明らかに 1 通り。

(ii)　n 人を 2 組にグループ分けするとき

2 組のグループを区別したとき，その分け方は, 2 種類の文字を 1 列に並べ, 2 種類とも含む場合に一致するので，(1)から 2^n-2 通りとなる。これより，グループを区別しないときは，$\dfrac{2^n-2}{2!}=2^{n-1}-1$ 通りである。

(iii) n 人を 3 組にグループ分けするとき

3 組のグループを区別したとき，その分け方は, 3 種類の文字を 1 列に並べ, 3 種類とも含む場合に一致するので, (2)から $3^n-3\cdot 2^n+3$ 通りとなる。そして，グループを区別しないときは，$\dfrac{3^n-3\cdot 2^n+3}{3!}=\dfrac{3^{n-1}-2^n+1}{2}$ 通りである。

(i)～(iii)より, n 人を最大 3 組までグループ分けする方法は,

$$1+(2^{n-1}-1)+\frac{3^{n-1}-2^n+1}{2}=\frac{3^{n-1}+1}{2} \quad（通り）$$

すると，このときグループ数が 2 である確率 p_n は，$p_n=\dfrac{2(2^{n-1}-1)}{3^{n-1}+1}=\dfrac{2^n-2}{3^{n-1}+1}$

(4)　$p_n\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき，$\dfrac{2^n-2}{3^{n-1}+1}\leqq\dfrac{1}{3}$ となり，$3^{n-1}-3\cdot 2^n+7\geqq 0$ ………(＊)

ここで，$f(n)=3^{n-1}-3\cdot 2^n+7=3^{n-1}-6\cdot 2^{n-1}+7$ とおくと,

$$f(3)=-8<0,\ f(4)=-14<0,\ f(5)=-8<0,\ f(6)=58>0$$

さて，$n\geqq 6$ において，$\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}\geqq\left(\dfrac{3}{2}\right)^5=\dfrac{243}{32}>6$ より，$f(n)>7>0$ である。

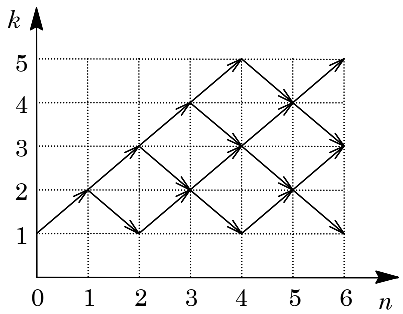
よって，(＊)が成り立つ n の値の範囲は，$n\geqq 6$ である。

［解 説］

ポイントは，(1)(2)が(3)の誘導となっていることです。樹形図で要確認。

$\boxed{2}$　［名古屋大・理］

(1)　与えられた試行により，石が点kにある確率を$P_n(k)$とすると，初めは点 1 にあることより，右図より計算すると，



$P_1(1)=0$，$P_1(2)=1$，$P_1(3)=0$，

$P_1(4)=0$，$P_1(5)=0$

$P_2(1)=\dfrac{1}{2}$，$P_2(2)=0$，$P_2(3)=\dfrac{1}{2}$，

$P_2(4)=0$，$P_2(5)=0$

$P_3(1)=0$，$P_3(2)=\dfrac{3}{4}$，$P_3(3)=0$，$P_3(4)=\dfrac{1}{4}$，$P_3(5)=0$

$P_4(1)=\dfrac{3}{8}$，$P_4(2)=0$，$P_4(3)=\dfrac{1}{2}$，$P_4(4)=0$，$P_4(5)=\dfrac{1}{8}$

$P_5(1)=0$，$P_5(2)=\dfrac{5}{8}$，$P_5(3)=0$，$P_5(4)=\dfrac{3}{8}$，$P_5(5)=0$

$P_6(1)=\dfrac{5}{16}$，$P_6(2)=0$，$P_6(3)=\dfrac{1}{2}$，$P_6(4)=0$，$P_6(5)=\dfrac{3}{16}$

(2)　試行を 6 回繰り返した後に，5 つの点にすべてに印がついているのは，

(i)　4 回目に 5 のとき　5 回目以降は任意なので，その確率は$P_4(5)\cdot 1=\dfrac{1}{8}$となる。

(ii)　4 回目に 3 のとき　5 回目に 4 で，6 回目に 5 のときだけなので，その確率は$P_4(3)\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$となる。

(i)(ii)より，求める確率は，$\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{4}$である。

(3)　まず，試行をn回繰り返した後に，印が 3 つの点についているとき，点 1 と 2 は必ず印がつくことより，印のつく 3 つの点は 1 と 2 と 3 である。言い換えると，点 3 に少なくとも 1 回印がつき，点 4 と 5 には印がつかない場合となる。

さて，点 2→点 3→点 2 となる確率は$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$，点 2→点 1→点 2 となる確率は$\dfrac{1}{2}\cdot 1=\dfrac{1}{2}$である。これより，点 1 と 2 と 3 に印がつく確率は，lを自然数として，

(i)　nが奇数$(n=2l+1)$のとき　$\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\right)^l-\left(\dfrac{1}{2}\right)^l=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}$

なお，$n=1$のときも成立している。

(ii)　nが偶数$(n=2l)$のとき　$\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\right)^{l-1}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^l=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}-1}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$

［解　説］

頻出のランダムウォークが題材になっている確率の問題です。具体的な(1)を誘導として考えていくタイプです。

3 ［東京大・文］

(1) まず，文字列 AA について，左右を区別し A_1A_2 とする。

さて，表と裏の出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ のコインを投げ，表が出たときは文字列 A_1A_2，裏が出たときは文字 B をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。そして，n 回コインを投げ，文字列の左から n 番目の文字が A_1，A_2，B である確率を，それぞれ p_n，q_n，r_n とおく。すると，$p_1=r_1=\dfrac{1}{2}$，$q_1=0$ で，

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}q_n+\frac{1}{2}r_n\cdots\cdots\cdots①,\quad q_{n+1}=p_n\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$p_{n+1}=\dfrac{1}{2}(q_n+r_n)=\dfrac{1}{2}(1-p_n)=-\dfrac{1}{2}p_n+\dfrac{1}{2}$ となり，

$$p_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\Big(p_n-\frac{1}{3}\Big),\quad p_n-\frac{1}{3}=\Big(p_1-\frac{1}{3}\Big)\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1}=\frac{1}{6}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1}$$

