1　　［千葉大・文］

(1)　k を自然数, l, N を 0 以上の整数とするとき,

(i)　$k=3l+1$ のとき　$2^k=2^{3l+1}=2\cdot 8^l=2(7+1)^l=2(7N+1)=7\cdot 2N+2$

これより, 2^k を 7 で割った余りは 2 である。

(ii)　$k=3l+2$ のとき　$2^k=2^{3l+2}=4\cdot 8^l=4(7+1)^l=4(7N+1)=7\cdot 4N+4$

これより, 2^k を 7 で割った余りは 4 である。

(iii)　$k=3l+3$ のとき　$2^k=2^{3l+3}=8\cdot 8^l=8(7+1)^l=8(7N+1)=7(8N+1)+1$

これより, 2^k を 7 で割った余りは 1 である。

(i)～(iii)より, 2^k を 7 で割った余りが 4 のとき, k を 3 で割った余りは 2 である。

(2)　m, n を自然数で, $4m+5n$ が 3 で割り切れるとき,

$$4m+5n=3(m+2n)+(m-n)$$

これより, $m-n$ は 3 で割り切れる, すなわち m を 3 で割った余りと n を 3 で割った余りは等しくなる。そこで, m', n' を 0 以上の整数として,

(i)　m, n を 3 で割った余りが 1 のとき　$m=3m'+1$, $n=3n'+1$

$$mn=(3m'+1)(3n'+1)=3(3m'n'+m'+n')+1$$

これより, mn を 3 で割った余りは 1 である。

(ii)　m, n を 3 で割った余りが 2 のとき　$m=3m'+2$, $n=3n'+2$

$$mn=(3m'+2)(3n'+2)=3(3m'n'+2m'+2n'+1)+1$$

これより, mn を 3 で割った余りは 1 である。

(iii)　m, n を 3 で割った余りが 0 のとき　$m=3m'+3$, $n=3n'+3$

$$mn=(3m'+3)(3n'+3)=3(3m'n'+3m'+3n'+3)$$

これより, mn を 3 で割った余りは 0 である。

(i)～(iii)より, mn を 3 で割った余りは 0 または 1 であり, 2 ではない。

したがって, (1)より, 2^{mn} を 7 で割った余りは 4 ではない。

［解　説］

テーマは整数の余りによる分類です。(2)の最後の行は, (1)で証明した命題の対偶を利用しています。なお, 合同式を用いて記述しても構いません。

2　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［九州大・理］

(1)　n が正の偶数のとき，l を自然数として，$n=2l$ とおくと，

$$2^n-1=2^{2l}-1=4^l-1=(3+1)^l-1$$
$$=(3^l+{}_l\mathrm{C}_1 3^{l-1}+{}_l\mathrm{C}_2 3^{l-2}+\cdots+{}_l\mathrm{C}_{l-1}3+1)-1$$
$$=3(3^{l-1}+{}_l\mathrm{C}_1 3^{l-2}+{}_l\mathrm{C}_2 3^{l-3}+\cdots+{}_l\mathrm{C}_{l-1})$$

よって，2^n-1 は 3 の倍数である。

(2)　n を自然数とするとき，2^n+1 と 2^n-1 の最大公約数を g とおくと，

$$2^n+1=ga\cdots\cdots①,\ \ 2^n-1=gb\cdots\cdots②\ \ (a \text{ と } b \text{ は互いに素})$$

①－②より，$2=g(a-b)$ となり，$g=2$ または $g=1$ である。

$g=2$ のとき，①は $2^n+1=2a$ となり，左辺は奇数，右辺は偶数で成立しない。

よって，$g=1$ から，2^n+1 と 2^n-1 は互いに素である。

(3)　異なる素数 $p,\,q$ に対して，$2^{p-1}-1=pq^2$ ………③

(i)　p が偶数のとき

p は素数より $p=2$，すると，③から $2^1-1=2q^2$ となり，素数 q は存在しない。

(ii)　p が奇数のとき

$p-1$ は偶数となり，(1)の結果から $2^{p-1}-1$ は 3 の倍数である。すると，③から pq^2 は 3 の倍数となり，$p=3$ または $q=3$ である。

(ii-i)　$p=3$ のとき

③は $2^2-1=3q^2$ となり，素数 q は存在しない。

(ii-ii)　$q=3$ のとき

③は $2^{p-1}-1=9p$ ……④となり，k を自然数として，$p=2k+1$ とおくと，

$$2^{p-1}-1=2^{2k}-1=(2^k+1)(2^k-1)$$

(2)から 2^k+1 と 2^k-1 は互いに素で，④は $(2^k+1)(2^k-1)=9(2k+1)$ となり，

$$(2^k+1,\ 2^k-1)=(9,\ 2k+1) \text{ または } (2k+1,\ 9)$$

$(2^k+1,\ 2^k-1)=(9,\ 2k+1)$ のとき，$k=3$ すなわち $p=7$ となる。

$(2^k+1,\ 2^k-1)=(2k+1,\ 9)$ のとき，満たす k は存在しない。

(i)(ii)より，③を満たす $p,\,q$ の組は，$(p,\ q)=(7,\ 3)$ のみである。

［解　説］

誘導つきの整数問題です。なお，④を満たす p を求めるために，(2)の結論を利用する方法で記しましたが，グラフをイメージして，直接的に解いても構いません。

3　　[京都大・理]

$a,\ b,\ c,\ d,\ e$ を正の実数とするとき，$f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=dx+e$ に対して，$f(x)$ を $g(x)$ で割った商を $px+q$，余りを r とおくと，p, q, r は実数となり，

$$f(x)=g(x)(px+q)+r\ \cdots\cdots\cdots①$$

さて，$h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ とおくと，①から $h(x)=px+q+\dfrac{r}{g(x)}=px+q+\dfrac{r}{dx+e}$

ここで, n を 2 以上の整数とすると，条件より，$h(n-1)$，$h(n)$，$h(n+1)$ はすべて整数なので，$h(n-1)+h(n+1)-2h(n)$ の値も整数となり，

$$\begin{aligned}&h(n-1)+h(n+1)-2h(n)\\&=pn-p+q+\frac{r}{dn-d+e}+pn+p+q+\frac{r}{dn+d+e}-2\left(pn+q+\frac{r}{dn+e}\right)\\&=\frac{r}{dn-d+e}+\frac{r}{dn+d+e}-\frac{2r}{dn+e}\\&=\frac{2d^2r}{(dn-d+e)(dn+d+e)(dn+e)}\ \cdots\cdots\cdots②\end{aligned}$$

すると，十分に大きい n に対しても②が整数となることより，$r=0$ である。

よって，①から，$f(x)=g(x)(px+q)$ となり，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れる。

［解 説］

結論の $r=0$ を示すために，$h(n)$ の等差数列部分である $pn+q$ を消すことを考え，$h(n-1)+h(n+1)-2h(n)$ を計算しています。そして，得られた式が②というわけです。階差を 2 回とったと考えてもよいですが……。なお，既視感があったので，過去問を調べたところ，1991 年の後期に類題が出ていました。

$\boxed{4}$ ［東北大・文］

(1) 条件より，$a_n{}^2-2a_na_{n+1}+a_{n+1}{}^2=3(a_n+a_{n+1})\cdots\cdots$①なので，

$$a_{n+1}{}^2-2a_{n+1}a_{n+2}+a_{n+2}{}^2=3(a_{n+1}+a_{n+2})\cdots\cdots\cdots②$$

②－①より，$a_{n+2}{}^2-a_n{}^2-2a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)=3(a_{n+2}-a_n)$

ここで，$a_{n+2}>a_{n+1}>a_n$ から，$a_{n+2}-a_n>0$ となり，

$$a_{n+2}+a_n-2a_{n+1}=3,\ a_{n+2}+a_n=2a_{n+1}+3\cdots\cdots\cdots③$$

(2) ③より，$a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=3$ となり，$(a_{n+2}-a_{n+1})-(a_{n+1}-a_n)=3\cdots\cdots\cdots$④

ここで，$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，④より，$b_{n+1}-b_n=3$ となり，

$$b_n=b_1+3(n-1)\cdots\cdots\cdots⑤$$

さて，①より，$a_1{}^2-2a_1a_2+a_2{}^2=3(a_1+a_2)$ となり，$a_1=3$ から，

$$9-6a_2+a_2{}^2=3(3+a_2),\ a_2{}^2-9a_2=0$$

すると，$a_2>a_1=3$ から $a_2=9$ となり，$b_1=a_2-a_1=6$

よって，⑤から，$b_n=6+3(n-1)=3(n+1)$

(3) (2)より，$n\geqq 2$ において，

$$a_n=3+\sum_{k=1}^{n-1}3(k+1)=3+3\cdot\frac{2+n}{2}(n-1)=3+\frac{3}{2}(n^2+n-2)=\frac{3}{2}n(n+1)$$

なお，この式は $n=1$ のときも成立している。

［解 説］

誘導つきの漸化式の問題です。(1)の結果が(2)へとつながり，さらに(3)へとスムーズに解いていくことができます。

5 ［広島大・文］

(1) $r_n=\log_2(n\sqrt{n}+\sqrt{n})=\log_2\sqrt{n}(n+1)$ より，$r_{n+1}=\log_2\sqrt{n+1}(n+2)$ となり，

$$r_{n+1}-r_n=\log_2\frac{\sqrt{n+1}(n+2)}{\sqrt{n}(n+1)}=\log_2\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}$$

