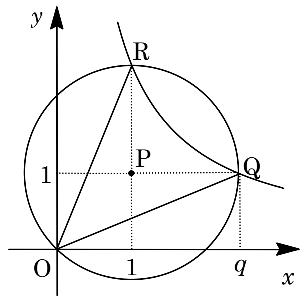
1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［広島大］

(1)　円 C_1 は中心 P(1, 1)，半径は $\sqrt{2}$ から，

$$C_1 : (x-1)^2+(y-1)^2=2 \cdots\cdots\cdots ①$$

また，C_1 と $C_2 : y=\dfrac{k}{x}\ (x>0) \cdots\cdots ②$ は点 Q，R で交わり，PQ は x 軸に平行であることより，Q$(1+\sqrt{2},\ 1)$ となる。これより，$q=1+\sqrt{2}$ である。そして，C_2 が点 Q を通ることより，②から $k=(1+\sqrt{2})\cdot 1=1+\sqrt{2}$ である。



さらに，C_1，C_2 がともに直線 $y=x$ について対称なので R$(1,\ 1+\sqrt{2})$ となり，$r=1$ である。

(2)　C_2 と線分 OQ, OR で囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+\sqrt{2})+\int_1^{1+\sqrt{2}}\frac{1+\sqrt{2}}{x}dx-\frac{1}{2}\cdot(1+\sqrt{2})\cdot 1$$
$$=(1+\sqrt{2})\big[\log x\big]_1^{1+\sqrt{2}}=(1+\sqrt{2})\log(1+\sqrt{2})$$

(3)　$I=\displaystyle\int_r^q\sqrt{2-(x-1)^2}\,dx$ に対して，$x=1+\sqrt{2}\sin\theta$ とおくと，

$$I=\int_1^{1+\sqrt{2}}\sqrt{2-(x-1)^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2-2\sin^2\theta}\cdot\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta=\Big[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

(4)　円 C_1 の $y\geqq 1$ の部分は，①より $y=1+\sqrt{2-(x-1)^2}$ となる。

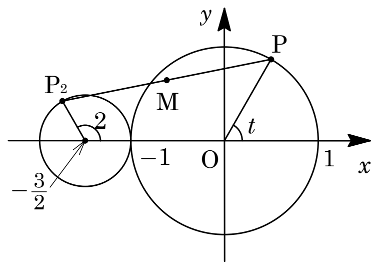
すると，求める回転体の体積 V は，

$$V=\pi\int_1^{1+\sqrt{2}}\big(1+\sqrt{2-(x-1)^2}\,\big)^2dx-\pi\int_1^{1+\sqrt{2}}\frac{(1+\sqrt{2})^2}{x^2}dx$$
$$=\pi\int_1^{1+\sqrt{2}}\Big\{3-(x-1)^2+2\sqrt{2-(x-1)^2}\Big\}dx-(1+\sqrt{2})^2\pi\int_1^{1+\sqrt{2}}\frac{1}{x^2}dx$$
$$=\pi\Big[3x-\frac{1}{3}(x-1)^3\Big]_1^{1+\sqrt{2}}+2\pi I-(1+\sqrt{2})^2\pi\Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^{1+\sqrt{2}}$$
$$=\Big(3\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\Big)\pi+2\pi\cdot\frac{\pi}{2}-(1+\sqrt{2})^2\Big(-\frac{1}{1+\sqrt{2}}+1\Big)\pi$$
$$=\frac{7\sqrt{2}}{3}\pi+\pi^2-\sqrt{2}(1+\sqrt{2})\pi=\Big(\frac{4\sqrt{2}}{3}-2\Big)\pi+\pi^2$$

［解　説］

定積分による求積問題です。誘導つきで計算量も標準的です。なお，(2)はよく見かけるものです。

2　　［千葉大］



C_1 は原点中心で半径 1 の円，C_2 は点$\left(-\dfrac{3}{2},\ 0\right)$中心で半径$\dfrac{1}{2}$の円である。このとき，時刻 $t=0$ から $t=2\pi$ において，点 $\mathrm{P_1}$ は C_1 上を点 $(1,\ 0)$ から反時計まわりに一周，点 $\mathrm{P_2}$ は C_2 上を点 $(-1,\ 0)$ から反時計まわりに二周することから，$\mathrm{P_1}(\cos t,\ \sin t)$

$$\mathrm{P_2}\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t,\ \frac{1}{2}\sin 2t\right)$$

すると，$\mathrm{P_1}$ と $\mathrm{P_2}$ の中点 $\mathrm{M}(x,\ y)$ は，

$$x=\frac{1}{2}\left(\cos t-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)=\frac{1}{4}\cos 2t+\frac{1}{2}\cos t-\frac{3}{4}$$

$$y=\frac{1}{2}\left(\sin t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)=\frac{1}{4}\sin 2t+\frac{1}{2}\sin t$$

さて，$x=f(t)$，$y=g(t)$ とおくと，$f(2\pi-t)=f(t)$，$g(2\pi-t)=-g(t)$

これより，点 M の軌跡について，$0\leqq t\leqq\pi$ の部分と $\pi\leqq t\leqq 2\pi$ の部分は x 軸について対称となる。以下，$0\leqq t\leqq\pi$ の場合について，軌跡の概形を調べる。

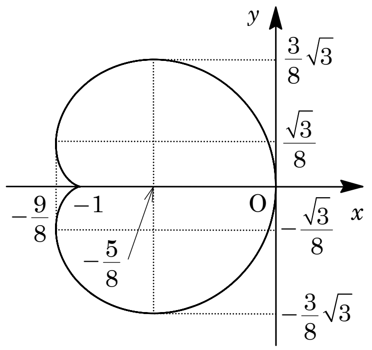
$$\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{2}\sin 2t-\frac{1}{2}\sin t=-\sin\frac{3}{2}t\cos\frac{t}{2}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{2}\cos t=\cos\frac{3}{2}t\cos\frac{t}{2}$$

t の値の変化に伴う x, y の値の変化は右表のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$	0	$-$		$-$	0	$+$	0
x	0	↘	$-\frac{5}{8}$	↘	$-\frac{9}{8}$	↗	-1
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$		$-$	0
y	0	↗	$\frac{3}{8}\sqrt{3}$	↘	$\frac{\sqrt{3}}{8}$	↘	0

さらに，この $0\leqq t\leqq\pi$ における曲線を x 軸対称し，もとの曲線と合わせた曲線が，求める点 M の軌跡である。図示すると，右図のようになる。



また，M の軌跡によって囲まれる図形の面積 S は，$0\leqq t\leqq\frac{2}{3}\pi$ の曲線部分を $y=y_1$，$\frac{2}{3}\pi\leqq t\leqq\pi$ の曲線部分を $y=y_2$ とおくと，

$$S=2\int_{-\frac{9}{8}}^{0}y_1\,dx-2\int_{-\frac{9}{8}}^{-1}y_2\,dx$$

$$=2\int_{\frac{2}{3}\pi}^{0}g(t)f'(t)dt-2\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}g(t)f'(t)dt=2\int_{\pi}^{0}g(t)f'(t)dt$$

ここで，$g(t)=\dfrac{1}{4}(\sin 2t+2\sin t)$，$f'(t)=-\dfrac{1}{2}(\sin 2t+\sin t)$ から，

$$S=2\int_{\pi}^{0}-\frac{1}{8}(\sin 2t+2\sin t)(\sin 2t+\sin t)\,dt$$
$$=\frac{1}{4}\int_{0}^{\pi}(\sin^2 2t+3\sin 2t\sin t+2\sin^2 t)\,dt$$
$$=\frac{1}{8}\int_{0}^{\pi}(1-\cos 4t-3\cos 3t+3\cos t+2-2\cos 2t)\,dt$$
$$=\frac{1}{8}\int_{0}^{\pi}(3-\cos 4t-3\cos 3t-2\cos 2t+3\cos t)\,dt$$
$$=\frac{1}{8}\Big[\,3t-\frac{\sin 4t}{4}-\sin 3t-\sin 2t+3\sin t\,\Big]_{0}^{\pi}=\frac{3}{8}\pi$$