よって，$p_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)^{n-1}$ となり，②より，$n\geqq 2$ において，

$$q_n=p_{n-1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-2}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1}$$

なお，この式は，$n=1$ のときも満たしている。

以上より，文字列の左から n 番目の文字が A となる確率 p_n+q_n は，

$$p_n+q_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1}=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n}$$

(2) $n\geqq 2$ のとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字が B となるのは，文字列が A_2B となる場合より，その確率は，

$$q_{n-1}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Big\{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-2}\Big\}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1}$$

［解　説］

直接的に求めるのは難しそうだったので，漸化式を立てました。そして，いったん AA の文字列について左側と右側を区別し，3 つの状態に分けて考えたわけです。

４　　［京都大・理］

まず，$x_0=\dfrac{1}{2}$ で，$x_n=\dfrac{x_{n-1}}{2}$ または $x_n=\dfrac{x_{n-1}+1}{2}$ から，帰納的に $0<x_n<1$ である。

そこで，$0<x_n<\dfrac{1}{3}$ となる確率を Q_n とおくと，条件より $x_n<\dfrac{2}{3}$ となる確率が P_n より，$\dfrac{1}{3}\leqq x_n<\dfrac{2}{3}$ となる確率は P_n-Q_n，$\dfrac{2}{3}\leqq x_n<1$ となる確率は $1-P_n$ である。

さて，$0<x_n<\dfrac{1}{3}$ となるのは，$0<x_{n-1}<\dfrac{1}{3}$ で $x_n=f_0(x_{n-1})$ または $\dfrac{1}{3}\leqq x_{n-1}<\dfrac{2}{3}$ で $x_n=f_0(x_{n-1})$ のときより，

$$Q_n=\frac{1}{2}Q_{n-1}+\frac{1}{2}(P_{n-1}-Q_{n-1}),\ Q_n=\frac{1}{2}P_{n-1}\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\dfrac{2}{3}\leqq x_n<1$ となるのは，$\dfrac{1}{3}\leqq x_{n-1}<\dfrac{2}{3}$ で $x_n=f_1(x_{n-1})$ または $\dfrac{2}{3}\leqq x_n<1$ で $x_n=f_1(x_{n-1})$ のときより，

$$1-P_n=\frac{1}{2}(P_{n-1}-Q_{n-1})+\frac{1}{2}(1-P_{n-1}),\ Q_{n-1}=-1+2P_n\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$-1+2P_{n+1}=\dfrac{1}{2}P_{n-1}$，$P_{n+1}=\dfrac{1}{4}P_{n-1}+\dfrac{1}{2}$

$$P_{n+1}-\frac{2}{3}=\frac{1}{4}\left(P_{n-1}-\frac{2}{3}\right)\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$x_0=\dfrac{1}{2}$ で，$x_1=f_0(x_0)=\dfrac{1}{4}$ または $x_1=f_1(x_0)=\dfrac{3}{4}$ から，$P_0=1$，$P_1=\dfrac{1}{2}$

(i)　$n=2k\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ のとき

③より，$P_{2k}-\dfrac{2}{3}=\left(P_0-\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{1}{4}\right)^k=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2k}$，$P_{2k}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2k}$ となり，

$$P_n=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(ii)　$n=2k+1\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ のとき

③より，$P_{2k+1}-\dfrac{2}{3}=\left(P_1-\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{1}{4}\right)^k=-\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2k}$，$P_{2k+1}=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2k+1}$ となり，

$$P_n=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

［解　説］

与えられた関数は，数直線上で，点 x と原点との中点または点 x と点 1 との中点を出力するという意味をもちます。このことに着目して，初めは樹形図を書いたり，さらに 2^n を 3 で割った余りを考えたりして，大雑把に結論は出ました。ただ，突っ込みどころが多すぎたため，考えを改め，状態を 3 つに分けて確率漸化式の出番となったわけです。

5　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［信州大・医］

(1) n 人で 1 回じゃんけんを行うとき，勝者がただ 1 人に決まるのは，勝者の選び方が ${}_n\mathrm{C}_1 = n$ 通りで，手の出方が 3 通りである。

これより，この場合の確率は，$\dfrac{n\cdot 3}{3^n} = \dfrac{n}{3^{n-1}}$ である。

(2) n 人で 1 回じゃんけんを行うとき，あいこにならないのは，2 種類の手が出た場合である。このとき，種類の選び方が ${}_3\mathrm{C}_2 = 3$ 通り，出方が $2^n - 2$ 通りとなり，その確率は，$\dfrac{3(2^n - 2)}{3^n} = \dfrac{2^n - 2}{3^{n-1}}$ である。

よって，あいこになる確率は，$1 - \dfrac{2^n - 2}{3^{n-1}} = \dfrac{3^{n-1} - 2^n + 2}{3^{n-1}}$ である。

(3) 5 人でじゃんけんをし，2 回のじゃんけんで勝者がただ 1 人に決まるのは，

(i) 5 人→5 人→1 人のとき

5 人→5 人の確率は(2)より $\dfrac{3^4 - 2^5 + 2}{3^4} = \dfrac{17}{3^3}$，5 人→1 人の確率は(1)より $\dfrac{5}{3^4}$ となる。これより，この場合の確率は $\dfrac{17}{3^3}\cdot\dfrac{5}{3^4} = \dfrac{85}{3^7}$ である。

(ii) 5 人→4 人→1 人のとき

5 人→4 人は敗者がただ 1 人決まると考え，その確率は(1)から $\dfrac{5}{3^4}$，4 人→1 人の確率は(1)より $\dfrac{4}{3^3}$ となる。これより，この場合の確率は $\dfrac{5}{3^4}\cdot\dfrac{4}{3^3} = \dfrac{20}{3^7}$ である。

(iii) 5 人→3 人→1 人のとき

5 人→3 人は勝者の選び方が ${}_5\mathrm{C}_3 = 10$ 通り，手の出方が 3 通りより，その確率は $\dfrac{10\cdot 3}{3^5} = \dfrac{10}{3^4}$ となる。3 人→1 人の確率は(1)より $\dfrac{3}{3^2}$ となる。これより，この場合の確率は $\dfrac{10}{3^4}\cdot\dfrac{3}{3^2} = \dfrac{30}{3^6}$ である。