よって，$\dfrac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}=2^{r_{n+1}-r_n}$ ………①

(2) ①より，$\dfrac{c_{n+1}}{c_n}=2^{r_{n+1}-r_n}$ となり，$c_{n+1}=2^{r_{n+1}-r_n}c_n$

ここで，$f(n)=2^{r_{n+1}-r_n}$ とおくと，$c_{n+1}=f(n)c_n$ となり，$n\geqq 2$ において，

$$c_n=c_1f(1)f(2)\cdots f(n-1)=c_1\cdot 2^{r_2-r_1}\cdot 2^{r_3-r_2}\cdot\cdots\cdot 2^{r_n-r_{n-1}}=c_1\cdot 2^{r_n-r_1}$$
$$=c_1\cdot 2^{\log_2\sqrt{n}(n+1)-\log_2 2}=c_1\cdot 2^{\log_2\sqrt{n}(n+1)-1}\ \cdots\cdots\cdots ②$$

さて，$x^2-p_nx+q_n=0$ の実数解を α_n，β_n $(\alpha_n<\beta_n)$ とすると，

$$\alpha_n=\frac{p_n-\sqrt{{p_n}^2-4q_n}}{2},\quad \beta_n=\frac{p_n+\sqrt{{p_n}^2-4q_n}}{2}$$

すると，$c_n=\beta_n-\alpha_n=\sqrt{{p_n}^2-4q_n}$ となり，$c_1=\sqrt{{p_1}^2-4q_1}=\sqrt{4}=2$

よって，②より，$c_n=2\cdot 2^{\log_2\sqrt{n}(n+1)-1}=2^{\log_2\sqrt{n}(n+1)}=\sqrt{n}(n+1)$ ………③

なお，③は $n=1$ のときも成立している。

(3) ③より，$\sqrt{{p_n}^2-4q_n}=\sqrt{n}(n+1)$ となり，${p_n}^2-4q_n=n(n+1)^2$ ………④

そこで，$p_n=n\sqrt{n}$ のとき，${p_n}^2=n^3$ となり，④より，

$$q_n=\frac{1}{4}\{n^3-n(n+1)^2\}=-\frac{1}{4}n(2n+1)$$

［解　説］

2 次方程式の解を題材とした，誘導つきの漸化式の問題です。(2)の漸化式 $c_{n+1}=f(n)c_n$ を解くことがポイントとなっています。詳しくは「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

$\boxed{6}$ ［千葉大・理］

(1)　$b^2+4c>0$ のとき，$x^2-bx-c=0$ の実数解 α，β について，

$$\alpha+\beta=b\,,\ \alpha\beta=-c\ \cdots\cdots\cdots①$$

条件より，$a_n=\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}\cdots\cdots②$から，①と合わせて，

$$ba_{n+1}+ca_n=(\alpha+\beta)(\alpha^n+\beta^n)-\alpha\beta(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})$$
$$=\alpha^{n+1}+\alpha\beta^n+\alpha^n\beta+\beta^{n+1}-(\alpha^n\beta+\alpha\beta^n)=\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}$$

よって，$a_{n+2}=ba_{n+1}+ca_n\cdots\cdots③$が成立する。

(2)　a_n がすべて整数のとき，①②から，$a_1=\alpha^0+\beta^0=2$，$a_2=\alpha^1+\beta^1=b$

これより b は整数となり，③から，$a_3=ba_2+ca_1$，$a_4=ba_3+ca_2$ となり，

$$2c=a_3-ba_2\ \cdots\cdots\cdots④,\ \ bc=a_4-ba_3\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

また，①②から $a_3=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=b^2+2c$ となり，③から，

$$a_5=ba_4+ca_3\,,\ (b^2+2c)c=a_5-ba_4\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

④⑤⑥より，$2c$，bc，$(b^2+2c)c$ はすべて整数である。

さて，$2c$ が整数より，k を整数として $c=\dfrac{k}{2}$ とおくことができる。

ここで，k が奇数と仮定すると，$bc=\dfrac{bk}{2}$ が整数より b は偶数となる。

ところが，$(b^2+2c)c=\dfrac{(b^2+k)k}{2}$ は，分子 $(b^2+k)k$ が奇数より，整数ではない。

したがって，k は奇数ではなく偶数となり，c も整数である。

逆に，b, c がともに整数であるとき，$a_1=2$，$a_2=b$ はともに整数であり，③から，帰納的に a_n $(n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots)$ はすべて整数となる。

以上より，a_n がすべて整数であるための必要十分条件は，b，c がともに整数であることである。

［解 説］

隣接 3 項間型の漸化式が題材となっている証明問題です。(2)の設問は，見かけよりは難しめで，詰めに時間がかかりました。

7　　［東京大・理］

(1)　$p_1=1$，$p_2=2$，$p_{n+2}=\dfrac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}$ に対して，$a_n=\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}$ とおくと，

$$a_{n+1}=\frac{{p_{n+2}}^2+{p_{n+1}}^2+1}{p_{n+2}p_{n+1}}=\frac{p_{n+2}}{p_{n+1}}+\frac{p_{n+1}}{p_{n+2}}+\frac{1}{p_{n+2}p_{n+1}}$$
$$=\frac{{p_{n+1}}^2+1}{p_{n+1}p_n}+\frac{p_{n+1}p_n}{{p_{n+1}}^2+1}+\frac{p_n}{p_{n+1}({p_{n+1}}^2+1)}$$
$$=\frac{({p_{n+1}}^2+1)^2+{p_{n+1}}^2{p_n}^2+{p_n}^2}{p_{n+1}p_n({p_{n+1}}^2+1)}=\frac{({p_{n+1}}^2+1)+{p_n}^2}{p_{n+1}p_n}=a_n$$

これより，$a_n=a_1=\dfrac{2^2+1^2+1}{2\cdot 1}=3$ となり，$\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}=3$ ………①

(2)　すべての自然数 n に対し，$0<p_n<p_{n+1}$ であることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1$ のとき　$p_1=1$，$p_2=2$ より成立する。

(ii)　$n=k$ のとき　$0<p_k<p_{k+1}$ すなわち $\dfrac{p_{k+1}}{p_k}>1$ と仮定すると，

条件式より，$p_{k+2}=\dfrac{{p_{k+1}}^2+1}{p_k}>\dfrac{{p_{k+1}}^2}{p_k}$ から，$\dfrac{p_{k+2}}{p_{k+1}}>\dfrac{p_{k+1}}{p_k}>1$ となる。

(i)(ii)より，$0<p_n<p_{n+1}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ である。

さて，①より，${p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1=3p_{n+1}p_n$ ………②

${p_n}^2+{p_{n-1}}^2+1=3p_np_{n-1}$ $(n\geqq 2)$ ………③

②－③より，${p_{n+1}}^2-{p_{n-1}}^2=3p_n(p_{n+1}-p_{n-1})$

すると，$p_{n-1}<p_n<p_{n+1}$ より，$p_{n+1}-p_{n-1}>0$ なので，

$p_{n+1}+p_{n-1}=3p_n$　$(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$

(3)　(2)より，$p_1=1$，$p_2=2$，$p_{n+2}=3p_{n+1}-p_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

ここで，$q_1=1$，$q_2=1$，$q_{n+2}=q_{n+1}+q_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められる q_n に対して，$p_n=q_{2n-1}$ であることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1,\ 2$ のとき　$p_1=q_1$，$q_3=q_2+q_1=2$ から $p_2=q_3$ となり成立する。

(ii)　$n=k,\ k+1$ のとき　$p_k=q_{2k-1}$，$p_{k+1}=q_{2k+1}$ と仮定する。

このとき，$p_{k+2}=3p_{k+1}-p_k=3q_{2k+1}-q_{2k-1}$ となり，

$$q_{2k+3}=q_{2k+2}+q_{2k+1}=q_{2k+1}+q_{2k}+q_{2k+1}=2q_{2k+1}+q_{2k}$$
$$=2q_{2k+1}+(q_{2k+1}-q_{2k-1})=3q_{2k+1}-q_{2k-1}$$

(i)(ii)より，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，$p_n=q_{2n-1}$ が成り立つ。

［解 説］

複雑な漸化式ですが，誘導に従うと道筋が見えてくるタイプです。

8　　［北海道大・文］

(1)　自然数 x に対し，$\dfrac{3x}{x^2+2}$ が自然数であるためには，$\dfrac{3x}{x^2+2}\geqq 1$ が必要である。

$$3x\geqq x^2+2,\ x^2-3x+2\leqq 0,\ (x-1)(x-2)\leqq 0$$

よって，$1\leqq x\leqq 2$ となり，$x=1$ または $x=2$ である。

(i)　$x=1$ のとき　$\dfrac{3x}{x^2+2}=\dfrac{3}{1+2}=1$ となり適する。

(ii)　$x=2$ のとき　$\dfrac{3x}{x^2+2}=\dfrac{6}{4+2}=1$ となり適する。

(i)(ii)より，求める x は，$x=1,\ 2$ である。

(2)　自然数 x, y に対し，$\dfrac{3x}{x^2+2}+\dfrac{1}{y}$ が自然数である条件は，

(i)　$y=1$ のとき

$\dfrac{1}{y}=1$ から $\dfrac{3x}{x^2+2}$ が自然数となることより，(1)の結果から $x=1,\ 2$

(ii)　$y\geqq 2$ のとき

$0<\dfrac{1}{y}\leqq\dfrac{1}{2}$ となり，(i)より $x\neq 1$，$x\neq 2$ なので，$x\geqq 3$ である。