［解 説］

パラメータ曲線についての微積分です。方針は明確に決まりますが，この問題のように計算量が多いのが，その特徴です。そのため，対称性を把握して，記述量を減らすことがポイントになります。

３　　　　［九州大］

(1)　xy 平面上の点 $(x_0,\ y_0,\ 0)$ を通り，方向ベクトル $(0,\ \sqrt{3},\ -1)$ の直線は，

$$(x,\ y,\ z)=(x_0,\ y_0,\ 0)+t(0,\ \sqrt{3},\ -1)\ \ (t\text{ は実数})\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，原点を中心とする半径 1 の球は，$x^2+y^2+z^2=1\cdots\cdots\cdots②$

①②を連立すると，$x_0{}^2+(y_0+\sqrt{3}t)^2+(-t)^2=1$

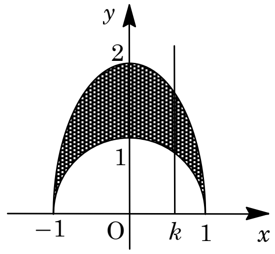
$$4t^2+2\sqrt{3}y_0t+x_0{}^2+y_0{}^2-1=0\cdots\cdots\cdots③$$

条件より，①と②が $z\geqq 0$ すなわち $-t\geqq 0\ (t\leqq 0)$ で接することより，

$$D/4=3y_0{}^2-4(x_0{}^2+y_0{}^2-1)=0\cdots\cdots④,\ \ -\frac{\sqrt{3}}{4}y_0\leqq 0\cdots\cdots⑤$$

④より $4x_0{}^2+y_0{}^2=4$，⑤より $y_0\geqq 0$ となり，xy 平面上にできる影の境界線は，

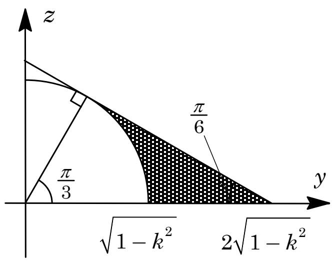
$$4x^2+y^2=4,\ \ y\geqq 0$$



すると，球の外の影は右図の網点部となる。そして，直線 $x=k$ と領域の境界線 $4x^2+y^2=4$，$x^2+y^2=1$ の交点は，それぞれ $y=\sqrt{4-4k^2}=2\sqrt{1-k^2}$，$y=\sqrt{1-k^2}$ であるので，求める y 座標の範囲は，$\sqrt{1-k^2}\leqq y\leqq 2\sqrt{1-k^2}$

(2)　右図の網点部の面積は，$\dfrac{1}{2}(\pi\cdot 1\cdot 2-\pi\cdot 1^2)=\dfrac{1}{2}\pi$ である。

(3)　球の外で光が当たらない部分を平面 $x=k$ で切断すると，その切り口は右図の網点部となる。



その面積を $S(k)$ とおくと，

$$S(k)=\frac{1}{2}\cdot 2\left(\sqrt{1-k^2}\right)^2\sin\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-k^2}\right)^2\cdot\frac{\pi}{3}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)(1-k^2)$$

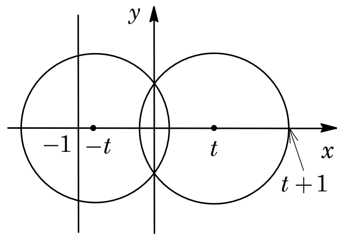
よって，球の外で光が当たらない部分の体積 V は，

$$V=\int_{-1}^{1}S(k)dk=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\int_0^1(1-k^2)dk=\frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{2}{9}\pi$$

［解　説］

20 年ほど前には，よく出題された平行光源が題材となっています。その後，高校課程では空間図形の分野は薄められ，見かけることが少なくなりました。ただ，今年からの現行課程では，教科書の記述からすると，空間図形の分野は強化されていますので，繰り返す歴史の一つの例かもしれません。

$\boxed{4}$ ［大阪大］



(1) 時刻 t において，球 A は中心の座標が $(t,\ 0,\ 0)$ より，xy 平面上の円 $(x-t)^2+y^2=1$ を x 軸のまわりに 1 回転したもの，また球 B は中心の座標が $(-t,\ 0,\ 0)$ より，xy 平面上の円 $(x+t)^2+y^2=1$ を x 軸のまわりに 1 回転したものである。

さて，球 $A,\ B$ の交線は yz 平面上にあるので，$x \geqq -1$ における $A\cup B$ の体積 $V(t)$ は，

$$V(t)=\pi\int_{-1}^{0}\{1-(x+t)^2\}dx+\pi\int_{0}^{t+1}\{1-(x-t)^2\}dx$$

ここで，$I_1=\int_{-1}^{0}\{1-(x+t)^2\}dx$，$I_2=\int_{0}^{t+1}\{1-(x-t)^2\}dx$ とすると，

$$I_1=\Big[\,x-\frac{1}{3}(x+t)^3\,\Big]_{-1}^{0}=1-\frac{1}{3}\{t^3-(-1+t)^3\}=-t^2+t+\frac{2}{3}$$

$$I_2=\Big[\,x-\frac{1}{3}(x-t)^3\,\Big]_{0}^{t+1}=t+1-\frac{1}{3}(1+t^3)=-\frac{1}{3}t^3+t+\frac{2}{3}$$

よって，$V(t)=\pi(I_1+I_2)=\pi\Big(-\frac{1}{3}t^3-t^2+2t+\frac{4}{3}\Big)$

(2) $f(t)=-\frac{1}{3}t^3-t^2+2t+\frac{4}{3}$ とおくと，$V(t)=\pi f(t)$ となり，

$$f'(t)=-t^2-2t+2$$

すると，$0\leqq t\leqq 1$ における $f'(t)=0$ の解は $t=-1+\sqrt{3}$ となり，$f(t)$ の増減は右表のようになる。

t	0	$\cdots$	$-1+\sqrt{3}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$		↗			↘

ここで，$f(t)$ を $-f'(t)$ で割ると，$f(t)=-f'(t)\Big(-\frac{1}{3}t-\frac{1}{3}\Big)+2t+\frac{2}{3}$ から，

$$f(-1+\sqrt{3})=2(-1+\sqrt{3})+\frac{2}{3}=-\frac{4}{3}+2\sqrt{3}$$

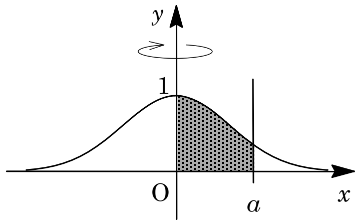
よって，$V(t)$ の最大値は，$\pi f(-1+\sqrt{3})=\Big(-\frac{4}{3}+2\sqrt{3}\Big)\pi$ である。

［解　説］

阪大・理系の定番である立体の体積を求める問題です。ただ，例年に比べ穏やかな内容になっています。

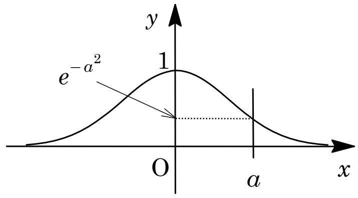
5　　［東京工大］

(1)　曲線 $y=e^{-x^2}$ と x 軸，y 軸，および直線 $x=a$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体 A の体積 V は，



$$V=\int_0^a 2\pi x\cdot e^{-x^2}\,dx=2\pi\Big[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big]_0^a$$
$$=-\pi\left(e^{-a^2}-1\right)=\pi\left(1-e^{-a^2}\right)$$