(iv) 5 人→2 人→1 人のとき

5 人→2 人は敗者が 3 人決まると考え，その確率は(iii)から $\dfrac{10}{3^4}$，2 人→1 人の確率は(1)より $\dfrac{2}{3}$ となる。これより，この場合の確率は $\dfrac{10}{3^4}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{20}{3^5}$ である。

(i)～(iv)より，求める確率は，$\dfrac{85}{3^7} + \dfrac{20}{3^7} + \dfrac{30}{3^6} + \dfrac{20}{3^5} = \dfrac{375}{3^7} = \dfrac{125}{729}$

［解　説］

じゃんけんを題材としたよく見かける確率問題ですが，意外なほど手こずります。

6　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東北大・理］

(1)　$a,\ b,\ c$ が 3 辺の長さの三角形が直角三角形となるのは，斜辺の長さが c のとき，

$$a^2+b^2=c^2\ \cdots\cdots\cdots①$$

そこで，a^2 と b^2，およびその和をまとめると，右表のようになる。

$a^2 \backslash b^2$	1	4	9	16	25	36
1	2	5	10	17	26	37
4	5	8	13	20	29	40
9	10	13	18	25	34	45
16	17	20	25	32	41	52
25	26	29	34	41	50	61
36	37	40	45	52	61	72

すると，和が平方数なのは 25 だけより，①を満たすのは，

$$(a,\ b,\ c)=(3,\ 4,\ 5),\ (4,\ 3,\ 5)$$

また，斜辺の長さが $a,\ b$ の場合も同様なので，求める直角三角形となる確率は，$\dfrac{2\times3}{6^3}=\dfrac{1}{36}$ である。

(2)　$a,\ b,\ c$ が 3 辺の長さの三角形が鈍角三角形となるのは，最大辺の長さが c のとき，

$$a+b>c\ \cdots\cdots\cdots②,\quad a^2+b^2<c^2\ \cdots\cdots\cdots③$$

まず，$c=1,\ 2$ では成立しないので $c\geqq3$ となり，それぞれの場合を(1)の表をもとに調べる。

(i)　$c=3$ のとき

②より $a+b>3$，③より $a^2+b^2<9$ から，$(a,\ b)=(2,\ 2)$

(ii)　$c=4$ のとき

②より $a+b>4$，③より $a^2+b^2<16$ から，$(a,\ b)=(2,\ 3),\ (3,\ 2)$

(iii)　$c=5$ のとき

②より $a+b>5$，③より $a^2+b^2<25$ から，$(a,\ b)=(2,\ 4),\ (3,\ 3),\ (4,\ 2)$

(iv)　$c=6$ のとき

②より $a+b>6$，③より $a^2+b^2<36$ から，

$$(a,\ b)=(2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (5,\ 2),\ (3,\ 5),\ (4,\ 4),\ (5,\ 3)$$

(i)～(iv)より，$(a,\ b)$ の組は $1+2+3+7=13$ 通りとなる。

また，最大辺の長さが $a,\ b$ の場合も同様に 13 通りずつなので，求める鈍角三角形となる確率は，$\dfrac{13\times3}{6^3}=\dfrac{13}{72}$ である。

［解　説］

丁寧に数え上げるタイプの確率の問題です。このような場合は，表を作ると数えもれが防げます。

7　　　　［東京大・文］

(1)　5 試合目で A が優勝するのは, 4 試合目の対戦までどのチームも 2 連勝せず, しかも 4 試合目と 5 試合目に A が勝つ場合である。

そこで, 各試合の勝者を 1 試合目から並べて書くと,

(i)　1 試合目に A が勝つとき　ACBAA の場合となり, その確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$

(ii)　1 試合目に B が勝つとき　BCAB…となり, この場合は不適。

(i)(ii)より, 5 試合目で A が優勝する確率は $\frac{1}{32}$ である。

(2)　n 試合目 $(n\geqq 2)$ で A が優勝する場合, その確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ である。

(i)　1 試合目に A が勝つとき　ACBACBACB…ACBAA となる場合で, n を 3 で割った余りは 2 となる。

(ii)　1 試合目に B が勝つとき　BCABCABCA…BCAA となる場合で, n を 3 で割った余りは 1 となる。

(i)(ii)以外は起こりえないことより, n 試合目で A が優勝する確率を $p(n)$ とすると,

$$p(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n\ (n\text{ が 3 の倍数でないとき}),\quad p(n)=0\ (n\text{ が 3 の倍数のとき})$$

(3)　l を正の整数とするとき, (2)より,

(i)　n を 3 で割った余りが 2 $(n=3l-1)$ のとき　$p(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{3l-1}$

(ii)　n を 3 で割った余りが 1 $(n=3l+1)$ のとき　$p(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{3l+1}$

(iii)　n を 3 で割った余りが 0 $(n=3l)$ のとき　$p(n)=0$

さて, m を正の整数とするとき, 総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝する確率を P_m とすると, $m\geqq 2$ のとき,

$$\begin{aligned}P_m&=\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{3l-1}+\sum_{l=1}^{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{3l+1}+0=2\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{1}{8}\right)^l+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m-1}\left(\frac{1}{8}\right)^l\\&=2\cdot\frac{1}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^m\right\}\left(1-\frac{1}{8}\right)^{-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right\}\left(1-\frac{1}{8}\right)^{-1}\\&=\frac{2}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^m\right\}+\frac{1}{14}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right\}=\frac{5}{14}-\frac{6}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^m=\frac{5}{14}-\frac{6}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}\end{aligned}$$

ここで, $m=1$ をあてはめると, $P_1=\frac{5}{14}-\frac{6}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$ となり, 成立している。

したがって, $P_m=\frac{5}{14}-\frac{6}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}$ である。

［解　説］

巴戦を題材にした有名問題です。誘導がたいへん丁寧です。

8　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[名古屋大・理]

(1)　袋Aに赤玉2個，袋Bに白玉2個の状態から始めて，与えられた操作を1回行った後，袋Bの赤玉の個数がk個である場合について，その確率$P_1(k)$は，

(i)　$k=0$のとき　B→Aに白，次にA→Bに白の場合より，$P_1(0)=1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

(ii)　$k=1$のとき　B→Aに白，次にA→Bに赤の場合より，$P_1(1)=1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