すると，(1)の結果から $0<\dfrac{3x}{x^2+2}<1$ となり，$0<\dfrac{3x}{x^2+2}+\dfrac{1}{y}<\dfrac{3}{2}$ から，

$$\frac{3x}{x^2+2}+\frac{1}{y}=1\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$から，$\dfrac{1}{y}=1-\dfrac{3x}{x^2+2}=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2}$，$y=\dfrac{x^2+2}{x^2-3x+2}$

ここで，$y\geqq 2$ から $\dfrac{x^2+2}{x^2-3x+2}\geqq 2$ となり，$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)>0$ より，

$$x^2+2\geqq 2(x^2-3x+2),\ x^2-6x+2\leqq 0$$

よって，$3-\sqrt{7}\leqq x\leqq 3+\sqrt{7}$ となり，$x=3$ または $x=4$ または $x=5$

(ii-i)　$x=3$ のとき　$\dfrac{3x}{x^2+2}=\dfrac{9}{11}$ となり，$(*)$より $\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{11}$ であるので不適。

(ii-ii)　$x=4$ のとき　$\dfrac{3x}{x^2+2}=\dfrac{12}{18}=\dfrac{2}{3}$ となり，$(*)$より $\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}$ であるので $y=3$。

(ii-iii)　$x=5$ のとき　$\dfrac{3x}{x^2+2}=\dfrac{15}{27}=\dfrac{5}{9}$ となり，$(*)$より $\dfrac{1}{y}=\dfrac{4}{9}$ であるので不適。

(i)(ii)より，求める $(x,\ y)$ は，$(x,\ y)=(1,\ 1)$，$(2,\ 1)$，$(4,\ 3)$ である。

［解　説］

値を絞り込むタイプの整数問題です。一見，難問そうに見える(2)では，(1)での考察がたいへん役立っています。なお，記述は省きましたが，方針を立てるとき，x に具体的な数値を入れて計算をしています。

9　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［大阪大・文］

(1)　実数 $a,\ k$ が $a>0$，$k\geqq 1$ のとき，2 次方程式 $x^2-kax+a-k=0$ ……①に対して，$f(x)=x^2-kax+a-k$ とおくと，

$$f\left(-\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a^2}+k+a-k=\frac{1}{a^2}+a>0$$

$$f(1)=1-ka+a-k=(a+1)(1-k)\leqq 0$$

これより，①は $-\dfrac{1}{a}<s\leqq 1$ を満たす実数解 s をもつ。

(2)　整数 $a,\,n,\,k$ は，$a\geqq 3$，$n\geqq 2$，$k\geqq 1$ を満たすとする。

ここで，n^2+a は $an+1$ で割り切れることから，$n^2+a=k(an+1)$ と表せ，

$$n^2-kan+a-k=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

すると，②は $f(n)=0$ であり，さらに(1)から $-\dfrac{1}{a}<s\leqq 1$ なので，①は異なる実数解 $s,\ n\ (s<n)$ をもつことになる。

さて，①について，解と係数の関係から $s+n=ka$ となり，$s=ka-n$ ………③

$a,\,n,\,k$ は整数なので，③から s も整数となる。さらに，$a\geqq 3$ から $-\dfrac{1}{3}\leqq -\dfrac{1}{a}<0$ となり，$-\dfrac{1}{a}<s\leqq 1$ から $s=0,\ 1$ である。

(i)　$s=0$ のとき　$f(0)=a-k=0$ から $k=a$ となり，③から $n=a^2$

そして，$a^2\geqq 9$ より $n\geqq 2$ は満たされている。

(ii)　$s=1$ のとき　$f(1)=(a+1)(1-k)=0$ から $k=1$ となり，③から $n=a-1$

そして，$a-1\geqq 2$ より $n\geqq 2$ は満たされている。

(i)(ii)より，$n=a^2,\ a-1$ である。

［解　説］

一見，無関係に思える 2 つの小問です。しかし，(2)を解いていくと，この整数問題への誘導として，(1)の 2 次方程式の解の配置についての設問がある，というのに気づきます。

10　　　　［神戸大・理］

(1) (i)　$a=18=2\times 3^2$ と $b=30=2\times 3\times 5$ の公約数の集合 S は,

$S=\{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6\}$

また, $b=30=2\times 3\times 5$ と $c=-42=-2\times 3\times 7$ の公約数の集合 T は,

$T=\{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6\}$

(ii)　$a,\ b,\ c,\ p$ は 0 でない任意の整数, そして a と b の最大公約数を M, b と c の最大公約数を N とし, $a=pb+c$ ……①を満たしている。

まず, N は b と c の公約数で, ①から N は a の約数でもある。すると, N は a と b の公約数となり, a と b の最大公約数 M と比べると, $N\leqq M$ である。

また, M は a と b の公約数で, ①から $c=a-pb$ となるので, M は c の約数でもある。すると, M は b と c の公約数となり, b と c の最大公約数 N と比べると, $M\leqq N$ である。

したがって, $N\leqq M$ かつ $M\leqq N$ から, $M=N$ である。

(2) (i)　0 でない任意の整数 l と m に対して, その最大公約数を $G(l,\ m)$ で表す。

さて, $a_1=3$, $a_2=4$, $a_{n+2}=6a_{n+1}+a_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ で定められる自然数の列 $\{a_n\}$ に対して, 帰納的に $a_n\neq 0$ なので, (1)から $G(a_{n+2},\ a_{n+1})=G(a_{n+1},\ a_n)$

$$G(a_{n+1},\ a_n)=G(a_n,\ a_{n-1})=\cdots=G(a_3,\ a_2)=G(a_2,\ a_1)=G(4,\ 3)=1$$

(ii)　$a_{n+4}=6a_{n+3}+a_{n+2}=6(6a_{n+2}+a_{n+1})+a_{n+2}=37a_{n+2}+6a_{n+1}$

ここで, $6a_{n+1}=a_{n+2}-a_n$ から,

$$a_{n+4}=37a_{n+2}+(a_{n+2}-a_n)=38a_{n+2}-a_n \cdots\cdots\cdots ②$$

(iii)　②に(1)の結果を適用すると, $G(a_{n+4},\ a_{n+2})=G(a_{n+2},\ a_n)$ である。

ここで, $a_3=6a_2+a_1=27$, $a_4=6a_3+a_2=166$ なので,

(a)　n が奇数のとき

$$G(a_{n+2},\ a_n)=G(a_n,\ a_{n-2})=\cdots=G(a_3,\ a_1)=G(27,\ 3)=3$$

(b)　n が偶数のとき

$$G(a_{n+2},\ a_n)=G(a_n,\ a_{n-2})=\cdots=G(a_4,\ a_2)=G(166,\ 4)=2$$

［解　説］

ユークリッドの互除法に関する基本を確認した後, それを漸化式に適用する問題です。細かい誘導のため, 方針に迷いはないでしょう。

11　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大・文］

(1)　3^n を 10 で割った余りを a_n とすると，数列 $\{a_n\}$ は，3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, 3, ……

すると，$\{a_n\}$ は 3, 9, 7, 1 を繰り返す周期 4 の周期数列となるので，

$a_n=3$　(n を 4 で割った余りが 1 のとき)

$a_n=9$　(n を 4 で割った余りが 2 のとき)

$a_n=7$　(n を 4 で割った余りが 3 のとき)

$a_n=1$　(n を 4 で割った余りが 0 のとき)

(2)　3^n を 4 で割った余りを b_n とすると，数列 $\{b_n\}$ は，3, 1, 3, 1, 3, 1, ……

すると，$\{b_n\}$ は 3, 1 を繰り返す周期 2 の周期数列と予測できる。

そこで，3^{n+2} と 3^n の関係を調べると，

$$3^{n+2}=9\cdot 3^n=(4\cdot 2+1)\cdot 3^n=4\cdot 2\cdot 3^n+3^n\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$より，$4\cdot 2\cdot 3^n$ は 4 の倍数であるので，3^{n+2} を 4 で割った余りと 3^n を 4 で割った余りは等しい。これより，$\{b_n\}$ は周期 2 の周期数列となり，

$b_n=3$　(n を 2 で割った余りが 1 のとき)

$b_n=1$　(n を 2 で割った余りが 0 のとき)

(3)　$x_1=1$，$x_{n+1}=3^{x_n}$ で定義された数列 $\{x_n\}$ に対して，

$$x_2=3^{x_1}=3^1=3,\ x_3=3^{x_2}=3^3=27,\ x_4=3^{x_3}=3^{27},\ \cdots\cdots$$

すると，3 の奇数乗は奇数より，帰納的に x_n は奇数である。

よって，(2)の結論から，3^{x_n} を 4 で割った余りは 3 である。すなわち $x_{n+1}=3^{x_n}$ から，x_n ($n\geqq 2$) を 4 で割った余りは 3 である。