(2)　xy 平面に垂直に z 軸をとり，A について平面 $y=k$ で切断したときの切り口を考えると，



(i)　$0\leqq k\leqq e^{-a^2}$ のとき

切り口は，$x^2+(y-k)^2+z^2=a^2$ かつ $y=k$ より，

$$x^2+z^2=a^2\quad(0\leqq y\leqq e^{-a^2})\cdots\cdots\cdots①$$

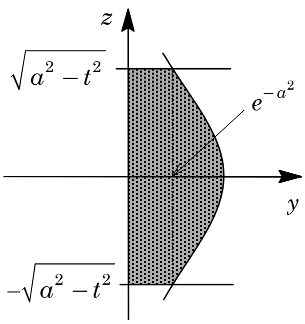
(ii)　$e^{-a^2}\leqq k\leqq 1$ のとき

$y=e^{-x^2}$ を変形すると $x^2=-\log y$，$x\geqq 0$ において $x=\sqrt{-\log y}$ となる。

すると，切り口は，$x^2+(y-k)^2+z^2=-\log k$ かつ $y=k$ より，

$$x^2+z^2=-\log y\quad(e^{-a^2}\leqq y\leqq 1)\cdots\cdots\cdots②$$

さて，A を平面 $x=t\ (-a\leqq t\leqq a)$ で切断すると，



①より，$0\leqq y\leqq e^{-a^2}$ において，$t^2+z^2=a^2$ から，

$$z=\pm\sqrt{a^2-t^2}$$

②より，$e^{-a^2}\leqq y\leqq 1$ において，$t^2+z^2=-\log y$ から，

$$y=e^{-(z^2+t^2)}$$

よって，切り口は右図の網点部となる。この面積を $S(t)$ とすると，$-a\leqq-\sqrt{a^2-t^2}\leqq\sqrt{a^2-t^2}\leqq a$ から，

$$S(t)=\int_{-\sqrt{a^2-t^2}}^{\sqrt{a^2-t^2}}e^{-(z^2+t^2)}\,dz\leqq\int_{-a}^{a}e^{-(z^2+t^2)}\,dz=\int_{-a}^{a}e^{-(s^2+t^2)}\,ds$$

(3)　(2)より，$V=\displaystyle\int_{-a}^{a}S(t)\,dt\leqq\int_{-a}^{a}\Big(\int_{-a}^{a}e^{-(s^2+t^2)}\,ds\Big)dt=\int_{-a}^{a}e^{-t^2}\Big(\int_{-a}^{a}e^{-s^2}\,ds\Big)dt$

ここで，$I=\displaystyle\int_{-a}^{a}e^{-x^2}\,dx$ とおくと，$\displaystyle\int_{-a}^{a}e^{-t^2}\Big(\int_{-a}^{a}e^{-s^2}\,ds\Big)dt=I\int_{-a}^{a}e^{-t^2}\,dt=I^2$

よって，$V\leqq I^2$ すなわち $\sqrt{V}\leqq I$ となり，(1)から $\sqrt{\pi\left(1-e^{-a^2}\right)}\leqq\displaystyle\int_{-a}^{a}e^{-x^2}\,dx$

［解　説］

回転体 A をいったん立式した後，平面 $x=t$ によって切断し，その切り口を図示するというやや迂遠な解法で記しています。

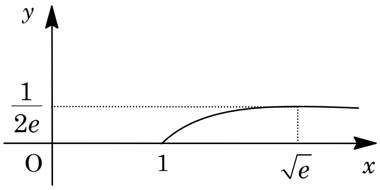
$\boxed{6}$ 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［熊本大］

(1)　$x \geqq 1$ のとき，$f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}$ に対して，$f'(x)=\dfrac{x^{-1}x^2-2x\log x}{x^4}=\dfrac{1-2\log x}{x^3}$

すると，$f'(x)=0$ の解は $x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$ であるので，$f(x)$ は増減が右表のようになり，$x=\sqrt{e}$ のとき最大値 $\dfrac{1}{2e}$ をとる。

x	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2e}$	$\searrow$

(2)　曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $y=0$，$x=\sqrt{e}$ で囲まれた図形 D の面積を S とおくと，



$$S=\int_1^{\sqrt{e}}\frac{\log x}{x^2}dx$$

ここで，$t=\log x$ とおくと，$dt=\dfrac{1}{x}dx$ となり，

$$S=\int_0^{\frac{1}{2}}te^{-t}dt=-\Big[te^{-t}\Big]_0^{\frac{1}{2}}+\int_0^{\frac{1}{2}}e^{-t}dt=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}-\Big[e^{-t}\Big]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}-e^{-\frac{1}{2}}+1=-\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}}+1=-\frac{3}{2\sqrt{e}}+1$$

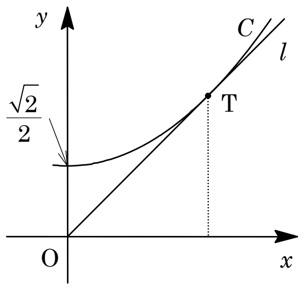
(3)　図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は,

$$V=\int_1^{\sqrt{e}}2\pi x\cdot\frac{\log x}{x^2}dx=2\pi\int_1^{\sqrt{e}}\frac{\log x}{x}dx=2\pi\Big[\frac{1}{2}(\log x)^2\Big]_1^{\sqrt{e}}=\pi\Big(\frac{1}{2}\Big)^2=\frac{\pi}{4}$$

［解　説］

面積および体積に関する計算問題です。被積分関数は頻出タイプです。なお, (3)の解答例は円筒分割によるものです。

$\boxed{7}$ ［信州大］



(1) $l : y = x\ (x \geqq 0)$ ……①，$C : y = \frac{\sqrt{2}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ ……②に対して，①と②を連立すると，

$$\frac{\sqrt{2}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} = x,\ \sqrt{2}x^2 - 4x + 2\sqrt{2} = 0$$

すると，$\sqrt{2}(x-\sqrt{2})^2 = 0$ から $x = \sqrt{2}$ となり，接点 T の座標は$(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$である。

(2) l 上の点 $\mathrm{A}(t)$ の座標は，$\mathrm{OA}(t) = t$ から$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t,\ \frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$

これより，$\mathrm{A}(t)$ を通り l に直交する直線は，

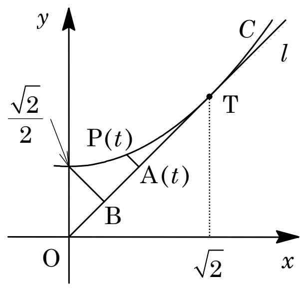
$$y - \frac{\sqrt{2}}{2}t = -\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}t\right),\ y = -x + \sqrt{2}t \text{ ………③}$$

②③を連立すると，$\frac{\sqrt{2}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} = -x + \sqrt{2}t$，$\sqrt{2}x^2 + 4x + 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2}t = 0$ となり，

$$x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 - 4t = 0,\ x = -\sqrt{2} \pm 2\sqrt{t}$$

③から $y = \sqrt{2} \mp 2\sqrt{t} + \sqrt{2}t$ なので，求める共有点の座標は，

$$(-\sqrt{2} + 2\sqrt{t},\ \sqrt{2} - 2\sqrt{t} + \sqrt{2}t),\ (-\sqrt{2} - 2\sqrt{t},\ \sqrt{2} + 2\sqrt{t} + \sqrt{2}t)$$