(iii)　$k=2$のとき　この場合は起こりえないので，$P_1(2)=0$

(2)　袋Bの赤玉の個数がk個である場合について，

(i)　与えられた操作をn回行った後，$k=0$のときに操作をもう1回行うとき
(1)から，$k=0$となる確率は$\frac{1}{3}$，$k=1$となる確率は$\frac{2}{3}$

(ii)　与えられた操作をn回行った後，$k=1$のときに操作をもう1回行うとき
$k=0$となるのは，B→Aに赤，次にA→Bに白の場合より，その確率は$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

$k=1$となるのは，B→Aに赤，次にA→Bに赤の場合，もしくはB→Aに白，次にA→Bに白の場合より，その確率は$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

$k=2$となるのは，B→Aに白，次にA→Bに赤の場合より，その確率は$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

(iii)　与えられた操作をn回行った後，$k=2$のときに操作をもう1回行うとき
(i)と同様に考えて，$k=2$となる確率は$\frac{1}{3}$，$k=1$となる確率は$\frac{2}{3}$

(i)～(iii)より，$P_n(k)$と$P_{n+1}(k)$の関係は，$P_n(0)+P_n(1)+P_n(2)=1$に留意すると，

$$P_{n+1}(0)=\frac{1}{3}P_n(0)+\frac{1}{6}P_n(1)\cdots\cdots\cdots①$$

$$P_{n+1}(1)=\frac{2}{3}P_n(0)+\frac{2}{3}P_n(1)+\frac{2}{3}P_n(2)=\frac{2}{3}\cdots\cdots\cdots②$$

②より，$P_n(1)=\frac{2}{3}\ (n\geqq 2)$となり，(1)から$P_1(1)=\frac{2}{3}$なので，$P_n(1)=\frac{2}{3}\ (n\geqq 1)$

①に代入すると，$P_{n+1}(0)=\frac{1}{3}P_n(0)+\frac{1}{9}$となり，$P_{n+1}(0)-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\left\{P_n(0)-\frac{1}{6}\right\}$

$$P_n(0)-\frac{1}{6}=\left\{P_1(0)-\frac{1}{6}\right\}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

したがって，$P_n(0)=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$となり，

$$P_n(2)=1-P_n(0)-P_n(1)=1-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n-\frac{2}{3}=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

［解　説］

確率と漸化式について，よく見かける頻出問題です。

9　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［広島大・文］

(1)　x_1，x_2，…，x_n の平均値を $\overline{x}$，分散を s^2 とすると，

$$f(a)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{x_k}^2-2a\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k+a^2\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=\overline{x^2}-2a\overline{x}+a^2=(a-\overline{x})^2+\overline{x^2}-(\overline{x})^2=(a-\overline{x})^2+s^2$$

よって，$f(a)$ は $a=\overline{x}$ のとき最小となり，最小値は s^2 である。

(2)　$z_k=cy_k$ で，y_1，y_2，…，y_n の平均を $\overline{y}$，z_1，z_2，…，z_n の平均を $\overline{z}$ とすると，

$$\overline{z}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}z_k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}cy_k=c\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k=c\overline{y}$$

また，y_1，y_2，…，y_n の分散を ${s_y}^2$，z_1，z_2，…，z_n の分散を ${s_z}^2$ とすると，

$${s_z}^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{z_k}^2-(\overline{z})^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(cy_k)^2-(c\overline{y})^2=c^2\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{y_k}^2-c^2(\overline{y})^2=c^2{s_y}^2$$

条件 ${s_y}^2>{s_z}^2$ から，${s_y}^2>c^2{s_y}^2$ となり $c^2<1$，すなわち $-1<c<1$ である。

(3)　$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k$ より，$\sum_{k=1}^{n}x_k=n\overline{x}$ となり，x_1，x_2，…，x_n，x_{n+1} の平均値は，

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}x_k=\frac{1}{n+1}\Bigl(\sum_{k=1}^{n}x_k+x_{n+1}\Bigr)=\frac{1}{n+1}(n\overline{x}+x_{n+1})$$

(4)　与えられた 40 個のデータに，値 40 のデータを新たに加えたときを考える。

40 個のデータの平均値は 40 なので，41 個のデータの平均値は，

$$\frac{1}{41}(40\cdot 40+40)=40$$

40 個のデータの分散は 670 なので，41 個のデータの分散は，

$$\frac{1}{41}\{670\cdot 40+(40-40)^2\}\fallingdotseq 653.6\cdots$$

よって，小数第 1 位を四捨五入すると，654 である。

40 個のデータの中央値は，小さい方から 20 番目(30)と 21 番目(40)の平均値から 35 なので，41 個のデータの中央値は 21 番目より 40 である。

［解　説］

データの分析に関して，平均値や分散などの定義の確認問題です。

10 ［京都大・文］

(1) さいころを n 回振り，出た目の最大値を M, 最小値を L としたとき，$M-L=1$ となるのは，$(L,\ M)=(1,\ 2)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 4)$，$(4,\ 5)$，$(5,\ 6)$ の場合である。

まず，$(L,\ M)=(1,\ 2)$ のときは，出た目がすべて 1 または 2 のいずれかという事象から，1 だけおよび 2 だけという事象を除いたものより，その確率は，

$$\left(\frac{2}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

また，他の場合も同様なので，$M-L=1$ である確率は，

$$5\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}=5\left(\frac{1}{3}\right)^n-10\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

(2) $M-L=5$ となるのは，$(L,\ M)=(1,\ 6)$ の場合だけである。

そこで，出た目がすべて 1 以上 5 以下の事象を A, 2 以上 6 以下の事象を B とすると，$M-L=5$ である確率は，

$$\begin{aligned}1-P(A\cup B)&=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)\\&=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{4}{6}\right)^n=1-2\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n\end{aligned}$$

［解 説］

余事象の考え方がポイントである確率の有名問題です。頭を整理するには，図を書くと効果的です。

11　　［東京大・理］

(1) 点 P が $(m,\ n)$ にあるとき，1 秒後に $(m+1,\ n)$，$(m,\ n+1)$，$(m-1,\ n)$，$(m,\ n-1)$ に移る事象を，それぞれ $A,\ B,\ C,\ D$ とする。そして，6 秒後に O から直線 $y=x$ 上に移り，A, B, C, D がそれぞれ a 回, b 回, c 回, d 回起こったとすると，

$$a+b+c+d=6\cdots\cdots\cdots①,\ \ b-d=a-c\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$a+d=3$，$b+c=3$