さらに，この結果を(1)の結論に適用すると，3^{x_n} を 10 で割った余りは 7 である。すなわち $x_{n+1}=3^{x_n}$ から，x_n ($n\geqq 3$) を 10 で割った余りは 7 である。

したがって，x_{10} を 10 で割った余りは 7 である。

［解　説］

整数と数列の融合問題です。一見，関連のわからない(1)と(2)の結果が，(3)でうまく利用できる誘導となっています。

12　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［九州大］

(1)　10^n を 13 で割った余りが a_n より，q_n を自然数として，$10^n=13q_n+a_n$ と表せ，

$$10^{n+1}=10\cdot 10^n=10(13q_n+a_n)=13(10q_n)+10a_n$$

すると，10^{n+1} を 13 で割った余り a_{n+1} は，$10a_n$ を 13 で割った余りに等しい。

(2)　10^1 を 13 で割った余りは 10 より，$a_1=10$ である。

そして，(1)の結論を当てはめていくと，a_2 は $10a_1=100$ を 13 で割った余りに等しく，$100=13\times7+9$ より $a_2=9$ である。

a_3 は $10a_2=90$ を 13 で割った余り $(90=13\times6+12)$ より，$a_3=12$ である。

a_4 は $10a_3=120$ を 13 で割った余り $(120=13\times9+3)$ より，$a_4=3$ である。

a_5 は $10a_4=30$ を 13 で割った余り $(30=13\times2+4)$ より，$a_5=4$ である。

a_6 は $10a_5=40$ を 13 で割った余り $(40=13\times3+1)$ より，$a_6=1$ である。

(3)　自然数 N を十進法で表示したとき，最初の桁の数字を k $(1\leqq k\leqq 9)$，最後の桁の数字を l $(0\leqq l\leqq 9)$ とおくと，条件(i)(ii)より，

$$N=k\cdot10^5+2\cdot10^4+0\cdot10^3+1\cdot10^2+6\cdot10^1+l$$

ここで，(2)の結論を合同式を用い，mod13 で記すと，

$$10^5\equiv4,\ 10^4\equiv3,\ 10^3\equiv12,\ 10^2\equiv9,\ 10^1\equiv10$$

これより，$N\equiv4k+2\cdot3+1\cdot9+6\cdot10+l=4k+l+75\equiv4k+l+10$

さらに，条件(iii)から N が 13 で割り切れることから，$4k+l+10$ が 13 の倍数となり，$14\leqq4k+l+10\leqq55$ より，

(a)　$4k+l+10=26$ のとき　$4k+l=16$ から $(k,\ l)=(2,\ 8),\ (3,\ 4),\ (4,\ 0)$

(b)　$4k+l+10=39$ のとき　$4k+l=29$ から $(k,\ l)=(5,\ 9),\ (6,\ 5),\ (7,\ 1)$

(c)　$4k+l+10=52$ のとき　$4k+l=42$ から $(k,\ l)=(9,\ 6)$

(a)～(c)より，求める自然数 N は，

220168, 320164, 420160, 520169, 620165, 720161, 920166

［解　説］

うまく誘導のついた整数問題です。なお，(3)の不定方程式は，一般的に解くよりは，値を絞り込んで数値を代入していった方が簡単です。また，(1)から合同式を利用してもよかったのですが……。

13　　［東北大・理］

(1)　6 以上の整数 n に対して，$2^n > n^2 + 7$ が成り立つことを数学的帰納法で示す。

(i)　$n = 6$ のとき　$2^n = 64$，$n^2 + 7 = 43$ より成り立つ。

(ii)　$n = k$ のとき　$2^k > k^2 + 7$ と仮定すると，$2^{k+1} > 2(k^2 + 7)$ となり，

$$2(k^2+7)-\{(k+1)^2+7\} = k^2 - 2k + 6 = k(k-2)+6 > 0$$

すると，$2(k^2+7) > (k+1)^2 + 7$ から，$2^{k+1} > (k+1)^2 + 7$

これより，$n = k+1$ のときも成り立つ。

(i)(ii)より，6 以上の整数 n に対して，$2^n > n^2 + 7$ が成り立つ。

(2)　素数 p, q に対して，$p^q = q^p + 7$ ………①

(i)　$p = 2$ のとき　①から $2^q = q^2 + 7$ ………②

(1)から $q \geqq 6$ すなわち 7 以上の素数について，$2^q > q^2 + 7$ となり②は成立しない。そこで，$q = 2,\ 3,\ 5$ のときを調べる。

(a)　$q = 2$ のとき　$2^q = 4$，$q^2 + 7 = 11$ となり，②は成立しない。

(b)　$q = 3$ のとき　$2^q = 8$，$q^2 + 7 = 16$ となり，②は成立しない。

(c)　$q = 5$ のとき　$2^q = 32$，$q^2 + 7 = 32$ となり，②は成立する。

(ii)　$p \geqq 3$ のとき　p は奇数となり，$q \geqq 3$ すなわち q も奇数の場合については，p^q，q^p はともに奇数から，①は両辺の偶奇が異なり，成立しない。

そこで，$q = 2$ のときについて，①から $p^2 = 2^p + 7$ ………③

(1)から $p \geqq 6$ すなわち 7 以上の素数について，$2^p + 7 > (p^2 + 7) + 7$ となり③は成立しない。そこで，$p = 3,\ 5$ のときを調べる。

(a)　$p = 3$ のとき　$p^2 = 9$，$2^p + 7 = 15$ となり，③は成立しない。

(b)　$p = 5$ のとき　$p^2 = 25$，$2^p + 7 = 39$ となり，③は成立しない。

(i)(ii)より，①を満たす素数 p, q は，$(p,\ q) = (2,\ 5)$ のみである。

［解　説］

素数が題材の誘導つき不定方程式の問題です。素数で偶数なのは 2 だけということがポイントになっています。なお，(2)で p^q と q^p の偶奇が異なる点に注目すると，少し解答例を短縮できます。

14　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京工大］

(1) n が素数のとき，n より小さい自然数 $n-1$，$n-2$，$n-3$，…，3，2，1 は，いずれも n と互いに素である。

すると，それらの数の積 $(n-1)!$ は n と互いに素になり，n で割り切れない。

また，$n=4$ のとき $(n-1)!=3!=6$ は n で割り切れない。

(2) 素数でなくかつ 4 でもない n は，6 以上の合成数であり，

(i) $n=pq$ (p は 2 以上の自然数，q は 3 以上の自然数，$p\neq q$)のとき

$(n-1)!=(pq-1)(pq-2)(pq-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ となり，$pq-p=p(q-1)$ は p の倍数，$pq-q=q(p-1)$ は q の倍数であるので，$(n-1)!$ は $n=pq$ で割り切れる。

(ii) $n=r^2$ (r は 3 以上の素数)のとき

$(n-1)!=(r^2-1)(r^2-2)(r^2-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ となり，$r^2-r=r(r-1)$ は r の倍数，$r^2-2r=r(r-2)$ は r の倍数であるので，$(n-1)!$ は $n=r^2$ で割り切れる。

(i)(ii)より，n が素数でなくかつ 4 でもないとき，$(n-1)!$ は n で割り切れる。

［解　説］

整数からむ証明問題です。方針を立てるために，まず具体例を考え，それを一般化して解答例を作りました。

15　　［京都大・理］

素数 $p,\ q$ に対して，$n = p^q + q^p$ とおく。ここで, n が素数である $p,\ q$ の条件を求めるとき，対称性から $p \leqq q$ としても一般性は失われない。

まず, p が 3 以上のときは，素数 $p,\ q$ はともに奇数になり，p^q，q^p もともに奇数である。よって, n は偶数となり素数ではない。

これより，$p = 2$ となり，$n = 2^q + q^2$ と表される。

さらに，$q = 2$ のときは，$n = 2^2 + 2^2 = 8$ となり, n は素数ではない。

また，$q = 3$ のときは，$n = 2^3 + 3^2 = 17$ となり, n は素数となる。

さて, q が 5 以上の素数のとき, 2 の倍数でもなく，かつ 3 の倍数でもないことに着目すると, k を自然数として，$q = 6k \pm 1$ と表せる。

(i)　$q = 6k + 1$ のとき

$$n = 2^{6k+1} + (6k+1)^2 = 2\cdot 64^k + 36k^2 + 12k + 1$$

ここで，N_1 を整数とすると，$64^k = (3\cdot 21 + 1)^k = 3N_1 + 1$ となるので,

$$n = 2(3N_1 + 1) + 36k^2 + 12k + 1 = 3(2N_1 + 12k^2 + 4k + 1)$$

よって, n は 3 の倍数となり，素数ではない。

(ii)　$q = 6k - 1$ のとき

$$n = 2^{6k-1} + (6k-1)^2 = 32\cdot 64^{k-1} + 36k^2 - 12k + 1$$

ここで，N_2 を整数とすると，$64^{k-1} = (3\cdot 21 + 1)^{k-1} = 3N_2 + 1$ となるので,

$$n = 32(3N_2 + 1) + 36k^2 - 12k + 1 = 3(32N_2 + 12k^2 - 4k + 11)$$

よって, n は 3 の倍数となり，素数ではない。

(i)(ii)より, q が 5 以上の素数のとき, n は素数にならない。

以上より，$p^q + q^p$ と表される素数は 17 だけである。

［解　説］

演習しておきたい素数がらみの整数問題です。まず, 2 以外の素数は奇数という頻出事項でふるいにかけて p の値を決め, 次に q の値を 2, 3, 5, 7, 11 として n の値を計算すると, 5 以上では 3 の倍数であることがわかります。ただ, q が奇数ということだけでは，$q = 9$ で n が素数となることから考え直し, その結果, q を 6 で割った余りで分類とした解答例となったわけです。なお, 二項展開を用いる箇所は, 省略気味に記しています。