(3) $\mathrm{P}(t)$ の座標を$(-\sqrt{2} + 2\sqrt{t},\ \sqrt{2} - 2\sqrt{t} + \sqrt{2}t)$とし，2 点 $\mathrm{A}(t)$，$\mathrm{P}(t)$ の距離を $d(t)$ とおくと，

$$d(t) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t + \sqrt{2} - 2\sqrt{t}\right) = t - 2\sqrt{2t} + 2$$
$$= (\sqrt{t} - \sqrt{2})^2$$

さて，点$\left(0,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$から l の下ろした垂線の足を B とすると $\mathrm{OB} = \frac{1}{2}$ であり，また(1)より，$\mathrm{OT} = 2$ である。

そこで，C と l および y 軸とで囲まれた図形を，l のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V とすると，

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \pi\int_{\frac{1}{2}}^{2} \{d(t)\}^2 dt = \frac{\pi}{24} + \pi\int_{\frac{1}{2}}^{2} (\sqrt{t} - \sqrt{2})^4 dt$$

ここで，$u = \sqrt{t} - \sqrt{2}$ とおくと，$du = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2(u+\sqrt{2})}dt$ となり，

$$V = \frac{\pi}{24} + \pi\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} u^4 \cdot 2(u + \sqrt{2})du = \frac{\pi}{24} + 2\pi\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} (u^5 + \sqrt{2}u^4)du$$
$$= \frac{\pi}{24} + 2\pi\Big[\frac{u^6}{6} + \frac{\sqrt{2}}{5}u^5\Big]_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{3}\left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{2\sqrt{2}}{5}\pi \cdot \frac{1}{4\sqrt{2}}$$
$$= \frac{\pi}{24} - \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10}$$

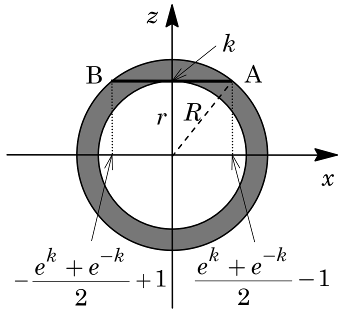
［解 説］

斜回転体の体積を求める問題で，(2)が(3)の誘導です。ただ，$\mathrm{OA}(t)$ の長さを t としたとき，$\mathrm{P}(t)$ の座標がややこしくないように問題が設定されています。その結果，$d(t)$ が簡単な式として表せ，積分計算も標準的というわけです。

8 ［京都大］

図形 D : $y=z$, $|x|\leqq\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}-1$, $0\leqq y\leqq\log a\ (a>1)$ を y 軸に垂直な平面 $y=k$ で切断したときの切り口は,

$$z=k,\ |x|\leqq\frac{e^k+e^{-k}}{2}-1,\ 0\leqq k\leqq\log a$$



平面 $y=k$ 上で図示すると, 右図の線分 AB となる。

さて, この線分を y 軸のまわりに 1 回転させてできるドーナツ形の外径を R, 内径を r とすると,

$$R=\sqrt{k^2+\Big(\frac{e^k+e^{-k}}{2}-1\Big)^2},\ r=k$$

このドーナツ形の面積を $S(k)$ とすると,

$$S(k)=\pi R^2-\pi r^2=\pi\Big\{k^2+\Big(\frac{e^k+e^{-k}}{2}-1\Big)^2\Big\}-\pi k^2=\pi\Big(\frac{e^k+e^{-k}}{2}-1\Big)^2$$
$$=\frac{\pi}{4}(e^{2k}+e^{-2k}-4e^k-4e^{-k}+6)$$

したがって, 図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は,

$$V=\int_0^{\log a}S(k)dk=\frac{\pi}{4}\int_0^{\log a}(e^{2k}+e^{-2k}-4e^k-4e^{-k}+6)dk$$
$$=\frac{\pi}{4}\Big[\frac{1}{2}e^{2k}-\frac{1}{2}e^{-2k}-4e^k+4e^{-k}+6k\Big]_0^{\log a}$$
$$=\frac{\pi}{4}\Big\{\frac{1}{2}(a^2-1)-\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{a^2}-1\Big)-4(a-1)+4\Big(\frac{1}{a}-1\Big)+6\log a\Big\}$$
$$=\pi\Big(\frac{a^2}{8}-\frac{1}{8a^2}-a+\frac{1}{a}+\frac{3}{2}\log a\Big)$$

［解　説］

空間図形の回転体の体積を求める問題です。回転軸に垂直な平面での切り口の面積を求め, それを回転軸方向に積分することで体積を計算するという基本に従っています。見かけよりはスムーズに進みます。

9　　　　［神戸大］

(1)　$C: r=1+\cos\theta\ (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ を直交座標で表すと，

$$x=(1+\cos\theta)\cos\theta=\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{2}\cos 2\theta+\cos\theta+\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots①$$

$$y=(1+\cos\theta)\sin\theta=\sin\theta+\cos\theta\sin\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta+\sin\theta\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$\dfrac{dx}{d\theta}=-\sin 2\theta-\sin\theta=-\sin\theta(2\cos\theta+1)$

$\dfrac{dx}{d\theta}=0$ とすると，$\theta=0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \pi,\ \dfrac{4}{3}\pi,\ 2\pi$ となり，対応する点は順に，

$$(2,\ 0),\ \left(-\frac{1}{4},\ \frac{\sqrt{3}}{4}\right),\ (0,\ 0),\ \left(-\frac{1}{4},\ -\frac{\sqrt{3}}{4}\right),\ (2,\ 0)$$

②より，$\dfrac{dy}{d\theta}=\cos 2\theta+\cos\theta=2\cos^2\theta+\cos\theta-1=(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)$

$\dfrac{dy}{d\theta}=0$ とすると，$\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$ となり，対応する点は順に，

$$\left(\frac{3}{4},\ \frac{3}{4}\sqrt{3}\right),\ (0,\ 0),\ \left(\frac{3}{4},\ -\frac{3}{4}\sqrt{3}\right)$$

(2)　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)}{-\sin\theta(2\cos\theta+1)}$ より，

$$\lim_{\theta\to\pi}\frac{dy}{dx}=-\lim_{\theta\to\pi}\frac{2\cos\theta-1}{2\cos\theta+1}\cdot\frac{(\cos\theta+1)(1-\cos\theta)}{\sin\theta(1-\cos\theta)}=-\lim_{\theta\to\pi}\frac{2\cos\theta-1}{2\cos\theta+1}\cdot\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

$$=-\frac{-2-1}{-2+1}\cdot\frac{0}{1+1}=0$$

(3)　$x=f(\theta)$，$y=g(\theta)$ とおき，

$$f(2\pi-\theta)=f(\theta)$$

$$g(2\pi-\theta)=-g(\theta)$$

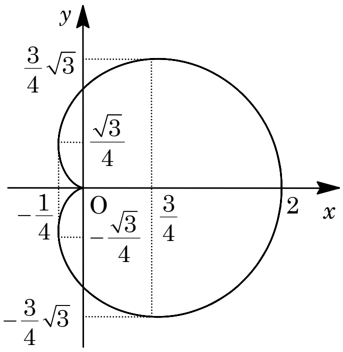
これより，曲線 C の $0\leqq\theta\leqq\pi$ の部分と $\pi\leqq\theta\leqq 2\pi$ の部分は，x 軸対称となり，まず $0\leqq\theta\leqq\pi$ において $x,\ y$ の増減を調べると，右表のようになる。

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$\dfrac{dx}{d\theta}$	0	$-$		$-$	0	$+$	0
x	2	$\searrow$	$\dfrac{3}{4}$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{4}$	$\nearrow$	0
$\dfrac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$		$-$	0
y	0	$\nearrow$	$\dfrac{3}{4}\sqrt{3}$	$\searrow$	$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