つまり，A または D が 3 回，B または C が 3 回起こったことより，その確率は，

$$_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)^3=20\cdot\frac{1}{2^6}=\frac{5}{16}$$

(2) (1)と同様に設定して，6 秒後に O から O に移る条件は，

$$a+b+c+d=6\cdots\cdots\cdots③,\ \ a-c=0\cdots\cdots\cdots④,\ \ b-d=0\cdots\cdots\cdots⑤$$

④⑤より，$a+b=3$，$c=a$，$d=b$

これより，$(a,\ b,\ c,\ d)$ の組は，

$$(0,\ 3,\ 0,\ 3),\ (1,\ 2,\ 1,\ 2),\ (2,\ 1,\ 2,\ 1),\ (3,\ 0,\ 3,\ 0)$$

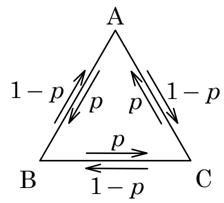
すると，求める確率は，

$$\frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^6+\frac{6!}{2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^6+\frac{6!}{2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^6+\frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^6=400\cdot\frac{1}{4^6}=\frac{25}{256}$$

［解　説］

ランダムウォークのついての標準的な問題です。なお，(1)でも(2)と同じように，$(a,\ b,\ c,\ d)$ の組を求めて，確率を計算しても構いません。

12　　　　［広島大・理］



(1)　まず, R が 2 回目に A に初めて戻るのは，A → B → A または A → C → A から，その確率 P_2 は,

$$P_2 = p(1-p)+(1-p)p = 2p(1-p)$$

また，R が 3 回目に A に初めて戻るのは，A → B → C → A または A → C → B → A から，その確率 P_3 は,

$$P_3 = p^3 + (1-p)^3 = 1-3p+3p^2$$

(2)　R が $2m$ 回目に A に初めて戻るのは，A→B→C→B→C→B→⋯→C→B→A または A→C→B→C→B→C→⋯→B→C→A から，その確率 P_{2m} は,

$$P_{2m} = p\{p(1-p)\}^{m-1}(1-p)+(1-p)\{(1-p)p\}^{m-1}p = 2p^m(1-p)^m$$

また，R が $2m+1$ 回目に A に初めて戻るのは，A→B→C→B→C→⋯→B→C→A または A→C→B→C→B→⋯→C→B→A から，その確率 P_{2m+1} は,

$$\begin{aligned}P_{2m+1} &= p\{p(1-p)\}^{m-1}p^2 + (1-p)\{(1-p)p\}^{m-1}(1-p)^2\\ &= p^3\{p(1-p)\}^{m-1} + (1-p)^3\{(1-p)p\}^{m-1}\\ &= (1-3p+3p^2)p^{m-1}(1-p)^{m-1}\end{aligned}$$

(3)　$p=\dfrac{1}{2}$ のとき，(2)より，$P_{2m} = 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^m\left(\dfrac{1}{2}\right)^m = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2m-1}$

$$P_{2m+1} = \left(1-\frac{3}{2}+\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2m}$$

さて，R が $2N+3$ 回目に A に 2 度目に戻るのは,

(i)　R が A に初めて戻るのが $2m$ 回目 $(m=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ のとき

その確率は，$P_{2m}P_{2N+3-2m} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2m-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2N-2m+2} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2N+1}$

(ii)　R が A に初めて戻るのが $2m+1$ 回目 $(m=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ のとき

その確率は，$P_{2m+1}P_{2N+3-(2m+1)} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2m}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2N-2m+1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2N+1}$

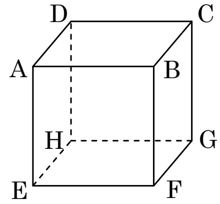
(i)(ii)より, R が $2N+3$ 回目に A に 2 度目に戻る確率 Q は,

$$Q = \sum_{m=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1} + \sum_{m=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1} = 2N\left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1} = \frac{N}{2^{2N}}$$

［解　説］

確率の計算問題です。ミスを防ぐような丁寧な誘導がついています。

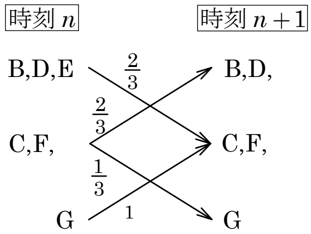
13　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［名古屋大・文］



(1)　時刻 0 で A にいた点 P が，時刻 n において，A に戻らず B, D, E のいずれかにいる確率 p_n，A に戻らず C, F, H のいずれかにいる確率 q_n，A に戻らず G にいる確率 r_n について，

$$p_{n+1}=\frac{2}{3}q_n\cdots\cdots\cdots①,\quad q_{n+1}=\frac{2}{3}p_n+r_n\cdots\cdots\cdots②$$

$$r_{n+1}=\frac{1}{3}q_n\cdots\cdots\cdots③$$



ここで，$p_1=1$，$q_1=r_1=0$ なので，①②③より，

$$p_2=\frac{2}{3}q_1=0,\ q_2=\frac{2}{3}p_1+r_1=\frac{2}{3},\ r_2=\frac{1}{3}q_1=0$$

$$p_3=\frac{2}{3}q_2=\frac{4}{9},\ q_3=\frac{2}{3}p_2+r_2=0,\ r_3=\frac{1}{3}q_2=\frac{2}{9}$$

(2)　$n\geqq 2$ のとき，①より $p_n=\frac{2}{3}q_{n-1}$，③より $r_n=\frac{1}{3}q_{n-1}$

②に代入すると，$q_{n+1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}q_{n-1}+\frac{1}{3}q_{n-1}$，$q_{n+1}=\frac{7}{9}q_{n-1}\cdots\cdots\cdots④$

さて，④に $n=2k$ を代入すると $q_{2k+1}=\frac{7}{9}q_{2k-1}$ となり，$q_{2k-1}=q_1\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1}=0$

$$p_{2k}=\frac{2}{3}q_{2k-1}=0,\ r_{2k}=\frac{1}{3}q_{2k-1}=0$$

④に $n=2k+1$ を代入すると $q_{2k+2}=\frac{7}{9}q_{2k}$ となり，$q_{2k}=q_2\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1}=\frac{2}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1}$

$$p_{2k+1}=\frac{2}{3}q_{2k}=\frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1},\ r_{2k+1}=\frac{1}{3}q_{2k}=\frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1}$$

