1　　［広島大］

座標平面上の点 $\mathrm{P}(1,\ 1)$ を中心とし，原点 O を通る円を C_1 とする。k を正の定数として，曲線 $y=\dfrac{k}{x}\ (x>0)$ を C_2 とする。C_1 と C_2 は 2 点で交わるとし，その交点を Q，R とするとき，直線 PQ は x 軸に平行であるとする。点 Q の x 座標を q とし，点 R の x 座標を r とする。次の問いに答えよ。

(1)　$k,\ q,\ r$ の値を求めよ。

(2)　曲線 C_2 と線分 OQ, OR で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(3)　$x=1+\sqrt{2}\sin\theta$ とおくことにより，定積分 $\displaystyle\int_r^q \sqrt{2-(x-1)^2}\,dx$ の値を求めよ。

(4)　円 C_1 の原点 O を含まない弧 QR と曲線 C_2 で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

2 ［千葉大］

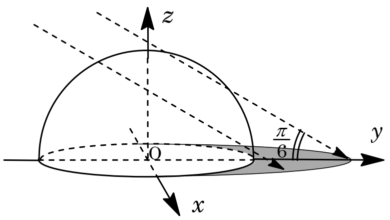
平面上に 2 つの円 $C_1 : x^2+y^2=1$，$C_2 : \left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$ があり，点 $(-1,\ 0)$ で接している。

点 P_1 は C_1 上を反時計まわりに一定の速さで動き，点 P_2 は C_2 上を反時計まわりに一定の速さで動く。2 点 P_1，P_2 はそれぞれ点 $(1,\ 0)$ および点 $(-1,\ 0)$ を時刻 0 に同時に出発する。P_1 は C_1 を一周して時刻 2π に点 $(1,\ 0)$ に戻り，P_2 は C_2 を二周して時刻 2π に点 $(-1,\ 0)$ に戻るものとする。P_1 と P_2 の中点を M とおく。

P_1 が C_1 を一周するときの点 M の軌跡の概形を図示して，その軌跡によって囲まれる図形の面積を求めよ。

３　　　　［九州大］

　座標空間内に，原点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の球がある。右の概略図のように，y 軸の負の方向から仰角 $\dfrac{\pi}{6}$ で太陽光線が当たっている。この太陽光線はベクトル $(0,\ \sqrt{3},\ -1)$ に平行である。球は光を通さないものとする。以下の問いに答えよ。



(1)　球の $z \geqq 0$ の部分が xy 平面上につくる影を考える。k を $-1<k<1$ を満たす実数とするとき，xy 平面上の直線 $x=k$ において，球の外で光が当たらない部分の y 座標の範囲を k を用いて表せ。

(2)　xy 平面上において，球の外で光が当たらない部分の面積を求めよ。

(3)　$z \geqq 0$ において，球の外で光が当たらない部分の体積を求めよ。

$\boxed{4}$ ［大阪大］

座標空間の x 軸上に動点 P, Q がある。P, Q は時刻 0 において，原点を出発する。P は x 軸の正の方向に，Q は x 軸の負の方向に，ともに速さ 1 で動く。その後，ともに時刻 1 で停止する。点 P, Q を中心とする半径 1 の球をそれぞれ A, B とし，空間で $x \geqq -1$ の部分を C とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 時刻 t $(0 \leqq t \leqq 1)$ における立体 $(A \cup B) \cap C$ の体積 $V(t)$ を求めよ。

(2) $V(t)$ の最大値を求めよ。

5　　［東京工大］

$a>0$ とする。曲線 $y=e^{-x^2}$ と x 軸，y 軸，および直線 $x=a$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を A とする。

(1)　A の体積 V を求めよ。

(2)　点 $(t,\ 0)$ $(-a\leqq t\leqq a)$ を通り x 軸と垂直な平面による A の切り口の面積を $S(t)$ とするとき，不等式 $S(t)\leqq\int_{-a}^{a}e^{-(s^2+t^2)}\,ds$ を示せ。

(3)　不等式 $\sqrt{\pi\left(1-e^{-a^2}\right)}\leqq\int_{-a}^{a}e^{-x^2}\,dx$ を示せ。

$\boxed{6}$ ［熊本大］

$x \geqq 1$ で定義された関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$x \geqq 1$ における $f(x)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ。

(2)　(1)で求めた x の値を a とする。曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $y=0$，$x=a$ で囲まれた図形を D とする。D の面積を求めよ。

(3)　(2)の図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

７　　［信州大］

半直線 $l : y = x\ (x \geqq 0)$，放物線 $C : y = \dfrac{\sqrt{2}}{4}x^2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　放物線 C と半直線 l が接する点の座標を求めよ。

(2)　$t \geqq 0$ とする。原点からの距離が t である l 上の点を $\mathrm{A}(t)$ とするとき，$\mathrm{A}(t)$ を通り l に直交する直線と，放物線 C の共有点の座標を t を用いて表せ。

(3)　放物線 C と半直線 l および y 軸とで囲まれた図形を，半直線 l のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

8　　　　［京都大］

xyz 空間において，平面 $y=z$ の中で，$|x| \leqq \dfrac{e^y+e^{-y}}{2}-1$，$0 \leqq y \leqq \log a$ で与えられる図形 D を考える。ただし a は 1 より大きい定数とする。

この図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

9　　　　［神戸大］

極方程式で表された xy 平面上の曲線 $r=1+\cos\theta\ (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ を C とする。以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C 上の点を直交座標 $(x,\ y)$ で表したとき，$\dfrac{dx}{d\theta}=0$ となる点，および $\dfrac{dy}{d\theta}=0$ となる点の直交座標を求めよ。