また，(2)から $\displaystyle\lim_{\theta\to\pi-0}\frac{dy}{dx}=0$ であり，さらに，

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{dy}{dx}=-\infty$$

そして，この $0\leqq\theta\leqq\pi$ の部分を x 軸に折り返してできる $\pi\leqq\theta\leqq 2\pi$ の部分を合わせると，曲線 C の概形は右図のようになる。



(4)　曲線 C の長さを l とし，(1)から，

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2=\sin^2 2\theta+2\sin 2\theta\sin\theta+\sin^2\theta$$
$$\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=\cos^2 2\theta+2\cos 2\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$

x 軸に関する対称性を利用すると,

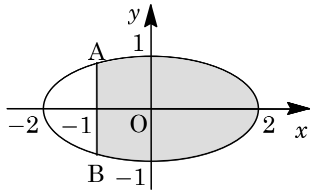
$$l=2\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^2 2\theta+2\sin 2\theta\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2 2\theta+2\cos 2\theta\cos\theta+\cos^2\theta}\,d\theta$$
$$=2\int_0^{\pi}\sqrt{1+1+2\cos(2\theta-\theta)}\,d\theta=2\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta$$
$$=2\int_0^{\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta=4\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=8\Big[\sin\frac{\theta}{2}\Big]_0^{\pi}=8$$

［解　説］

カージオイドの概形をかき，その長さを求める問題です。まったく同じ問題を，一度は演習したにちがいないと思われますが……。

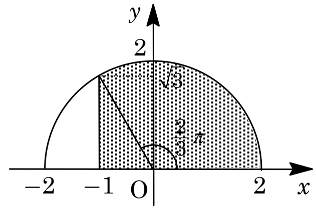
$\boxed{10}$ ［広島大］

(1)　楕円 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ に対して,



$$y=\pm\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

さて, C に囲まれる図形の $x\geqq -1$ の部分の面積を U とすると, x 軸に関する対称性より,

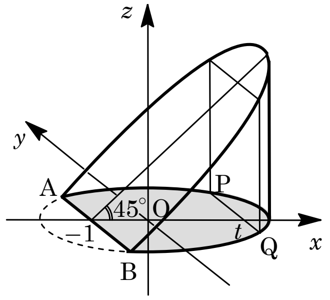


$$U=2\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_{-1}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

そして, U の値は右図の網点部の面積が対応し,

$$U=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}=\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2)　$(*)$に $x=t$ を代入すると，$y=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{4-t^2}$ となり，C と直線 $x=t$ の交点を P, Q とおくと,



$$\mathrm{PQ}=\sqrt{4-t^2}$$

これより，立体 V を平面 $x=t$ で切ったとき，断面の長方形の面積 $S(t)$ は,

$$S(t)=\mathrm{PQ}\cdot\{t-(-1)\}\tan 45^\circ=(t+1)\sqrt{4-t^2}$$

(3)　立体 V の体積 W は, (1)の結果も利用して,

$$W=\int_{-1}^{2}S(t)dt=\int_{-1}^{2}t\sqrt{4-t^2}\,dt+\int_{-1}^{2}\sqrt{4-t^2}\,dt$$

$$=\int_{-1}^{2}t\sqrt{4-t^2}\,dt+\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ここで，$4-t^2=u$ とおくと，$-2tdt=du$ から,

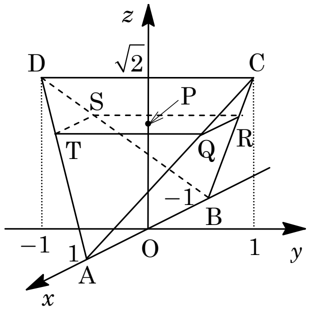
$$\int_{-1}^{2}t\sqrt{4-t^2}\,dt=\int_{3}^{0}\sqrt{u}\left(-\frac{1}{2}\right)du=\frac{1}{2}\int_{0}^{3}u^{\frac{1}{2}}\,du=\frac{1}{3}\Big[u^{\frac{3}{2}}\Big]_0^3=\sqrt{3}$$

よって，$W=\sqrt{3}+\dfrac{4}{3}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{4}{3}\pi+\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ となる。

［解 説］

立体の体積を求める頻出タイプの問題です。問題文に参考図が書かれているため, 見通しはかなりよくなっています。

11　　［岡山大］

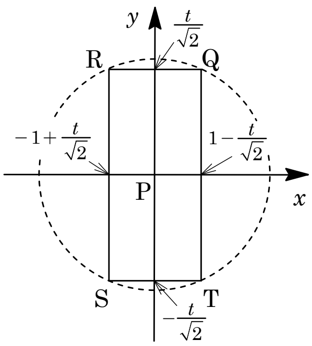


(1) 座標空間内の 4 点 $A(1,\ 0,\ 0)$，$B(-1,\ 0,\ 0)$，$C(0,\ 1,\ \sqrt{2})$，$D(0,\ -1,\ \sqrt{2})$ を頂点とする四面体 ABCD に対して，$\overrightarrow{AC}=(-1,\ 1,\ \sqrt{2})$ より，辺 AC は $0\leqq q\leqq 1$ として，

$$(x,\ y,\ z)=(1,\ 0,\ 0)+q(-1,\ 1,\ \sqrt{2})$$
$$=(1-q,\ q,\ \sqrt{2}q)$$

ここで，点 $P(0,\ 0,\ t)$ を通り z 軸に垂直な平面 $z=t$ との交点は，$\sqrt{2}q=t$ より $q=\dfrac{t}{\sqrt{2}}$ となり，$(x,\ y,\ z)=\left(1-\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ \dfrac{t}{\sqrt{2}},\ t\right)$ である。

よって，交点 Q の座標は $\left(1-\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ \dfrac{t}{\sqrt{2}},\ t\right)$ となる。



(2) 点 P を通り z 軸に垂直な平面と辺 BC, BD, AD との交点を，それぞれ R, S, T とおくと，(1)と同様にして，$\overrightarrow{AD}=(-1,\ -1,\ \sqrt{2})$ から $T\left(1-\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ t\right)$ となる。

また，点 R, S はそれぞれ点 Q, T を yz 平面に関して対称移動したものより，

$$R\left(-1+\frac{t}{\sqrt{2}},\ \frac{t}{\sqrt{2}},\ t\right),\ S\left(-1+\frac{t}{\sqrt{2}},\ -\frac{t}{\sqrt{2}},\ t\right)$$

これより，平面 $z=t$ 上で，四角形 QRST は点 P を中心とする長方形であり，この長方形を z 軸のまわりに回転してできる円の面積を $S(t)$ とおくと，

$$S(t)=\pi PQ^2=\pi\left\{\left(1-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}=\pi(1-\sqrt{2}t+t^2)$$

すると，四面体 ABCD を z 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は，

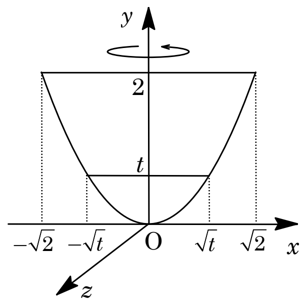
$$V=\int_0^{\sqrt{2}}S(t)dt=\pi\int_0^{\sqrt{2}}(1-\sqrt{2}t+t^2)dt=\pi\left[t-\frac{\sqrt{2}}{2}t^2+\frac{t^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}}$$
$$=\pi\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}+\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)=\frac{2}{3}\sqrt{2}\pi$$