以上より，$q_n=0$ (n が奇数)，$q_n=\frac{2}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n}{2}-1}$ (n が偶数)

また，$n=2k+1$ のとき，$k-1=\frac{n-3}{2}$ から，

$$p_n=\frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}}\ (n\text{ が 3 以上の奇数}),\ p_n=0\ (n\text{ が偶数})$$

$$r_n=\frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}}\ (n\text{ が 3 以上の奇数}),\ r_n=0\ (n\text{ が偶数})$$

(3)　時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m は，$m\geqq 2$ のとき，

$$s_m=\frac{1}{3}p_{2m-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-2}=\frac{4}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-2}$$

なお，$m=1$ のときは，$s_1=\frac{1}{3}p_1=\frac{1}{3}$ である。

［解　説］

確率と漸化式の頻出問題です。漸化式をまとめると隣接 3 項間型になりましたが，特別な形でしたので，n を偶奇に分けて記しています。

14　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［北海道大・文］

(1)　赤色，青色，黄色のサイコロを同時に投げ，出た目の数をそれぞれ R，B，Y とし，自然数 s，t，u を $s=100R+10B+Y$，$t=100B+10Y+R$，$u=100Y+10R+B$ で定める。

ここで，s が 500 以上になるのは，$R=5$，6 で B，Y は任意より，その確率は $\dfrac{1}{3}$ である。同様に，t, u が 500 以上になるのも，確率はそれぞれ $\dfrac{1}{3}$ である。

(i)　s, t, u がすべて 500 以上のとき　その確率は $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{1}{27}$ である。

(ii)　s, t, u の 2 つが 500 以上となるとき　その確率は ${}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\dfrac{2}{3}=\dfrac{6}{27}$ である。

(i)(ii)より，s, t, u のうち少なくとも 2 つが 500 以上となる確率は，

$$\frac{1}{27}+\frac{6}{27}=\frac{7}{27}$$

(2)　$s>t$ より $100R+10B+Y>100B+10Y+R$ となり，$11R>10B+Y$ ………①

すると，①を満たす R, B, Y の条件は，

(i)　$R>B$ のとき　任意の Y で①は成立する。

(ii)　$R=B$ のとき　①は $B>Y$ のとき成立する。

(i)(ii)より，$R>B$ または $R=B>Y$ である。

同様に，$t>u$ より $100B+10Y+R>100Y+10R+B$ となり，

$$11B>10Y+R \text{ ………②}$$

すると，②を満たす R, B, Y の条件は，$B>Y$ または $B=Y>R$ である。

よって，$s>t>u$ となる R, B, Y の条件は，①かつ②から，

$$R>B>Y \text{ ………③},\quad R=B>Y \text{ ………④}$$

以上より，③となる場合の数は ${}_6\mathrm{C}_3=20$ 通り，④となる場合の数は ${}_6\mathrm{C}_2=15$ 通りなので，求める確率は，$\dfrac{20+15}{6^3}=\dfrac{35}{216}$ である。

［解　説］

確率の標準的な問題です。(2)の①式については，初めは R の値で場合分けをしたのですが，規則性がみつかったため，それをまとめて記したのが上の解答例です。

15　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［千葉大・文］

(1)　もとに戻しながら箱からカードを 1 枚ずつ取り出したとき，金，銀，白である確率は，それぞれ$\dfrac{1}{n}$，$\dfrac{1}{n}$，$\dfrac{n-2}{n}$である。そして，金なら 50 点，銀なら 10 点，白なら 0 点と記録し，その合計点を考える。

さて，4 回目に合計点がはじめて 100 点となるのは，3 回目までの合計点が 50 点で，4 回目に金という場合だけである。すると，3 回目までは金が 1 回，白が 2 回となり，その確率$P(4)$は，

$$P(4)={}_3\mathrm{C}_1\frac{1}{n}\Big(\frac{n-2}{n}\Big)^2\times\frac{1}{n}=\frac{3(n-2)^2}{n^4}$$

(2)　6 回目に合計点がはじめて 100 点となるのは，5 回目までの合計点が 50 点または 90 点の 2 つの場合がある。

(i)　5 回目までの合計点が 50 点のとき

このとき 6 回目は金であり，5 回目までは金 1 回，白 4 回または銀 5 回となるので，その確率は，

$${}_5\mathrm{C}_1\frac{1}{n}\Big(\frac{n-2}{n}\Big)^4\times\frac{1}{n}+\Big(\frac{1}{n}\Big)^5\times\frac{1}{n}=\frac{5(n-2)^4+1}{n^6}$$

(ii)　5 回目までの合計点が 90 点のとき

このとき 6 回目は銀であり，5 回目までは金 1 回，銀 4 回となるので，その確率は，

$${}_5\mathrm{C}_1\frac{1}{n}\Big(\frac{1}{n}\Big)^4\times\frac{1}{n}=\frac{5}{n^6}$$

(i)(ii)より，求める確率$P(6)$は，$P(6)=\dfrac{5(n-2)^4+1}{n^6}+\dfrac{5}{n^6}=\dfrac{5(n-2)^4+6}{n^6}$

(2)　11 回目に合計点がはじめて 100 点となるのは，10 回目までの合計点が 50 点または 90 点の 2 つの場合がある。

(i)　10 回目までの合計点が 50 点のとき

このとき 11 回目は金であり，10 回目までは金 1 回，白 9 回または銀 5 回，白 5 回となるので，その確率は，

$${}_{10}\mathrm{C}_1\frac{1}{n}\Big(\frac{n-2}{n}\Big)^9\times\frac{1}{n}+{}_{10}\mathrm{C}_5\Big(\frac{1}{n}\Big)^5\Big(\frac{n-2}{n}\Big)^5\times\frac{1}{n}=\frac{10(n-2)^9+252(n-2)^5}{n^{11}}$$

