1　［千葉大・文］

$k,\ m,\ n$ を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　2^k を 7 で割った余りが 4 であるとする。このとき，k を 3 で割った余りは 2 であることを示せ。

(2)　$4m+5n$ が 3 で割り切れるとする。このとき，2^{mn} を 7 で割った余りは 4 ではないことを示せ。

2　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［九州大・理］

以下の問いに答えよ。

(1)　n が正の偶数のとき，2^n-1 は 3 の倍数であることを示せ。

(2)　n を自然数とする。2^n+1 と 2^n-1 は互いに素であることを示せ。

(3)　$p,\ q$ を異なる素数とする。$2^{p-1}-1=pq^2$ を満たす $p,\ q$ の組をすべて求めよ。

$\boxed{3}$ ［京都大・理］

$a,\ b,\ c,\ d,\ e$ を正の実数として整式 $f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=dx+e$ を考える。すべての正の整数 n に対して $\dfrac{f(n)}{g(n)}$ は整数であるとする。このとき，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることを示せ。

$\boxed{4}$ ［東北大・文］

次の性質をもつ数列$\{a_n\}$を考える。

$$a_1=3,\ a_{n+1}>a_n,\ {a_n}^2-2a_na_{n+1}+{a_{n+1}}^2=3(a_n+a_{n+1})\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，a_n+a_{n+2} を a_{n+1} を用いて表せ。

(2)　$b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$により定まる数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

(3)　数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

5　　　　［広島大・文］

n を自然数とし，p_n，q_n を実数とする。ただし，p_1，q_1 は $p_1^2-4q_1=4$ を満たすとする。2 次方程式 $x^2-p_nx+q_n=0$ は異なる実数解 α_n，β_n をもつとする。ただし，$\alpha_n<\beta_n$ とする。$c_n=\beta_n-\alpha_n$ とおくとき，数列 $\{c_n\}$ は

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1)　$r_n=\log_2(n\sqrt{n}+\sqrt{n})$ とするとき，$\dfrac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}$ を r_n，r_{n+1} を用いて表せ。

(2)　c_n を n の式で表せ。

(3)　$p_n=n\sqrt{n}$ であるとき，q_n を n の式で表せ。

6　　［千葉大・理］

b と c を $b^2+4c>0$ を満たす実数として，x に関する 2 次方程式 $x^2-bx-c=0$ の相異なる解を α，β とする。数列 $\{a_n\}$ を，$a_n=\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ により定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　数列 $\{a_n\}$ は漸化式 $a_{n+2}=ba_{n+1}+ca_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たすことを示せ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ の項 a_n がすべて整数であるための必要十分条件は，b，c がともに整数であることである。これを証明せよ。

7　　　　［東京大・理］

数列$\{p_n\}$を次のように定める。

$$p_1=1,\ p_2=2,\ p_{n+2}=\frac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}$が$n$によらないことを示せ。

(2) すべての$n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$に対し，$p_{n+1}+p_{n-1}$をp_nのみを使って表せ。

(3) 数列$\{q_n\}$を次のように定める。

$$q_1=1,\ q_2=1,\ q_{n+2}=q_{n+1}+q_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

すべての$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$に対し，$p_n=q_{2n-1}$を示せ。

8　　［北海道大・文］

x, y を自然数とする。

(1)　$\dfrac{3x}{x^2+2}$ が自然数であるような x をすべて求めよ。

(2)　$\dfrac{3x}{x^2+2}+\dfrac{1}{y}$ が自然数であるような組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

9　　　　［大阪大・文］

次の問いに答えよ。

(1) a を正の実数とし, k を 1 以上の実数とする。x についての 2 次方程式 $x^2-kax+a-k=0$ は, 不等式 $-\dfrac{1}{a}<s\leqq 1$ を満たすような実数解 s をもつことを示せ。