［解 説］

立体の回転体の体積を求める頻出題です。誘導に従って計算していけばよいわけですが，それ以外に，対称性に注目して計算量を減らすことも重要です。

12　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［大阪大］

(1)　xy 平面上で放物線 $y=x^2$ と直線 $y=2$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体 L を，y 軸に直交する平面 $y=t$ $(0\leqq t\leqq 2)$ で切断したときの切り口は，中心が点 $(0,\ t,\ 0)$ で半径が $\sqrt{t}$ の円板となるので，



$$x^2+z^2\leqq t\ ,\ \ y=t\ \cdots\cdots\cdots①$$

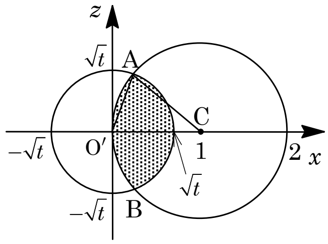
また，xy 平面上の直線 $x=1$ からの距離が 1 以下の点で構成される円柱を $y=t$ で切断したときの切り口は，

$$(x-1)^2+z^2\leqq 1\ ,\ \ y=t\ \cdots\cdots\cdots②$$

すると，立体 M を $y=t$ で切断したときの切り口は，①②から，

$$x^2+z^2\leqq t\ ,\ (x-1)^2+z^2\leqq 1\ ,\ \ y=t$$

この連立不等式を平面 $y=t$ 上に図示すると右図の網点部になる。なお，$\mathrm{O}'(0,\ t,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ t,\ 0)$ とし，2 円の交点を A, B とおく。すると，交点 A, B の x 座標は $x^2+z^2=t$ と $(x-1)^2+z^2=1$ を連立して，



$$2x-1=t-1\ ,\ \ x=\frac{t}{2}$$

そこで，$\mathrm{AB}\perp\mathrm{O'C}$ で $\mathrm{O'A}=\sqrt{t}$ より，$\sqrt{t}\cos\angle\mathrm{AO'C}=\dfrac{t}{2}$ となり，

$$2\cos\angle\mathrm{AO'C}=\sqrt{t}\ ,\ \ t=(2\cos\angle\mathrm{AO'C})^2$$

これより，$\angle\mathrm{AO'C}=\theta$ とおくことができ，$0\leqq t\leqq 2$ のとき $\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ となる。

さて，網点部の面積を $S(t)$ とすると，$\angle\mathrm{ACO'}=\pi-2\theta$ から，

$$\begin{aligned}S(t)&=2\Big\{\frac{1}{2}(\sqrt{t})^2\theta+\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot(\pi-2\theta)-\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin(\pi-2\theta)\Big\}\\&=t\theta+\pi-2\theta-\sin 2\theta=4\theta\cos^2\theta+\pi-2\theta-\sin 2\theta\\&=2\theta(1+\cos 2\theta)+\pi-2\theta-\sin 2\theta=2\theta\cos 2\theta-\sin 2\theta+\pi\end{aligned}$$

(2)　M の体積 V とすると，$V=\displaystyle\int_0^2 S(t)\,dt$ となり，(1)より，

$$\begin{aligned}V&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}(2\theta\cos 2\theta-\sin 2\theta+\pi)(-8\cos\theta\sin\theta)\,d\theta\\&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(8\theta\cos 2\theta-4\sin 2\theta+4\pi)(\sin 2\theta)\,d\theta\\&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(4\theta\sin 4\theta-2+2\cos 4\theta+4\pi\sin 2\theta)\,d\theta\end{aligned}$$

ここで，$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 4\theta\,d\theta=\frac{1}{4}\Big[\sin 4\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=0$，$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\,d\theta=-\frac{1}{2}\Big[\cos 2\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 4\theta\sin 4\theta\,d\theta = -\left[\,\theta\cos 4\theta\,\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 4\theta\,d\theta = -\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3}{4}\pi$$

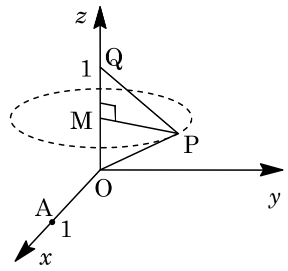
以上より，$V = -\frac{3}{4}\pi - 2\cdot\frac{\pi}{4} + 4\pi\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4}\pi$ となる。

［解 説］

立体の体積計算という阪大の頻出問題です。(1)は(2)の計算を考えて，結論をまとめています。ただ，これでも(2)の積分計算は，簡単とはいえません。

13　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大］

(1) 原点 O, 点 Q(0, 0, 1) に対して, 線分 OQ の中点を M とすると, $\mathrm{M}\left(0,\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ となる。



さて, 座標空間内で, 1 辺の長さが 1 の正三角形 OPQ を動かすとき, $\mathrm{PM}\perp\mathrm{OQ}$, $\mathrm{PM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より, 点 P の座標は, φ を $0°\leqq\varphi<360°$ として, $\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi,\ \dfrac{1}{2}\right)$ とおくことができる。すると, 点 P の x 座標がとりうる値の範囲は,

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$$

また, 点 A(1, 0, 0) に対して, $\angle\mathrm{AOP}=\theta$ $(0°\leqq\theta\leqq180°)$ とするとき,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\cos\theta,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi=1\cdot1\cdot\cos\theta$$

よって, $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi$ となり, $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq\cos\theta\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ から $30°\leqq\theta\leqq150°$ である。

(2) (1)から, Q(0, 0, 1) のとき, 辺 OP が通過してできる図形は, 頂点が原点で, 中心軸が z 軸の円錐側面 C である。そして, 点 Q が平面 $x=0$ 上を動く, すなわち yz 平面上で中心が原点で半径 1 の円を描くとき, 辺 OP が通過してできる図形 K は, 円錐側面 C を x 軸のまわりに回転したものとなる。

さて, 円錐側面 C 上の任意の点を $\mathrm{X}(x,\ y,\ z)$ とおくと, $\angle\mathrm{QOX}=\dfrac{\pi}{3}$ から,

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}}=|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}||\overrightarrow{\mathrm{OX}}|\cos\frac{\pi}{3},\ z=1\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{1}{2}$$

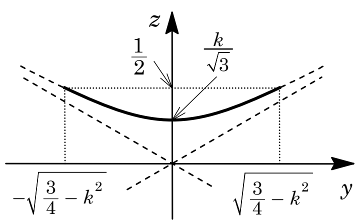
$0\leqq z\leqq\dfrac{1}{2}$ から, 両辺を 2 乗すると, $4z^2=x^2+y^2+z^2$ となり,

$$3z^2=x^2+y^2\quad\left(0\leqq z\leqq\frac{1}{2}\right)\cdots\cdots\cdots(*)$$

次に, 円錐側面 C を, x 軸に垂直な平面 $x=k$ で切断したときの切り口を考える。ただし, (1)から, $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq k\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ とする。

すると, $(*)$から, $3z^2=k^2+y^2$ となり,

$$y^2-3z^2=-k^2\quad\left(0\leqq z\leqq\frac{1}{2}\right)$$



$k\neq0$ のときは双曲線の一部となり, 平面 $x=k$ 上に図示すると, 右図の太線部のようになる。

さらに, この双曲線（太線部）を点 $(k,\ 0,\ 0)$ のまわりに回転してできるドーナツ形の外径を R, 内径を r, 面積を $S(k)$ とおくと,

$$R=\sqrt{\left(\frac{3}{4}-k^2\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{1-k^2}\,,\ \ r=\frac{k}{\sqrt{3}}$$

$$S(k)=\pi(R^2-r^2)=\pi\left(1-k^2-\frac{k^2}{3}\right)=\pi\left(1-\frac{4}{3}k^2\right)$$

また，$k=0$ のときも，上記の $S(k)$ は成立している。

以上より，求める図形 K の体積を V とすると，yz 平面に関する対称性より，

$$V=2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}S(k)dk=2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(1-\frac{4}{3}k^2\right)dk=2\pi\left[k-\frac{4}{9}k^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=2\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi$$