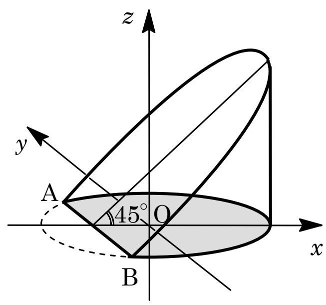
(2) $\displaystyle\lim_{\theta\to\pi}\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

(3) 曲線 C の概形を xy 平面上にかけ。

(4) 曲線 C の長さを求めよ。

$\boxed{10}$ ［広島大］

座標空間内の平面$H : z=0$とその上の曲線$C : \dfrac{x^2}{4}+y^2=1$を考える。C上の点を通り z 軸に平行な直線の全体が作る曲面を K とする。C 上の 2 点$\mathrm{A}\left(-1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{B}\left(-1,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$に対し，線分 AB を含み平面$H$と$45^\circ$の角をなす平面を$T$とする。ただし，平面 T と z 軸の交点の z 座標は正であるとする。平面 H, 平面 T および曲面 K が囲む 2 つの立体のうち z 軸と交わるものを V とする。次の問いに答えよ。



(1)　立体 V と平面 H の共通部分（右図で灰色で示される部分）の面積を求めよ。

(2)　立体 V を平面$x=t$ $(-1<t<2)$で切ったとき，断面の面積$S(t)$を t を用いて表せ。

(3)　立体 V の体積を求めよ。

11　　　　　　　　［岡山大］

座標空間内の 4 点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(-1,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ 1,\ \sqrt{2})$, $\mathrm{D}(0,\ -1,\ \sqrt{2})$ を頂点とする四面体 ABCD を考える。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ t)$ を通り z 軸に垂直な平面と，辺 AC が点 Q において交わるとする。Q の座標を t で表せ。

(2) 四面体 ABCD（内部を含む）を z 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{12}$ ［大阪大］

xy 平面上で放物線 $y=x^2$ と直線 $y=2$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を L とおく。回転体 L に含まれる点のうち，xy 平面上の直線 $x=1$ からの距離が 1 以下のもの全体がつくる立体を M とおく。

(1) t を $0\leqq t\leqq 2$ を満たす実数とする。xy 平面上の点 $(0,\ t)$ を通り，y 軸に直交する平面による M の切り口の面積を $S(t)$ とする。$t=(2\cos\theta)^2\left(\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，$S(t)$ を θ を用いて表せ。

(2) M の体積 V を求めよ。

13　　［東京大］

点 O を原点とする座標空間内で，1 辺の長さが 1 の正三角形 OPQ を動かす。また，点 A$(1,\ 0,\ 0)$ に対して，$\angle$AOP を θ とおく。ただし $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

(1)　点 Q が $(0,\ 0,\ 1)$ にあるとき，点 P の x 座標がとりうる値の範囲と，θ がとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　点 Q が平面 $x=0$ 上を動くとき，辺 OP が通過しうる範囲を K とする。K の体積を求めよ。

14　　［東京医歯大］

関数 $f(x)=x-\log(1+x)$ について，以下の各問いに答えよ。ここで log は自然対数を表す。また $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\log x}{x}=0$ を用いてよい。

(1)　p を実数とするとき，$f(x)=p$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

以下，$f(x)$ の定義域を $x\geqq 0$ に制限した関数の逆関数を $g(x)$ とする。

(2)　u を正の実数とする。$p\geqq 0$ のとき，

$$p\leqq g(p)\leqq \frac{u+1}{u}\{p-u+\log(u+1)\}+u$$

を示せ。

(3)　p を正の実数とし，xy 平面において，曲線 $y=g(x)$ と直線 $x=p$ の交点を通り，直線 $y=x$ に平行な直線を l とする。また，l と x 軸および曲線 $y=g(x)$ によって囲まれた図形の面積を S とする。このとき，S を p を用いて表せ。

15 ［大阪大］

2 つの関数 $f(t)=2\sin t+\cos 2t$，$g(t)=2\cos t+\sin 2t$ を用いて定義される座標平面上の曲線

$$C : x=f(t),\ y=g(t)\ \left(0\leqq t\leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

を考える。

(1) t が $0\leqq t\leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，$f(t)$ および $g(t)$ の最大値を求めよ。

(2) t_1，t_2 を $0\leqq t_1<t_2\leqq \frac{\pi}{2}$ かつ $f(t_1)=f(t_2)$ を満たす実数とする。このとき，$g(t_1)^2-g(t_2)^2>0$ が成り立つことを示せ。

(3) C と直線 $x=1$ が囲む領域の面積 S を求めよ。

16　　［神戸大］

座標空間において，O を原点とし，A(2, 0, 0)，B(0, 2, 0)，C(1, 1, 0) とする。△OAB を直線 OC のまわりに 1 回転してできる回転体を L とする。以下の問いに答えよ。

(1) 直線 OC 上にない点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ から直線 OC に下ろした垂線を PH とする。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{HP}}$ を x, y, z の式で表せ。

(2) $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ が L 上の点であるための条件は，$z^2 \leqq 2xy$ かつ $0 \leqq x+y \leqq 2$ であることを示せ。

(3) $1 \leqq a \leqq 2$ とする。L を平面 $x=a$ で切った切り口の面積 $S(a)$ を求めよ。

(4) 立体 $\{(x,\ y,\ z) \mid (x,\ y,\ z) \in L,\ 1 \leqq x \leqq 2\}$ の体積を求めよ。

$\boxed{17}$ ［東北大］

xy 平面内の図形

$$S : \begin{cases} x+y^2 \leqq 2 \\ x+y \leqq 0 \\ x-y \leqq 2 \end{cases}$$

を考える。図形 S を直線 $y=-x$ のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を V とする。

(1) S を xy 平面に図示せよ。

(2) V を求めよ。