(2) a を 3 以上の整数とする。n^2+a が $an+1$ で割り切れるような 2 以上のすべての整数 n を a を用いて表せ。

10　　　　［神戸大・理］

約数，公約数，最大公約数を次のように定める。

・ 2 つの整数 $a,\ b$ に対して，$a=bk$ を満たす整数 k が存在するとき，b は a の約数という。

・ 2 つの整数に共通の約数をそれらの公約数という。

・ 少なくとも一方が 0 でない 2 つの整数の公約数の中で最大のものをそれらの最大公約数という。

以下の問いに答えよ。

(1)　$a,\ b,\ c,\ p$ は 0 でない整数で $a=pb+c$ を満たしているとする。

(i)　$a=18$，$b=30$，$c=-42$，$p=2$ のとき，a と b の公約数の集合 S，および b と c の公約数の集合 T を求めよ。

(ii)　a と b の最大公約数を M，b と c の最大公約数を N とする。M と N は等しいことを示せ。ただし，$a,\ b,\ c,\ p$ は 0 でない任意の整数とする。

(2)　自然数の列 $\{a_n\}$ を，$a_{n+2}=6a_{n+1}+a_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$，$a_1=3$，$a_2=4$ で定める。

(i)　a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。

(ii)　a_{n+4} を a_{n+2} と a_n を用いて表せ。

(iii)　a_{n+2} と a_n の最大公約数を求めよ。

11　　　　［東京大・文］

以下の問いに答えよ。ただし，(1)については，結論のみを書けばよい。

(1)　n を正の整数とし，3^n を 10 で割った余りを a_n とする。a_n を求めよ。

(2)　n を正の整数とし，3^n を 4 で割った余りを b_n とする。b_n を求めよ。

(3)　数列 $\{x_n\}$ を次のように定める。

$$x_1 = 1,\ \ x_{n+1} = 3^{x_n}\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

x_{10} を 10 で割った余りを求めよ。

$\boxed{12}$ ［九州大］

自然数 n に対して，10^n を 13 で割った余りを a_n とおく。a_n は 0 から 12 までの整数である。以下の問いに答えよ。

(1)　a_{n+1} は $10a_n$ を 13 で割った余りに等しいことを示せ。

(2)　a_1，a_2，…，a_6 を求めよ。

(3)　以下の 3 条件を満たす自然数 N をすべて求めよ。

(i)　N を十進法で表示したとき 6 桁となる。

(ii)　N を十進法で表示して，最初と最後の桁の数字を取り除くと 2016 となる。

(iii)　N は 13 で割り切れる。

13　　　　［東北大・理］

以下の問いに答えよ。

(1)　6 以上の整数 n に対して不等式 $2^n > n^2 + 7$ が成り立つことを数学的帰納法により示せ。

(2)　等式 $p^q = q^p + 7$ を満たす素数の組$(p,\ q)$をすべて求めよ。

14 ［東京工大］

n を 2 以上の自然数とする。

(1) n が素数または 4 のとき，$(n-1)!$ は n で割り切れないことを示せ。

(2) n が素数でなくかつ 4 でもないとき，$(n-1)!$ は n で割り切れることを示せ。

$\boxed{15}$ ［京都大・理］

素数 p, q を用いて，$p^q + q^p$ と表される素数をすべて求めよ。

16 ［名古屋大・文］

正の整数 n に対して，その(1 と自分自身も含めた)すべての正の約数の和を $s(n)$ とかくことにする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) k を正の整数，p を 3 以上の素数とするとき，$s(2^k p)$ を求めよ。

(2) $s(2016)$ を求めよ。

(3) 2016 の正の約数 n で，$s(n)=2016$ となるものをすべて求めよ。

17 ［一橋大］

連立方程式 $x^2 = yz + 7$，$y^2 = zx + 7$，$z^2 = xy + 7$ を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ で $x \leqq y \leqq z$ となるものを求めよ。

$\boxed{18}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［北海道大・理］

自然数の2乗となる数を平方数という。

(1) 自然数 a, n, k に対して，$n(n+1)+a=(n+k)^2$ が成り立つとき，$a \geqq k^2+2k-1$ が成り立つことを示せ。

(2) $n(n+1)+14$ が平方数となるような自然数 n をすべて求めよ。

$\boxed{19}$ ［九州大・文］

以下の問いに答えよ。

(1) 2017 と 225 の最大公約数を求めよ。

(2) 225 との最大公約数が 15 となる 2017 以下の自然数の個数を求めよ。

(3) 225 との最大公約数が 15 であり，かつ 1998 との最大公約数が 111 となる 2017 以下の自然数をすべて求めよ。

20　　　　［筑波大・理］

数列$\{a_n\}$が，$a_1=1$，$a_2=3$，$a_{n+2}=3{a_{n+1}}^2-6a_{n+1}a_n+3{a_n}^2+a_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$を満たすとする。また，$b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$b_n\geqq 0$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$を示せ。