［解　説］

東大で頻出の立体の体積を求める問題です。(1)が誘導になり，立式の方針が決まります。なお，円錐側面の方程式については「ピンポイント レクチャー」を参照してください。

14　［東京医歯大］

(1)　関数 $f(x)=x-\log(1+x)$ に対して，

$$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$$

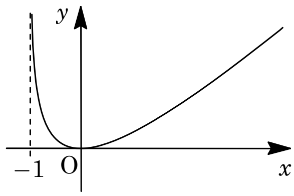
すると，$f(x)$ の増減は右表のようになり，

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	×	$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	0	↗

$$\lim_{x\to-1+0}f(x)=\lim_{x\to-1+0}\{x-\log(1+x)\}=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}x\left\{1-\frac{\log(1+x)}{1+x}\cdot\frac{1+x}{x}\right\}=\infty$$

これより，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図のようになり，$f(x)=p$ を満たす実数 x の個数は，$p<0$ のとき 0 個，$p=0$ のとき 1 個，$p>0$ のとき 2 個である。



(2)　(1)より，$y=f(x)$ に対し，$x\geqq0$ のとき y は $y\geqq0$ で単調に増加する。このとき，$f(x)$ の逆関数を $g(x)$ とする。

さて，$p\geqq0$，$q\geqq0$ として，$g(p)=q$ とおくと，$p=f(q)$ であり，

$$g(p)-p=q-f(q)=q-\{q-\log(1+q)\}=\log(1+q)\geqq0$$

よって，$p\leqq g(p)$ ………①

また，$u>0$ として，$F=\dfrac{u+1}{u}\{p-u+\log(u+1)\}+u-g(p)$ と設定すると，$f(u)=u-\log(1+u)$，$f'(u)=\dfrac{u}{1+u}$ であることより，

$$F=\frac{1}{f'(u)}\{f(q)-f(u)\}+u-q$$

(i)　$q=u$ のとき　$F=\dfrac{1}{f'(u)}\{f(u)-f(u)\}+u-u=0$

(ii)　$q>u$ のとき　平均値の定理より，$\dfrac{f(q)-f(u)}{q-u}=f'(c)$　$(u<c<q)$

ここで，$x>0$ で，$f'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}$ は正で単調増加より，$f'(c)>f'(u)$ となり，

$$\frac{f(q)-f(u)}{q-u}>f'(u),\quad\frac{f(q)-f(u)}{f'(u)}>q-u$$

よって，$F>(q-u)+u-q=0$ である。

(iii)　$q<u$ のとき　(ii)と同様にして，$\dfrac{f(q)-f(u)}{q-u}=f'(c)$　$(q<c<u)$

そして，$f'(c)<f'(u)$ から $\dfrac{f(q)-f(u)}{q-u}<f'(u)$ となり，$\dfrac{f(q)-f(u)}{f'(u)}>q-u$

よって，$F>(q-u)+u-q=0$ である。

(i)～(iii)より，$F\geqq0$ となり，$g(p)\leqq\dfrac{u+1}{u}\{p-u+\log(u+1)\}+u$ ………②

①②より，$p\leqq g(p)\leqq\dfrac{u+1}{u}\{p-u+\log(u+1)\}+u$

(3)　$p>0$ として，曲線 $y=g(x)$ 上の点 $(p,\ g(p))$ を通り，傾きが 1 の直線 l の方程式は，$q=g(p)$ とおくと，

$$y-q=x-p\ ,\ \ y=x-p+q$$

そして，l と x 軸および曲線 $y=g(x)$ によって囲まれた図形 D の面積を S とする。

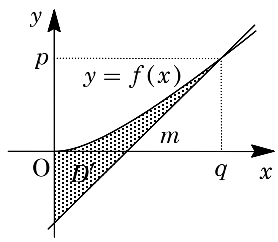
さて，$y=g(x)\Leftrightarrow x=f(y)$，$y=x-p+q\Leftrightarrow x=y+p-q$ に注意して，図形 D を直線 $y=x$ に関して対称移動する。

すると，図形 D は直線 $m: y=x+p-q$ と y 軸および曲線 $y=f(x)$ によって囲まれた図形に移り，この図形を D' とすると D' の面積も S である。

そこで，曲線 $y=f(x)$ と m の位置関係を考えると，$0\leqq x\leqq q$ で，

$$f(x)-(x+p-q)=f(x)-x-f(q)+q=-\log(1+x)+\log(1+q)\geqq 0$$

これより，図形 D' および図形 D は右図のようになり，



$$S=\int_0^q\{x-\log(1+x)-(x+p-q)\}dx$$

$$=\int_0^q\{-\log(1+x)-p+q\}dx$$

$$=-\big[(1+x)\log(1+x)\big]_0^q+\int_0^q dx-(p-q)q$$

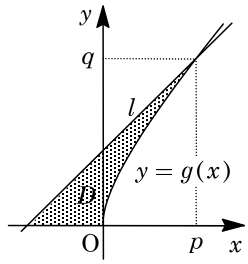
$$=-(1+q)\log(1+q)+q-(p-q)q$$

ここで，$p=f(q)$ より，$p=q-\log(1+q)$ となり，

$$S=-(1+q)(q-p)+q-(p-q)q$$

$$=-q+p-q(q-p)+q-(p-q)q$$

$$=p$$



［解　説］

逆関数の絡んだ微積分の総合問題です。盛りだくさんです。なお，(2)では，式の形から平均値の定理を利用しましたが，普通に微分しても構いません。また，(3)で l と曲線 $y=g(x)$ の位置関係について，(2)の不等式を利用することもできますが……。

15　　［大阪大］

(1)　まず，$f(t)=2\sin t+\cos 2t$ に対して，

$$f'(t)=2\cos t-2\sin 2t$$
$$=2\cos t-4\sin t\cos t$$
$$=2\cos t(1-2\sin t)$$

t	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0
$f(t)$	1	$\nearrow$	$\dfrac{3}{2}$	$\searrow$	1

これより，$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における $f(t)$ の増減は右表のようになり，$f(t)$ は $t=\dfrac{\pi}{6}$ のとき最大値 $\dfrac{3}{2}$ をとる。

また，$g(t)=2\cos t+\sin 2t$ に対して，

$$g'(t)=-2\sin t+2\cos 2t$$
$$=-2\sin t+2(1-2\sin^2 t)$$
$$=-2(2\sin^2 t+\sin t-1)$$
$$=-2(2\sin t-1)(\sin t+1)$$

t	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	2	$\nearrow$	$\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$	$\searrow$	0

これより，$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における $g(t)$ の増減は右表のようになり，$g(t)$ は $t=\dfrac{\pi}{6}$ のとき最大値 $\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ をとる。

(2)　$0\leqq t_1<t_2\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき $f(t_1)=f(t_2)$ より，$2\sin t_1+\cos 2t_1=2\sin t_2+\cos 2t_2$

$$2\sin t_1+1-2\sin^2 t_1=2\sin t_2+1-2\sin^2 t_2$$
$$\sin t_2-\sin t_1-\sin^2 t_2+\sin^2 t_1=0,\ (\sin t_2-\sin t_1)(1-\sin t_2-\sin t_1)=0$$

すると，$\sin t_2-\sin t_1>0$ から，$\sin t_1+\sin t_2=1\cdots\cdots\cdots①$

さて，$g(t)^2=(2\cos t+\sin 2t)^2$ について，

$$g(t)^2=4\cos^2 t(1+\sin t)^2=4(1-\sin^2 t)(1+\sin t)^2=4(1-\sin t)(1+\sin t)^3$$