16　　［名古屋大・文］

(1)　k を正の整数, p を 3 以上の素数とするとき，$2^k p$ の正の約数は,

$$1,\ 2,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^k,\ p,\ 2p,\ 2^2p,\ \cdots,\ 2^kp$$

したがって, その和 $s(2^kp)$ は,

$$s(2^kp)=(1+2+2^2+\cdots+2^k)(1+p)=\frac{2^{k+1}-1}{2-1}(1+p)=(2^{k+1}-1)(1+p)$$

(2)　$2016=2^5\cdot3^2\cdot7$ より, その正の約数の和 $s(2016)$ は,

$$s(2016)=(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5)(1+3+3^2)(1+7)=63\cdot13\cdot8=6552$$

(3)　2016 の正の約数 n は, (2)から a, b, c を整数として,

$$n=2^a\cdot3^b\cdot7^c\quad(0\leqq a\leqq5,\ 0\leqq b\leqq2,\ 0\leqq c\leqq1)$$

すると, n の正の約数の和 $s(n)$ は,

$$s(n)=\frac{2^{a+1}-1}{2-1}\cdot\frac{3^{b+1}-1}{3-1}\cdot\frac{7^{c+1}-1}{7-1}=\frac{1}{12}(2^{a+1}-1)(3^{b+1}-1)(7^{c+1}-1)$$

条件より，$s(n)=2016$ なので，$\frac{1}{12}(2^{a+1}-1)(3^{b+1}-1)(7^{c+1}-1)=2^5\cdot3^2\cdot7$

$$(2^{a+1}-1)(3^{b+1}-1)(7^{c+1}-1)=2^7\cdot3^3\cdot7\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$2^{a+1}-1$ は奇数で $3^{b+1}-1$ と $7^{c+1}-1$ は偶数, そして $3^{b+1}-1$ と $7^{c+1}-1$ は 7 の倍数とはなりえないので，$2^{a+1}-1$ が 7 の倍数となる。

すると，$2^{a+1}-1$ の値として, 7，$3\cdot7$，$3^2\cdot7$，$3^3\cdot7$ があげられる。

(i)　$2^{a+1}-1=7$ のとき　$a=2$ となり, $(*)$は $(3^{b+1}-1)(7^{c+1}-1)=2^7\cdot3^3$

$c=0$ のとき，$3^{b+1}-1=2^6\cdot3^2$ となり，$3^{b+1}=577$ より整数 b は存在しない。

$c=1$ のとき，$3^{b+1}-1=2^3\cdot3^2$ となり，$3^{b+1}=73$ より整数 b は存在しない。

(ii)　$2^{a+1}-1=3\cdot7$ のとき　$2^{a+1}=22$ より整数 a は存在しない。

(iii)　$2^{a+1}-1=3^2\cdot7$ のとき　$a=5$ となり, $(*)$は $(3^{b+1}-1)(7^{c+1}-1)=2^7\cdot3$

$c=0$ のとき，$3^{b+1}-1=2^6$ となり，$3^{b+1}=65$ より整数 b は存在しない。

$c=1$ のとき，$3^{b+1}-1=2^3$ となり，$b=1$ である。

(iv)　$2^{a+1}-1=3^3\cdot7$ のとき　$2^{a+1}=190$ より整数 a は存在しない。

(i)～(iv)より，$(a,\ b,\ c)=(5,\ 1,\ 1)$ となり，$n=2^5\cdot3^1\cdot7^1=672$ である。

［解 説］

正の約数すべての和という頻出事項が題材になっています。(3)については, まず偶奇でふるいにかけたところ絞り込みが足らず, まだ候補が多いので, 次に 7 の倍数に注目しています。

17　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[一橋大]

連立方程式 $x^2=yz+7$ ……①，$y^2=zx+7$ ……②，$z^2=xy+7$ ……③に対して，

①−②より，$x^2-y^2=z(y-x)$，$(x-y)(x+y+z)=0$ ………④

②−③より，$y^2-z^2=x(z-y)$，$(y-z)(x+y+z)=0$ ………⑤

(i)　$x+y+z\neq 0$ のとき

④⑤より $x=y=z$ となり，①に代入すると $x^2=x^2+7$ となり，成立しない。

(ii)　$x+y+z=0$ のとき

④⑤は満たされ，$y=-(x+z)$ として①に代入すると，$x^2=-(x+z)z+7$ となり，

$$x^2+zx+z^2-7=0 \text{ ………⑥}$$

ここで，x は実数より，$D=z^2-4(z^2-7)\geqq 0$ となり，

$$3z^2-28\leqq 0,\ z^2\leqq\frac{28}{3} \text{ ………⑦}$$

さて，整数 x, y, z は，$x+y+z=0$ かつ $x\leqq y\leqq z$ より，$x\leqq 0$，$0\leqq z$ ………⑧

⑦⑧より，$z=0,\ 1,\ 2,\ 3$ となる。

(ii-i)　$z=0$ のとき　⑥より $x^2=7$ となり，x が整数というのに反する。

(ii-ii)　$z=1$ のとき　⑥より $x^2+x-6=0$ となり，$(x+3)(x-2)=0$

⑧から $x=-3$，$y=-(-3+1)=2$ となるが，$x\leqq y\leqq z$ に反する。

(ii-iii)　$z=2$ のとき　⑥より $x^2+2x-3=0$ となり，$(x+3)(x-1)=0$

⑧から $x=-3$，$y=-(-3+2)=1$ となり，$x\leqq y\leqq z$ を満たす。

(ii-iv)　$z=3$ のとき　⑥より $x^2+3x+2=0$ となり，$(x+2)(x+1)=0$

⑧から $x=-2,\ -1$ となる。

$x=-2$ のとき，$y=-(-2+3)=-1$ となり，$x\leqq y\leqq z$ を満たす。

$x=-1$ のとき，$y=-(-1+3)=-2$ となり，$x\leqq y\leqq z$ に反する。

(i)(ii)より，$(x,\ y,\ z)=(-3,\ 1,\ 2)$，$(-2,\ -1,\ 3)$

［解　説］

連立方程式をまとめる問題です。上の解答例では，⑧の条件に着目して，まず y を消去し，0 以上である z の値から求めています。

18　　［北海道大・理］

(1)　自然数 a, n, k に対して，$n(n+1)+a=(n+k)^2$ ……①のとき，

$$a=(n+k)^2-n(n+1)=2kn+k^2-n=k^2+(2k-1)n$$

ここで，$n\geqq 1$，$2k-1\geqq 1$ より，$(2k-1)n\geqq 2k-1$ となり，

$$a\geqq k^2+2k-1 \text{ ………②}$$

(2)　n が自然数で $n(n+1)+14$ が平方数のとき，$n(n+1)+14>n^2$ より，①から，

$$n(n+1)+14=(n+k)^2 \text{（k は自然数）………③}$$

すると，②から，$14\geqq k^2+2k-1$ となり，$k^2+2k-15\leqq 0$

$$(k+5)(k-3)\leqq 0,\ -5\leqq k\leqq 3$$

k は自然数から，$k=1,\ 2,\ 3$ となる。

(i)　$k=1$ のとき　③から，$n(n+1)+14=(n+1)^2$ となり，$n=13$

(ii)　$k=2$ のとき　③から，$n(n+1)+14=(n+2)^2$ となり，$n=\dfrac{10}{3}$ より不適

(iii)　$k=3$ のとき　③から，$n(n+1)+14=(n+3)^2$ となり，$n=1$

(i)～(iii)より，$n=1,\ 13$ である。

［解 説］

整数問題ですが，(1)の誘導が強力なため，基本的な内容になっています。

19　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［九州大・文］

(1)　自然数 a と b の最大公約数を $G(a,\ b)$ と表すと，

ユークリッドの互除法より，

$$G(2017,\ 225)=G(225,\ 217)=G(217,\ 8)$$
$$=G(8,\ 1)=1$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ 8\,\overline{)\,217} \\ 16 \\ \hline 57 \\ 56 \\ \hline 1 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 1 \\ 217\,\overline{)\,225} \\ 217 \\ \hline 8 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 8 \\ 225\,\overline{)\,2017} \\ 1800 \\ \hline 217 \end{array}$$

(2)　$15=3\times5$ を約数にもつ 2017 以下の自然数は，

$$15\times1,\ 15\times2,\ 15\times3,\ \cdots,\ 15\times134$$

すると，$225=3^2\times5^2$ から，225 との最大公約数が 15 である自然数の個数は，134 以下の自然数で 3 の倍数でも 5 の倍数でもないものの個数となる。

