1　　［大阪大・文］

平面上に長さ 2 の線分 AB を直径とする円 C がある。2 点 A, B を除く C 上の点 P に対し，AP＝AQ となるように線分 AB 上の点 Q をとる。また，直線 PQ と円 C の交点のうち，P でない方を R とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　△AQR の面積を $\theta = \angle\mathrm{PAB}$ を用いて表せ。

(2)　点 P を動かして△AQR の面積が最大になるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を用いて表せ。

２　　　　［北海道大・文］

平面において，一直線上にない 3 点 O，A，B がある。O を通り直線 OA と垂直な直線上に O と異なる点 P をとる。O を通り直線 OB と垂直な直線上に O と異なる点 Q をとる。ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$は$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$に垂直であるとする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$を示せ。

(2)　ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$のなす角を$\alpha$とする。ただし，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$とする。このときベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$のなす角が$\pi-\alpha$であることを示せ。

(3)　$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$を示せ。

$\boxed{3}$ ［一橋大］

xyz 空間において，原点を中心とする xy 平面上の半径 1 の円周上を点 P が動き，点 $(0,\ 0,\ \sqrt{3})$ を中心とする xz 平面上の半径 1 の円周上を点 Q が動く。

(1) 線分 PQ の長さの最小値と，そのときの点 P, Q の座標を求めよ。

(2) 線分 PQ の長さの最大値と，そのときの点 P, Q の座標を求めよ。

4 ［京都大・文］

xyz 空間の中で，$(0,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径 1 の球面 S を考える。点 Q が $(0,\ 0,\ 2)$ 以外の S 上の点を動くとき，点 Q と点 $\mathrm{P}(1,\ 0,\ 2)$ の 2 点を通る直線 l と平面 $z=0$ との交点を R とおく。R の動く範囲を求め，図示せよ。

$\boxed{5}$ ［北海道大・文］

$\triangle$ABC が，AB$=2$，AC$=1+\sqrt{3}$，$\angle$ACB$=45^\circ$ を満たすとする。

(1)　$\beta=\angle$ABC とおくとき，$\sin\beta$ および $\cos 2\beta$ の値を求めよ。

(2)　(1)の β の値をすべて求めよ。

(3)　$\triangle$ABC の外接円の中心を O とする。$\triangle$ABC が鋭角三角形であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす実数 $s,\ t$ を求めよ。

$\boxed{6}$　　　　［京都大・文］

四面体 OABC が次の条件を満たすならば，それは正四面体であることを示せ。

条件：頂点 A，B，C からそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は対面の重心を通る。

ただし，四面体のある頂点の対面とは，その頂点を除く他の 3 つの頂点がなす三角形のことをいう。

$\boxed{7}$ ［東北大］

s を正の実数とする。鋭角三角形 ABC において，辺 AB を $s:1$ に内分する点を D とし，辺 BC を $s:3$ に内分する点を E とする。線分 CD と線分 AE の交点を F とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とするとき，α と β を求めよ。

(2) F から辺 AC に下ろした垂線を FG とする。FG の長さが最大となるときの s を求めよ。

8 ［千葉大］

n を 4 以上の整数とする。座標平面上で正 n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ は点 O を中心とする半径 1 の円に内接している。$\vec{a}=\overrightarrow{OA_1}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OA_2}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OA_3}$，$\vec{d}=\overrightarrow{OA_4}$ とし，$k=2\cos\dfrac{2\pi}{n}$ とおく。そして，線分 A_1A_3 と線分 A_2A_4 との交点 P は線分 A_1A_3 を $t:1-t$ に内分するとする。

(1) $\vec{a}$ および $\vec{d}$ を，$\vec{b}$，$\vec{c}$，k を用いて表せ。

(2) t を k を用いて表し，$\dfrac{1}{2}\leqq t<\dfrac{3}{4}$ を示せ。

(3) 不等式 $\dfrac{\triangle PA_2A_3}{\triangle A_1A_2A_4}>\dfrac{1}{12}$ を示せ。

$\boxed{9}$ ［東京大・文］

1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF が与えられている。点 P が辺 AB 上を，点 Q が辺 CD 上をそれぞれ独立に動くとき，線分 PQ を 2 : 1 に内分する点 R が通りうる範囲の面積を求めよ。

10　　［京都大・文］

座標空間において原点 O と点 A$(0,\ -1,\ 1)$ を通る直線を l とし，点 B$(0,\ 2,\ 1)$ と点 C$(-2,\ 2,\ -3)$ を通る直線を m とする。l 上の 2 点 P，Q と，m 上の点 R を△PQR が正三角形となるようにとる。このとき，△PQR の面積が最小となるような P，Q，R の座標を求めよ。

$\boxed{11}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京医歯大］

xyz 空間において，点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ と点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$ を結ぶ線分 OA を直径にもつ球面を σ とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　球面 σ の方程式を求めよ。

(2)　xy 平面上にあって O と異なる点 P に対して，線分 AP と球面 σ との交点を Q とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を示せ。

(3)　点 $\mathrm{S}(p,\ q,\ r)$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AS}}=-\left|\overrightarrow{\mathrm{OS}}\right|^2$ を満たす，xy 平面上にない定点とする。σ 上の点 Q が $\overrightarrow{\mathrm{OS}}\perp\overrightarrow{\mathrm{SQ}}$ を満たしながら動くとき，直線 AQ と xy 平面との交点 P はどのような図形を描くか。$p,\ q,\ r$ を用いて答えよ。

$\boxed{12}$　　［千葉大・理］

正方形 ABCD の辺を除く内部に，$\mathrm{PA}\perp\mathrm{PB}$を満たす点 P がある。ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$を$x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+y\overrightarrow{\mathrm{PB}}$と表すとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}$とするとき，$x, y$を$\alpha$を用いて表せ。

(2)　点 P が題意の条件を満たしながら動くとき，(1)で求めた x，y の和$x+y$の最大値を求め，そのときの P がどのような点かを答えよ。

$\boxed{13}$ ［京都大］

四面体 ABCD は $\mathrm{AC}=\mathrm{BD}$，$\mathrm{AD}=\mathrm{BC}$ を満たすとし，辺 AB の中点を P，辺 CD の中点を Q とする。

(1) 辺 AB と線分 PQ は垂直であることを示せ。

(2) 線分 PQ を含む平面 α で四面体 ABCD を切って 2 つの部分に分ける。このとき，2 つの部分の体積は等しいことを示せ。