(ii)　5 回目までの合計点が 90 点のとき

このとき 11 回目は銀であり，10 回目までは金 1 回，銀 4 回，白 5 回または銀 9 回，白 1 回となるので，その確率は，

$${}_{10}\mathrm{C}_1\,{}_9\mathrm{C}_4\frac{1}{n}\Big(\frac{1}{n}\Big)^4\Big(\frac{n-2}{n}\Big)^5\times\frac{1}{n}+{}_{10}\mathrm{C}_9\Big(\frac{1}{n}\Big)^9\cdot\frac{n-2}{n}\times\frac{1}{n}$$
$$=\frac{1260(n-2)^5+10(n-2)}{n^{11}}$$

(i)(ii)より，求める確率 $P(11)$ は,

$$P(11)=\frac{10(n-2)^9+252(n-2)^5}{n^{11}}+\frac{1260(n-2)^5+10(n-2)}{n^{11}}$$

$$=\frac{10(n-2)^9+1512(n-2)^5+10(n-2)}{n^{11}}$$

［解 説］

丁寧に場合分けをするタイプの確率の問題です。「はじめて」という条件が与えられているので，その1回手前の状態に着目しています。

16　　［東北大・理］

(1)　1 から n までの番号札がそれぞれ 1 枚ずつ, 合計 n 枚入っている箱から, 1 枚の札を無作為に取り出して元に戻すとき, k 回目に取り出した札の番号を X_k とおく。

まず, $X_1 \geqq n$ となるのは $X_1 = n$ から, その確率 $p(1)$ は, $p(1)=\dfrac{1}{n}$ である。

次に, $X_1+X_2+\cdots+X_{n-1} \leqq n-1$ かつ $X_1+X_2+\cdots+X_{n-1}+X_n \geqq n$ となるのは, $X_1=X_2=\cdots=X_{n-1}=1$ で X_n は任意より, その確率 $p(n)$ は,

$$p(n)=\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}\times 1=\frac{1}{n^{n-1}}$$

(2)　$X_1 \leqq n-1$ かつ $X_1+X_2 \geqq n$ となるのは, $X_1=k$ $(1 \leqq k \leqq n-1)$ のときは, $X_2=n-k,\ n-k+1,\ \cdots,\ n$ より, その確率 $p(2)$ は,

$$p(2)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}\cdot\frac{k+1}{n}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)=\frac{1}{n^2}\left\{\frac{1}{2}(n-1)n+(n-1)\right\}$$
$$=\frac{(n-1)(n+2)}{2n^2}$$

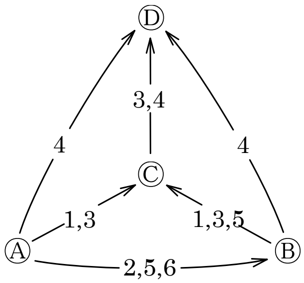
(3)　$n \geqq 3$ のとき, $X_1+X_2 \leqq n-1$ かつ $X_1+X_2+X_3 \geqq n$ となるのは, $X_1+X_2=k$ $(2 \leqq k \leqq n-1)$ のときは, $(X_1,\ X_2)$ の組が $(1,\ k-1)$, $(2,\ k-2)$, $\cdots$, $(k-1,\ 1)$ の $k-1$ 通りで, $X_3=n-k,\ n-k+1,\ \cdots,\ n$ より, その確率 $p(3)$ は,

$$p(3)=\sum_{k=2}^{n-1}\frac{k-1}{n^2}\cdot\frac{k+1}{n}=\frac{1}{n^3}\sum_{k=2}^{n-1}(k^2-1)=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}(k^2-1)$$
$$=\frac{1}{n^3}\left\{\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)-(n-1)\right\}=\frac{(n-1)(n-2)(2n+3)}{6n^3}$$

［解 説］

確率の標準的な問題です。題意を読み取る力が問われています。

17　　　　　　　　　　　　　　　　　［岡山大・理］



(1) n 回の操作の後，Ⓐ，Ⓑ，Ⓒにいる確率を，それぞれa_n，b_n，c_nとおくと，条件より，$a_n=0\ (n\geqq 1)$である。

また，$b_1=\dfrac{1}{2}$のもとで，条件より，

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{3}b_n=\frac{1}{3}b_n$$

よって，$b_n=b_1\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$………①

(2) $c_1=\dfrac{1}{3}$のもとで，条件より，

$$c_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{2}b_n+\frac{2}{3}c_n=\frac{1}{2}b_n+\frac{2}{3}c_n$$

①を代入すると，$c_{n+1}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}+\dfrac{2}{3}c_n$………②

ここで，②を満たす１つの数列を，αを定数として，$c_n=\alpha\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$とおくと，

$$\alpha\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{2}{3}\alpha\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

すると，$\dfrac{1}{3}\alpha=\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{3}\alpha$から$\alpha=-\dfrac{3}{4}$となるので，

$$-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\ \cdots\cdots\cdots③$$

②－③より，$c_{n+1}+\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=\dfrac{2}{3}\left\{c_n+\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$となり，

$$c_n+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left\{c_1+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^0\right\}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\frac{13}{12}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

よって，$c_n=\dfrac{13}{12}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}-\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

(3) Ⓓに到達したらゲームは終了するので，その確率をP_nとおくと，

(i) $n=1$のとき　Ⓐ→Ⓓの場合から，$P_1=\dfrac{1}{6}$

(ii) $n\geqq 2$のとき　$a_n=0$から，Ⓑ→ⒹまたはⒸ→Ⓓの場合より，

$$P_m=\frac{1}{6}b_{n-1}+\frac{1}{3}c_{n-1}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}+\frac{1}{3}\left\{\frac{13}{12}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{13}{24}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{13}{24}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

［解　説］

確率と漸化式の標準的な問題です。与えられた図から，立式は容易です。なお，漸化式②の解法については，「ピンポイント　レクチャー」を参照してください。

18　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［九州大・理］

1 から 4 までの 4 枚のカードが入っている箱から 1 枚カードを取り出し，もとに戻す試行を行う。このとき，k 回目に取り出したカードの数字を X_k とし，積 $X_1X_2\cdots X_n$ を 4 で割った余りが 0, 1, 2, 3 である確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n，s_n とする。

さて，$(X_1X_2\cdots X_n)\times X_{n+1}=(X_1X_2\cdots X_nX_{n+1})$ であるが，この式の両辺について 4 で割った余りの関係を調べるために，mod 4 ですべてのパターンを記述すると，右表のようになる。