ここで，134 以下の自然数で 3 の倍数となるものが 44 個，5 の倍数となるものが 26 個，15 の倍数となるものが 8 個である。

よって，求める自然数の個数は，$134-(44+26-8)=72$ である。

(3)　$111=3\times37$ を約数にもつ 2017 以下の自然数は，

$$111\times1,\ 111\times2,\ 111\times3,\ \cdots,\ 111\times18$$

すると，$1998=111\times2\times3^2$ から，1998 との最大公約数が 111 の自然数は，18 以下の自然数で 2 の倍数でも 3 の倍数でもない数と 111 との積になり，

$$111\times1,\ 111\times5,\ 111\times7,\ 111\times11,\ 111\times13,\ 111\times17$$

さらに，225 との最大公約数が 15 から，求める自然数は $111\times5=555$ である。

［解　説］

約数と倍数の問題です。(1)は年度の数が題材になっているため，2017 が素数という知識をもっていたとしても不思議ではありません。ただ，これをストレートに利用して，いきなり結論とするのは避けた方がよいでしょう。「ふるい」にかけて示せば別ですが。

20　　［筑波大・理］

(1)　$a_1=1$，$a_2=3$，$a_{n+2}=3{a_{n+1}}^2-6a_{n+1}a_n+3{a_n}^2+a_{n+1}$ に対して，

$$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)^2$$

ここで，$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，$b_1=2\geqq 0$，$b_{n+1}=3{b_n}^2$ ………①

よって，帰納的に，$b_n\geqq 0$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ である。

(2)　以下，b_n の一の位の数が 2 であることを数学的帰納法を用いて証明する。

(i)　$n=1$ のとき　$b_1=2$ より成立している。

(ii)　$n=k$ のとき　b_k の一の位の数が 2 であると仮定する。

これより，l_k を 0 以上の整数として，$b_k=10l_k+2$ とおくと，①から，

$$b_{k+1}=3{b_k}^2=3(10l_k+2)^2=300{l_k}^2+120l_k+12=10(30{l_k}^2+12l_k+1)+2$$

よって，b_{k+1} の一の位の数は 2 である。

(i)(ii)より，b_n の一の位の数は 2 である。

(3)　(2)より，l_n を 0 以上の整数として，$b_n=10l_n+2$ とおくことができ，

$$a_{n+1}-a_n=10l_n+2\ \cdots\cdots\cdots②$$

すると，$n\geqq 2$ において，②から，$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(10l_k+2)$ となり，

$$a_{2017}=1+10\sum_{k=1}^{2016}l_k+2\cdot 2016=10\sum_{k=1}^{2016}l_k+4033=10\left(\sum_{k=1}^{2016}l_k+403\right)+3$$

したがって，a_{2017} の一の位の数は 3 である。

［解　説］

整数と漸化式の融合問題です。(1)は簡単に記しましたが，丁寧に書くなら数学的帰納法です。また，(2)(3)は合同式を用いると，少し簡略になります。

21　　［東京大］

(1)　$p=2+\sqrt{5}$，$a_n=p^n+\left(-\dfrac{1}{p}\right)^n$ に対し，$q=-\dfrac{1}{p}=-\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}=2-\sqrt{5}$ とおくと，

$$a_n=p^n+q^n=(2+\sqrt{5})^n+(2-\sqrt{5})^n$$

これより，$a_1=(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})=4$，$a_2=(2+\sqrt{5})^2+(2-\sqrt{5})^2=18$ となる。

(2)　$n\geqq 2$ で，$a_1a_n=(p+q)(p^n+q^n)=p^{n+1}+q^{n+1}+pq(p^{n-1}+q^{n-1})$

すると，$pq=-1$ より，$a_1a_n=a_{n+1}-a_{n-1}$

(3)　(2)より，$4a_n=a_{n+1}-a_{n-1}$ となり，$a_{n+1}=4a_n+a_{n-1}\ (n\geqq 2)$ ………①

ここで，a_n は自然数であることを数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1,\ 2$ のとき　(1)より a_n は自然数である。

(ii)　$n=k-1,\ k\ (k\geqq 2)$ のとき　a_{k-1}，a_k がともに自然数であると仮定する。

①より，$a_{k+1}=4a_k+a_{k-1}$ となるので，a_{k+1} も自然数である。

(i)(ii)より，a_n は自然数である。

(4)　まず, (1)より，a_2 と a_1 の最大公約数は 2 である。

そして，a_1 と a_2 がともに偶数のとき，①から，帰納的に，すべての a_n は偶数であることがわかる。

そこで，$a_n=2b_n$ とおくと，すべての b_n は自然数となり，$2b_1=4$，$2b_2=18$，$2b_{n+1}=4\cdot 2b_n+2b_{n-1}$ から，

$$b_1=2,\ b_2=9,\ b_{n+1}=4b_n+b_{n-1}\ (n\geqq 2)\ \cdots\cdots\cdots ②$$

さて，b_{n+1} と b_n が互いに素でないと仮定すると，2 以上の自然数 g を用いて，

$$b_{n+1}=gb_{n+1}',\ b_n=gb_n'\ （b_{n+1}',\ b_n' \text{は自然数}）$$

②より，$b_{n-1}=b_{n+1}-4b_n=g(b_{n+1}'-4b_n')$ となり，b_{n-1} も約数 g をもつ。

同様に繰り返すと，b_2 と b_1 はともに 2 以上の約数 g をもつことになるが，$b_1=2$，$b_2=9$ より不適である。よって，b_{n+1} と b_n は互いに素である。

以上より，a_{n+1} と a_n の最大公約数は 2 である。

［解 説］

a_n の式から隣接 3 項間型漸化式を導き，この式と最大公約数を絡めた頻出問題です。たとえば, 昨年は神戸大・理で類題が出ています。

22　　　　［九州大・理］

(1)　初項 1，公差 4 の等差数列$\{a_n\}$の一般項は，$a_n=1+4(n-1)=4n-3$

さて，a_nが 7 の倍数となるのは，kを自然数として，$4n-3=7k$ ………①

ここで，$4\times(-1)-3=7\times(-1)$から，①を変形すると，

$4(n+1)=7(k+1)$ ………②

すると，4 と 7 は互いに素より，lを整数として$n+1=7l$，$k+1=4l$となり，

$n=7l-1$，$k=4l-1$

そこで，$1\leqq n\leqq 600$，$k\geqq 1$から，$1\leqq 7l-1\leqq 600$，$4l-1\geqq 1$となり，

$\dfrac{1}{2}\leqq l\leqq\dfrac{601}{7}=85+\dfrac{6}{7}$

これより，$l=1,\ 2,\ \cdots,\ 85$となり，7 の倍数である項の個数は 85 である。

(2)　$\{a_n\}$の初項から第 600 項のうち，7 の倍数の項を取り出してb_lとおくと，

$b_l=a_{7l-1}=4(7l-1)-3=28l-7=7(4l-1)\ \ (l=1,\ 2,\ \cdots,\ 85)$

さて，a_nが7^2の倍数，すなわちb_lが 7 の倍数となるのは，mを自然数として，

$4l-1=7m$ ………③

ここで，$4\times 2-1=7\times 1$から，③を変形すると，

$4(l-2)=7(m-1)$

すると，4 と 7 は互いに素より，pを整数として$l-2=7p$，$m-1=4p$となり，

$l=7p+2$，$m=4p+1$

そこで，$1\leqq l\leqq 85$，$m\geqq 1$から，$1\leqq 7p+2\leqq 85$，$4p+1\geqq 1$となり，

$0\leqq p\leqq\dfrac{83}{7}=11+\dfrac{6}{7}$

これより，$p=0,\ 1,\ \cdots,\ 11$となり，7^2の倍数である項の個数は 12 である。

(3)　a_nが 7 の倍数のとき，$n=7l-1\ (l\geqq 1)$となり，このnを書き並べると，

$6,\ \underline{13},\ 20,\ 27,\ 34,\ 41,\ 48\ |\ 55,\ \underline{62},\ 69,\ 76,\ 83,\ 90,\ 97\ |\ 104,\ \underline{111},\ 118,\ \cdots\cdots$

そして，この数列を 7 個ずつの区画に分け，左から第 1 群，第 2 群，…と呼ぶ。

また，a_nが7^2の倍数の項を取り出してc_pとおくと，$l=7p+2$から，

$n=7(7p+2)-1=49p+13\ \ (p\geqq 0)$

すると，上記の数列の下線をつけた数が対応して，

$c_p=a_{49p+13}=4(49p+13)-3=196p+49=7^2(4p+1)\ \ (p\geqq 0)$

さらに，a_nが7^3の倍数，すなわちc_pが 7 の倍数になるのは，同様にすると，qを 0 以上の整数として，

$4p+1=7q$ ………④

そして，④を満たす最小のp，qの値は$(p,\ q)=(5,\ 3)$であり，このときのnは，$n=49\cdot 5+13=258$となり，$a_{258}=4\cdot 258-3=1029=7^3\cdot 3$である。

このn$=258$は，$7l-1=258$から$l=37$となり，上記の数列の第 6 群に属することがわかる。

さて，積$a_1a_2\cdots a_n$が7^{45}の倍数となる最小の自然数 n については，素因数 7 の個数に注目し，これが合計 45 個以上となる最小の n を考えればよい。