(2)　b_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$の一の位の数が 2 であることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(3)　a_{2017}の一の位の数を求めよ。

21　　［東京大］

$p=2+\sqrt{5}$ とおき，自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$a_n=p^n+\left(-\dfrac{1}{p}\right)^n$ と定める。

以下の問いに答えよ。ただし設問(1)は結論のみを書けばよい。

(1)　a_1，a_2 の値を求めよ。

(2)　$n\geqq 2$ とする。積 a_1a_n を，a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ。

(3)　a_n は自然数であることを示せ。

(4)　a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。

$\boxed{22}$ ［九州大・理］

初項$a_1=1$，公差 4 の等差数列$\{a_n\}$を考える。以下の問いに答えよ。

(1) $\{a_n\}$の初項から第 600 項のうち，7 の倍数である項の個数を求めよ。

(2) $\{a_n\}$の初項から第 600 項のうち，7^2の倍数である項の個数を求めよ。

(3) 初項から第 n 項までの積$a_1a_2\cdots a_n$が7^{45}の倍数となる最小の自然数 n を求めよ。

$\boxed{23}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［名古屋大・文］

次の問いに答えよ。

(1)　次の条件(∗)を満たす 3 つの自然数の組$(a,\ b,\ c)$をすべて求めよ。

　(∗)　$a<b<c$ かつ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$ である。

(2)　偶数 $2n$ $(n\geqq 1)$ の 3 つの正の約数 $p,\ q,\ r$ で，$p>q>r$ と $p+q+r=n$ を満たす組$(p,\ q,\ r)$の個数を $f(n)$ とする。ただし，条件を満たす組が存在しない場合は，$f(n)=0$ とする。n が自然数全体を動くときの $f(n)$ の最大値 M を求めよ。また，$f(n)=M$ となる自然数 n の中で最小のものを求めよ。

24 ［九州大・文］

以下の問いに答えよ。

(1) n を自然数とするとき，2^n を 7 で割った余りを求めよ。

(2) 自然数 m は，2 進法で 101 が 6 回連続する表示 $101101101101101101_{(2)}$ をもつとする。m を 7 で割った余りを求めよ。

$\boxed{25}$ ［京都大］

n^3-7n+9 が素数となるような整数 n をすべて求めよ。

26　　　　［名古屋大・文］

次の問いに答えよ。

(1)　整数α，βの少なくとも一方が奇数のとき，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$は奇数であることを示せ。

(2)　n を奇数とする。このとき$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=2n$を満たす整数$\alpha$，$\beta$は存在しないことを示せ。

(3)　c を実数とする。このとき 3 次方程式$x^3-2018x+c=0$の解のうち整数であるものは1個以下であることを示せ。

27　　　　［東北大・理］

整数 a, b は等式 $3^a - 2^b = 1$ ……①を満たしているとする。

(1) a, b はともに正となることを示せ。

(2) $b > 1$ ならば, a は偶数であることを示せ。

(3) ①を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべてあげよ。

$\boxed{28}$　　［千葉大・文］

初項が 1 で公差が 6 である等差数列 1, 7, 13, …の第 n 項を a_n とし，また初項が 3 で公差が 4 である等差数列 3, 7, 11, …の第 m 項を b_m とする。2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_m\}$ に共通に現れる数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{c_k\}$ とし，2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_m\}$ の少なくとも 1 つの項になっている数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{d_l\}$ とする。したがって $c_1=7$ であり，また数列 $\{d_l\}$ のはじめの 5 項は 1, 3, 7, 11, 13 となる。

(1)　数列 $\{c_k\}$ の一般項を求めよ。

(2)　d_{1000} および d_{1001} の値を求めよ。

29　　［東京大・理］

数列a_1，a_2，$\cdots$を，$a_n=\dfrac{{}_{2n+1}\mathrm{C}_n}{n!}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$で定める。

(1)　$n\geqq 2$とする。$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$を既約分数$\dfrac{q_n}{p_n}$として表したときの分母$p_n\geqq 1$と分子q_nを求めよ。

(2)　a_nが整数となる$n\geqq 1$をすべて求めよ。