$0\times1\equiv0$	$0\times2\equiv0$	$0\times3\equiv0$	$0\times4\equiv0$
$1\times1\equiv1$	$1\times2\equiv2$	$1\times3\equiv3$	$1\times4\equiv0$
$2\times1\equiv2$	$2\times2\equiv0$	$2\times3\equiv2$	$2\times4\equiv0$
$3\times1\equiv3$	$3\times2\equiv2$	$3\times3\equiv1$	$3\times4\equiv0$

そこで，この表をもとに $X_1X_2\cdots X_n$ を 4 で割った余りの確率について漸化式を作ると，$p_1=q_1=r_1=s_1=\dfrac{1}{4}$ で，

$$p_{n+1}=p_n+\frac{1}{4}q_n+\frac{1}{2}r_n+\frac{1}{4}s_n\cdots\cdots\cdots①,\quad q_{n+1}=\frac{1}{4}q_n+\frac{1}{4}s_n\cdots\cdots\cdots②$$

$$r_{n+1}=\frac{1}{4}q_n+\frac{1}{2}r_n+\frac{1}{4}s_n\cdots\cdots\cdots③,\quad s_{n+1}=\frac{1}{4}q_n+\frac{1}{4}s_n\cdots\cdots\cdots④$$

②④より，$n\geqq2$ で $q_n=s_n$ となり，$q_1=s_1=\dfrac{1}{4}$ から $q_n=s_n\cdots\cdots\cdots⑤$

②⑤から，$q_{n+1}=\dfrac{1}{2}q_n$ となり，

$$q_n=q_1\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1}=\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n+1},\quad s_n=\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n+1}$$

③に代入すると，$r_{n+1}=\dfrac{1}{2}r_n+\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^{n+1}$ となり，$2^{n+1}r_{n+1}=2^nr_n+\dfrac{1}{2}$ から，

$$2^nr_n=2r_1+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{1}{2}n,\quad r_n=n\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n+1}$$

さらに，$p_n=1-q_n-r_n-s_n$ から，

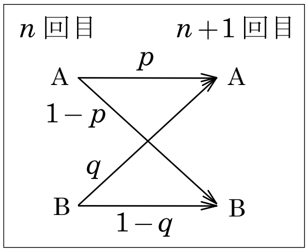
$$p_n=1-\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n+1}-n\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n+1}-\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n+1}=1-(n+2)\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n+1}$$

［解　説］

確率と漸化式の標準的な問題です。①から④が立式できれば，その処理は難しくありません。なお，p_n は①を解いても求まりますが，(等差)×(等比)という面倒な和が出てきます。

19　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［大阪大・理］

(1)　n 試合目に A が勝つ確率を a_n とすると，引き分けがないことより，B が勝つ確率は $1-a_n$ となる。



また，A が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は p，B が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は q であることより，

$$a_{n+1}=pa_n+q(1-a_n)=(p-q)a_n+q$$

変形すると，$a_{n+1}-\dfrac{q}{1-p+q}=(p-q)\left(a_n-\dfrac{q}{1-p+q}\right)$ となり，$a_1=p$ から，

$$a_n-\frac{q}{1-p+q}=\left(a_1-\frac{q}{1-p+q}\right)(p-q)^{n-1}=\left(p-\frac{q}{1-p+q}\right)(p-q)^{n-1}$$
$$=\frac{(1-p)(p-q)}{1-p+q}(p-q)^{n-1}=\frac{1-p}{1-p+q}(p-q)^n$$

よって，$a_n=\dfrac{1}{1-p+q}\{(1-p)(p-q)^n+q\}$ である。

(2)　$n\geqq 3$ として，n 回試合を行うとき，B が連勝せずに k 回目と l 回目 $(k<l)$ に勝つとする。このとき勝つチームを並べて示すと，

(i)　$k=1$ かつ $l=n$ のとき　B→A→A→A→A→……→A→A→B

A→B が 1 回，B→A が 1 回，A→A が $n-3$ 回より，その確率は，

$$(1-p)\times(1-p)qp^{n-3}=p^{n-3}(1-p)^2q$$

(ii)　$2\leqq k\leqq n-2$ かつ $l=n$ のとき　A→B→A→A→A→……→A→A→B など

A→B が 2 回，B→A が 1 回，A→A が $n-4$ 回より，その確率は，$n\geqq 4$ で，

$$p\times{}_{n-3}\mathrm{C}_1(1-p)^2qp^{n-4}=(n-3)p^{n-3}(1-p)^2q$$

(iii)　$k=1$ かつ $3\leqq l\leqq n-1$ のとき　B→A→B→A→A→……→A→A→A など

A→B が 1 回，B→A が 2 回，A→A が $n-4$ 回より，その確率は，$n\geqq 4$ で，

$$(1-p)\times{}_{n-3}\mathrm{C}_1(1-p)q^2p^{n-4}=(n-3)p^{n-4}(1-p)^2q^2$$

(iv)　$2\leqq k<k+1<l\leqq n-1$ のとき　A→B→A→B→A→……→A→A→A など

A→B が 2 回，B→A が 2 回，A→A が $n-5$ 回で，$(k,\ l)$ の決め方が ${}_{n-3}\mathrm{C}_2$ 通りとなるので，その確率は，$n\geqq 5$ で，

$$p\times{}_{n-3}\mathrm{C}_2(1-p)^2q^2p^{n-5}=\frac{1}{2}(n-3)(n-4)p^{n-4}(1-p)^2q^2$$

(i)～(iv)より，B が連勝せずにちょうど 2 試合に勝つ確率 b_n は，

$$b_n=\{1+(n-3)\}p^{n-3}(1-p)^2q+\frac{1}{2}(n-3)\{2+(n-4)\}p^{n-4}(1-p)^2q^2$$
$$=(n-2)p^{n-3}(1-p)^2q+\frac{1}{2}(n-2)(n-3)p^{n-4}(1-p)^2q^2$$
$$=\frac{1}{2}(n-2)p^{n-4}(1-p)^2q\{2p+(n-3)q\}\quad(n=3,\ 4\text{ のときも成立})$$

［解 説］

(1)は確率と漸化式という頻出題, (2)は数え上げるタイプの確率問題でミスに要注意です。そのため, (2)では n に具体的な数値を代入して, チェックしながら計算を進めていくのが, 1 つの有効な方法となります。