まず，第 5 群まではa_nに7^3の倍数がないので，1 つの群内に素因数 7 が$7+1=8$個ずつとなり，その総数は$8\times5=40$個である。

すると，素因数 7 の残り 5 個について調べるために，第 6 群を書き並べると，

$$|\ 251,\ \underline{258},\ 265,\ 272,\ \cdots\cdots$$

これより，a_{251}は 7 の倍数，a_{258}は7^3の倍数，a_{265}は 7 の倍数，…となるので，積$a_{251}a_{258}a_{265}$に素因数 7 が 5 個あることがわかる。

以上より，積$a_1a_2\cdots a_n$が7^{45}の倍数となる最小の自然数 n は，$n=265$である。

［解 説］

整数と数列の融合問題です。解答例では，頻出の(1)の結果を利用して，(2)につなげています。なお，(3)は群数列の考え方をもとにしていますが，45 という数値が意味深長で，詰めがかなり面倒でした。

$\boxed{23}$ ［名古屋大・文］

(1) 条件(＊)から，自然数a，b，cに対し，$a<b<c$かつ$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$………①

すると，$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{c}>0$となるので，①から$\dfrac{3}{a}>\dfrac{1}{2}$，すなわち$a<6$………②

また，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}>0$なので，①から$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{2}$，すなわち$a>2$………③

②③より$2<a<6$となり，$a=3,\ 4,\ 5$である。

(i) $a=3$のとき　①より$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$から，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{6}$となり，

$bc-6b-6c=0$，$(b-6)(c-6)=36$

ここで，$3<b<c$から$-3<b-6<c-6$となり，

$(b-6,\ c-6)=(1,\ 36)$，$(2,\ 18)$，$(3,\ 12)$，$(4,\ 9)$

よって，$(b,\ c)=(7,\ 42)$，$(8,\ 24)$，$(9,\ 18)$，$(10,\ 15)$

(ii) $a=4$のとき　①より$\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$から，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{4}$となり，

$bc-4b-4c=0$，$(b-4)(c-4)=16$

ここで，$4<b<c$から$0<b-4<c-4$となり，

$(b-4,\ c-4)=(1,\ 16)$，$(2,\ 8)$

よって，$(b,\ c)=(5,\ 20)$，$(6,\ 12)$

(iii) $a=5$のとき　①より$\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$から，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{3}{10}$となり，

$3bc-10b-10c=0$，$9bc-30b-30c=0$，$(3b-10)(3c-10)=100$

$5<b<c$から$5<3b-10<3c-10$となり，適する$(3b-10,\ 3c-10)$はない。

(i)～(iii)より，自然数の組$(a,\ b,\ c)$は，

$(a,\ b,\ c)=(3,\ 7,\ 42)$，$(3,\ 8,\ 24)$，$(3,\ 9,\ 18)$，$(3,\ 10,\ 15)$，

$(4,\ 5,\ 20)$，$(4,\ 6,\ 12)$

(2) $2n$の正の約数 p，q，r に対し，$p>q>r$かつ$p+q+r=n$……④を満たす$(p,\ q,\ r)$の個数を$f(n)$とすると，④から，

$\dfrac{p}{2n}+\dfrac{q}{2n}+\dfrac{r}{2n}=\dfrac{1}{2}$………⑤

ここで，$\dfrac{2n}{p}=a$，$\dfrac{2n}{q}=b$，$\dfrac{2n}{r}=c$とおくと，a，b，cは自然数となり，さらに，$p>q>r$から，$\dfrac{2n}{p}<\dfrac{2n}{q}<\dfrac{2n}{r}$すなわち$a<b<c$である。

さらに，⑤をa，b，cで表すと，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$である。

すなわち，自然数の組$(p,\ q,\ r)$は，条件(＊)を満たす自然数の組$(a,\ b,\ c)$に対応し，その個数$f(n)$の最大値Mは，(1)の結果から$M\leqq 6$である。

以下，この 6 つの場合について，n の条件を求める。

(i)　$(a,\ b,\ c)=(3,\ 7,\ 42)$ のとき　$\dfrac{2n}{p}=3$，$\dfrac{2n}{q}=7$，$\dfrac{2n}{r}=42$ より，

$$3p=2n,\ 7q=2n,\ 21r=n$$

よって，このとき n は 21 の倍数である。

(ii)　$(a,\ b,\ c)=(3,\ 8,\ 24)$ のとき　$\dfrac{2n}{p}=3$，$\dfrac{2n}{q}=8$，$\dfrac{2n}{r}=24$ より，

$$3p=2n,\ 4q=n,\ 12r=n$$

よって，このとき n は 12 の倍数である。

(iii)　$(a,\ b,\ c)=(3,\ 9,\ 18)$ のとき　$\dfrac{2n}{p}=3$，$\dfrac{2n}{q}=9$，$\dfrac{2n}{r}=18$ より，

$$3p=2n,\ 9q=2n,\ 9r=n$$

よって，このとき n は 9 の倍数である。

(iv)　$(a,\ b,\ c)=(3,\ 10,\ 15)$ のとき　$\dfrac{2n}{p}=3$，$\dfrac{2n}{q}=10$，$\dfrac{2n}{r}=15$ より，

$$3p=2n,\ 5q=n,\ 15r=2n$$

よって，このとき n は 15 の倍数である。

(v)　$(a,\ b,\ c)=(4,\ 5,\ 20)$ のとき　$\dfrac{2n}{p}=4$，$\dfrac{2n}{q}=5$，$\dfrac{2n}{r}=20$ より，

$$2p=n,\ 5q=2n,\ 10r=n$$

よって，このとき n は 10 の倍数である。

(vi)　$(a,\ b,\ c)=(4,\ 6,\ 12)$ のとき　$\dfrac{2n}{p}=4$，$\dfrac{2n}{q}=6$，$\dfrac{2n}{r}=12$ より，

$$2p=n,\ 3q=n,\ 6r=n$$

よって，このとき n は 6 の倍数である。

(i)～(vi)より，自然数 n が上記の条件をすべて満たすとき $M=6$ となる。

ここで，$21=3\times7$，$12=2^2\times3$，$9=3^2$，$15=3\times5$，$10=2\times5$，$6=2\times3$ から，n が $2^2\times3^2\times5\times7=1260$ の倍数のとき，条件をすべて満たす。

以上より，$M=6$ で，$f(n)=6$ となる最小の n は $n=1260$ である。

［解　説］

質，量ともにかなりハードな整数問題です。ただ，(1)が(2)への秀逸な誘導となっており，入試までに演習したい 1 題です。なお，(1)は，場合分けしたあと分母を払って因数分解をしていますが，不等式を用いて評価しても構いません。

24　　［九州大・文］

(1)　mod7 で記すと $2^3\equiv 1$ から，2^n を 7 で割った余り r は，k を 0 以上の整数として，

(i)　$n=3k+1$ のとき　$2^{3k+1}=(2^3)^k\cdot 2\equiv 1^k\cdot 2\equiv 2$ より，$r=2$

(ii)　$n=3k+2$ のとき　$2^{3k+2}=(2^3)^k\cdot 4\equiv 1^k\cdot 4\equiv 4$ より，$r=4$

(iii)　$n=3k+3$ のとき　$2^{3k+3}=(2^3)^{k+1}\equiv 1^{k+1}\equiv 1$ より，$r=1$

(2)　$m=101101101101101101_{(2)}$ を 10 進法で表し，mod7 で記すと，

$$m=1+2^2+2^3+2^5+2^6+2^8+2^9+2^{11}+2^{12}+2^{14}+2^{15}+2^{17}$$

$$\equiv 1+4+1+4+1+4+1+4+1+4+1+4=30\equiv 2$$

したがって，m を 7 で割った余りは 2 である。

［解　説］

基本的な整数問題です。いろいろな記述方法が考えられますが，解答例では合同式を用いました。

$\boxed{25}$ ［京都大］

以下，mod3 で記すと，$9\equiv 0$ に注意して,

(i)　$n\equiv 0$ のとき　$n^3-7n+9\equiv 0-0+0=0$

(ii)　$n\equiv 1$ のとき　$n^3-7n+9\equiv 1-7+0=-6\equiv 0$

(iii)　$n\equiv 2$ のとき　$n^3-7n+9\equiv 8-14+0=-6\equiv 0$

(i)～(iii)より，n^3-7n+9 はつねに 3 の倍数である。

すると，n^3-7n+9 が素数となるのは，$n^3-7n+9=3$ の場合だけであり，

$$n^3-7n+6=0\,,\ (n-1)(n-2)(n+3)=0$$

以上より，求める整数 n は，$n=1,\ 2,\ -3$ である。

［解 説］

まず，n^3-7n+9 の因数分解を考えたところうまくいかなかったため，次の手は，$n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \cdots$ として実験です。すると，すべて 3 の倍数になることがわかり……。

$\boxed{26}$ ［名古屋大・文］

(1)　整数α，βの少なくとも一方が奇数のとき，次の 3 つの場合に分けて調べる。

(i)　α，βがともに奇数のとき

α^2，$\alpha\beta$，β^2はすべて奇数より，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$は奇数である。

(ii)　αが偶数，βが奇数のとき

α^2，$\alpha\beta$は偶数，β^2は奇数より，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$は奇数である。

(iii)　αが奇数，βが偶数のとき

α^2は奇数，$\alpha\beta$，β^2は偶数より，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$は奇数である。

(i)～(iii)より，いずれの場合も$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$は奇数である。

(2)　条件より，奇数nに対して，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=2n$ ………①

まず，(1)より，整数α，βの少なくとも一方が奇数のとき，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$は奇数となるので，①は成立しない。

これより，①を満たす整数α，βは，ともに偶数である。

しかし，α，βがともに偶数のとき，α^2，$\alpha\beta$，β^2はすべて 4 の倍数となり，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$は 4 の倍数である。よって，①は成立しない。

以上より，①を満たす整数α，βは存在しない。

(3)　3 次方程式$x^3-2018x+c=0$（cは実数）の解を，$x=\alpha$，β，γとおくと，

$$\alpha+\beta+\gamma=0\ \cdots\cdots\text{②},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2018\ \cdots\cdots\text{③}$$

②より$\gamma=-(\alpha+\beta)$となり，③に代入すると，

$$\alpha\beta-(\alpha+\beta)^2=-2018,\quad \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=2018\ \cdots\cdots\text{④}$$

ここで，$2018=2\times1009$なので，(2)から④を満たす整数α，βは存在しない。

すなわち，α，β，γのうち整数となるのは 1 個以下である。

［解　説］

細かく誘導のついた整数問題です。方針に迷うことはないでしょう。

$\boxed{27}$　　　　［東北大・理］

(1) 整数 a, b に対して，$3^a - 2^b = 1$……①より，$3^a = 2^b + 1$………②

すると，$3^a = 2^b + 1 > 1$ となるので，$a \geqq 1$ であり，このとき①より，

$$2^b = 3^a - 1 \geqq 3^1 - 1 = 2$$

よって，$b \geqq 1$ であり，a, b はともに正となる。

(2) $b > 1$ すなわち $b \geqq 2$ のとき，2^b が 4 の倍数であることに着目して，以下，$\mathrm{mod}\,4$ で記述すると，②の右辺は $2^b + 1 \equiv 1$ である。

ここで，k を自然数として a を偶奇に分け，$9 \equiv 1$ に注意すると，

(i) $a = 2k$ のとき　$3^a = 3^{2k} = 9^k \equiv 1^k \equiv 1$

(ii) $a = 2k-1$ のとき　$3^a = 3^{2(k-1)+1} = 9^{k-1}\cdot 3 \equiv 1^{k-1}\cdot 3 \equiv 3$

(i)(ii)より，②が成り立つのは，a が偶数のときである。

(3) (1)より，a, b はともに自然数なので，

(i) $b = 1$ のとき　②より $3^a = 2^1 + 1 = 3$ となり，$a = 1$ である。

(ii) $b \geqq 2$ のとき　(2)より $a = 2k$ となり，②より，

$$3^{2k} = 2^b + 1,\ (3^k - 1)(3^k + 1) = 2^b\ \cdots\cdots\cdots ③$$

ここで，$(3^k + 1) - (3^k - 1) = 2$ であり，さらに 2^b の約数が $1,\ 2,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^b$ であることに着目すると，③より，

$$3^k - 1 = 2,\ 3^k + 1 = 2^2$$

これより，$k = 1$ から $a = 2$ となり，また $2\cdot 2^2 = 2^b$ から $b = 3$ である。

(i)(ii)より，$(a,\ b) = (1,\ 1),\ (2,\ 3)$

［解　説］

整数問題に誘導がついているものの，それがアバウトなタイプです。そのため，方針を決めるのに試行錯誤が必要になります。

$\boxed{28}$ ［千葉大・文］

(1) 初項 1, 公差 6 である等差数列$\{a_n\}$について，$a_n=1+6(n-1)=6n-5$

また, 初項 3, 公差 4 である等差数列$\{b_m\}$について，$b_m=3+4(m-1)=4m-1$

ここで，$\{a_n\}$，$\{b_m\}$に共通に現れる数すべてを小さい順に並べてできる数列を$\{c_k\}$とすると，$a_n=b_m$から，

$$6n-5=4m-1,\ 3n-2m=2 \cdots\cdots\cdots ①$$

①を満たす 1 つの解が$(n,\ m)=(2,\ 2)$より，$3\times2-2\times2=2\cdots\cdots\cdots$②

①②より，$3(n-2)-2(m-2)=0$，$3(n-2)=2(m-2)$

ここで, 3 と 2 は互いに素なので, jを整数として，$n-2=2j$，$m-2=3j$から,

$$n=2j+2,\ m=3j+2 \cdots\cdots\cdots ③$$

ここで，$m\geqq1$，$n\geqq1$より$j\geqq0$となるので，$k=j+1\geqq1$とおくと，③より，

$$n=2(k-1)+2=2k,\ m=3(k-1)+2=3k-1$$

よって，$\{c_k\}$の一般項は，$c_k=a_{2k}=12k-5$である。

(2) まず, $\{a_n\}$，$\{b_m\}$の少なくとも 1 つの項になっている数すべてを小さい順に並べてできる数列を$\{d_l\}$とする。ここで，$c_k=a_{2k}=b_{3k-1}$に注意して，$\{d_l\}$のd_3以降を項数 4 のグループに分け，$c_1=7$から 4 項を第 1 群，$c_2=19$から 4 項を第 2 群，$c_3=31$から 4 項を第 3 群, …と呼ぶ。

$$1,\ 3\,\Big|\,\underbrace{\underline{7},\ 11,\ 13,\ 15}_{\text{第 1 群}}\,\Big|\,\underbrace{\underline{19},\ 23,\ 25,\ 27}_{\text{第 2 群}}\,\Big|\,\underbrace{\underline{31},\ 35,\ 37,\ 39}_{\text{第 3 群}}\,\Big|\cdots\cdots$$

さて，d_{1000}が第 i 群に属するとすると，$2+4(i-1)<1000\leqq2+4i$から，$i=250$となり, 第 250 群に属する。

さらに，$1000-(2+4\times249)=2$から, 第 250 群の 2 項目となるので,

$$d_{1000}=c_{250}+4=(12\times250-5)+4=2999$$

また，d_{1001}は第 250 群の 3 項目となるので,

$$d_{1000}=c_{250}+6=(12\times250-5)+6=3001$$

［解 説］

2 つの等差数列の共通数列が題材です。(1)は頻出題ですが, (2)はあまり見かけません。解答例では，$\{c_k\}$に注目し，群数列の考え方を利用して記しました。

29　　［東京大・理］

(1)　$a_n=\dfrac{{}_{2n+1}\mathrm{C}_n}{n!}=\dfrac{{}_{2n+1}\mathrm{P}_n}{(n!)^2}=\dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2(n+1)!}$ に対して，$n\geqq 2$ のとき，

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{(2n+1)!}{(n!)^2(n+1)!}\cdot\frac{\{(n-1)!\}^2\,n!}{(2n-1)!}=\frac{(2n+1)\cdot 2n}{n\cdot(n+1)n}=\frac{2(2n+1)}{n(n+1)}=\frac{2n+1}{\dfrac{n(n+1)}{2}}$$

ここで，n と $2n+1$ の最大公約数を g_1，i と j を自然数とすると，

$n=g_1 i$，$2n+1=g_1 j$

すると，$1=g_1(j-2i)$ となり $g_1=1$，すなわち n と $2n+1$ は互いに素である。

また，$n+1$ と $2n+1$ の最大公約数を g_2，k と l を自然数とすると，

$n+1=g_2 k$，$2n+1=g_2 l$

すると，$1=g_2(2k-l)$ となり $g_2=1$，すなわち $n+1$ と $2n+1$ は互いに素である。

さらに，$n(n+1)$ が偶数であることより $\dfrac{n(n+1)}{2}$ は自然数となり，また $\dfrac{n(n+1)}{2}$ と $2n+1$ は互いに素なので，既約分数を用いて $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{q_n}{p_n}$ と表したとき，

$p_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，$q_n=2n+1$

(2)　まず，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}<1$ とすると，$2(2n+1)<n(n+1)$ から，$n^2-3n-2>0$

$n\geqq 2$ より $n>\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$ となり，n は 4 以上の整数となる。

これより，$n\geqq 4$ のとき $a_n<a_{n-1}$ となり，$a_3>a_4>a_5>\cdots>0$ であり，

$a_1=\dfrac{{}_3\mathrm{P}_1}{(1!)^2}=3$，$a_2=\dfrac{{}_5\mathrm{P}_2}{(2!)^2}=5$，$a_3=\dfrac{{}_7\mathrm{P}_3}{(3!)^2}=\dfrac{35}{6}$，$a_4=\dfrac{{}_9\mathrm{P}_4}{(4!)^2}=\dfrac{21}{4}$

$a_5=\dfrac{{}_{11}\mathrm{P}_5}{(5!)^2}=\dfrac{77}{20}$，$a_6=\dfrac{{}_{13}\mathrm{P}_6}{(6!)^2}=\dfrac{143}{60}$，$a_7=\dfrac{{}_{15}\mathrm{P}_7}{(7!)^2}=\dfrac{143}{112}$

$a_8=\dfrac{{}_{17}\mathrm{P}_8}{(8!)^2}=\dfrac{2413}{4032}<1$

よって，$1>a_8>a_9>\cdots>0$ となるので，a_n が整数となるのは $n=1,\ 2$ である。

［解　説］

二項係数を題材にした数列の問題です。誘導の丁寧な類題が文系で出ており，それに引きずられた解法です。数値計算は少し面倒でした。漸化式を利用してもよかったのですが。