ここで，$u=\sin t$ とおき，$h(u)=(1-u)(1+u)^3\ (0\leqq u\leqq 1)$ と設定すると，

$$g(t)^2=4h(u)\cdots\cdots\cdots②$$

さらに，$u_1=\sin t_1$，$u_2=\sin t_2$ とおくと，$0\leqq u_1<u_2\leqq 1$ となり，②から，

$$g(t_1)^2=4h(u_1),\ g(t_2)^2=4h(u_2)$$

また，①から，$u_1+u_2=1\cdots\cdots\cdots③$

③から，$h(u_1)=(1-u_1)(1+u_1)^3=u_2(1+u_1)^3$，$h(u_2)=u_1(1+u_2)^3$ となり，

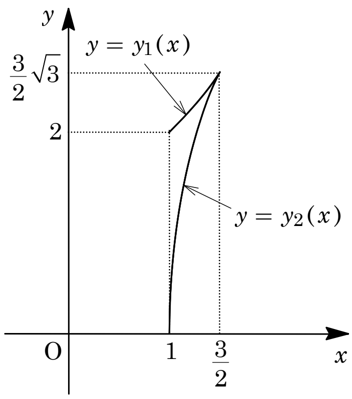
$$h(u_1)-h(u_2)=u_2(1+u_1)^3-u_1(1+u_2)^3$$
$$=(u_2-u_1)+3u_1u_2(u_1-u_2)+u_1u_2(u_1^2-u_2^2)$$
$$=(u_2-u_1)\{1-3u_1u_2-u_1u_2(u_1+u_2)\}=(u_2-u_1)(1-4u_1u_2)$$

ここで，③および $u_1<u_2$ に注意すると，相加平均と相乗平均の関係から，

$$1=u_1+u_2>2\sqrt{u_1u_2},\ 4u_1u_2<1$$

よって，$h(u_1)-h(u_2)>0$ となり，$g(t_1)^2-g(t_2)^2>0$ である。

(3)　曲線 $C: x=f(t)$，$y=g(t)$ $\left(0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ の概形は，(1)(2) から，右図のようになる。ここで，C の $0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{6}$ の部分を $y=y_1(x)$，$\dfrac{\pi}{6}\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の部分を $y=y_2(x)$ とおくと，C と直線 $x=1$ が囲む領域の面積 S は，



$$S=\int_1^{\frac{3}{2}}\{y_1(x)-y_2(x)\}dx$$
$$=\int_1^{\frac{3}{2}}y_1(x)dx-\int_1^{\frac{3}{2}}y_2(x)dx$$

ここで，変数を x から t に置き換えると，

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{6}}g(t)f'(t)dt-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}g(t)f'(t)dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}g(t)f'(t)dt+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}g(t)f'(t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(t)f'(t)dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos t+\sin 2t)(2\cos t-2\sin 2t)dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\cos^2 t-2\sin 2t\cos t-2\sin^2 2t)dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2+2\cos 2t-\sin 3t-\sin t-1+\cos 4t)dt$$
$$=\Big[\,t+\frac{1}{3}\cos 3t+\cos t\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}(-1)+(-1)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}$$

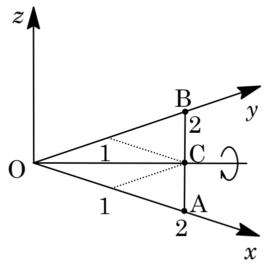
［解　説］

パラメータ曲線と面積についての問題です。曲線 C の概形を書くために，(2)にかなりのボリュームのある問題が設定されています。

16　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［神戸大］

(1)　点 H は直線 OC 上の点なので，t を実数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=t\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t(1,\ 1,\ 0)=(t,\ t,\ 0)$$



また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y,\ z)$ より，

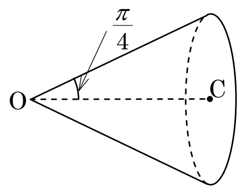
$$\overrightarrow{\mathrm{HP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(x-t,\ y-t,\ z)$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{HP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ から $\overrightarrow{\mathrm{HP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$ となり，

$$(x-t)+(y-t)=0$$

よって，$t=\dfrac{x+y}{2}$ から，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(\dfrac{x+y}{2},\ \dfrac{x+y}{2},\ 0\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{HP}}=\left(\dfrac{x-y}{2},\ \dfrac{-x+y}{2},\ z\right)$

(2)　$\angle\mathrm{AOC}=\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{\pi}{4}$ から，回転体 L は，線分 OC を中心軸とし，母線と中心軸のなす角が $\dfrac{\pi}{4}$ の直円錐（内部を含む）を表す。そして，点 P が L 上の点であるための条件は，



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\geqq|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\frac{\pi}{4}\cdots\cdots\cdots①$$

$$0\leqq x+y\leqq 2\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$x+y\geqq\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となり，$(x+y)^2\geqq x^2+y^2+z^2$

$$z^2\leqq 2xy\cdots\cdots\cdots③$$

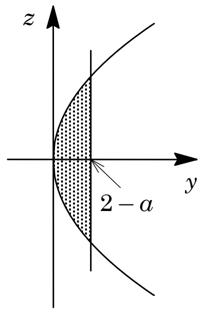
よって，②③より，$z^2\leqq 2xy$ かつ $0\leqq x+y\leqq 2$ である。

(3)　L を平面 $x=a\ (1\leqq a\leqq 2)$ で切った切り口は，③より，

$$z^2\leqq 2ay\cdots\cdots\cdots④$$

②より $0\leqq a+y\leqq 2$ から，$-a\leqq y\leqq 2-a\cdots\cdots\cdots⑤$

そして，④⑤を平面 $x=a$ 上に図示すると右図の網点部になり，その面積を $S(a)$ とおくと，y 軸に関する対称性から，



$$S(a)=2\int_0^{2-a}\sqrt{2ay}\,dy=2\sqrt{2a}\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2-a}$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt{2a}(2-a)\sqrt{2-a}=\frac{4}{3}\sqrt{2}(2-a)\sqrt{a(2-a)}$$

(4)　立体 $\{(x,\ y,\ z)\,|\,(x,\ y,\ z)\in L,\ 1\leqq x\leqq 2\}$ の体積を V とすると，

$$V=\int_1^2 S(a)da=\frac{4}{3}\sqrt{2}\int_1^2(2-a)\sqrt{a(2-a)}\,da$$

ここで，$I=\displaystyle\int_1^2(2-a)\sqrt{a(2-a)}\,da$ とおくと，

$$I=\int_1^2(2-a)\sqrt{2a-a^2}\,da=\int_1^2(2-a)\sqrt{-(a-1)^2+1}\,da$$

さらに，$s=a-1$ とおくと，$ds=da$ となり，

$$I=\int_0^1(1-s)\sqrt{1-s^2}\,ds=\int_0^1\sqrt{1-s^2}\,ds-\int_0^1 s\sqrt{1-s^2}\,ds$$

そして，$\int_0^1\sqrt{1-s^2}\,ds=\frac{1}{4}\pi\cdot 1^2=\frac{\pi}{4}$，また$u=1-s^2$とおくと$du=-2sds$から，

$$\int_0^1 s\sqrt{1-s^2}\,ds=-\frac{1}{2}\int_1^0\sqrt{u}\,du=\frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{1}{2}}\,du=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\Big[\,u^{\frac{3}{2}}\,\Big]_0^1=\frac{1}{3}$$

したがって，$I=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}$となるので，$V=\frac{4}{3}\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}\pi-\frac{4}{9}\sqrt{2}$である。

［解　説］

立体の体積を求める問題です。たいへん詳しい誘導がついています。なお，回転体Lが直円錐であることは明らかなので，(2)では(1)の誘導を利用しませんでした。立式の詳細は「ピンポイント　レクチャー」を参照してください。また，(3)では，この円錐を母線に平行に切っていますので，放物線が出現しています。

17　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東北大］

(1)　条件より，$S: x+y^2 \leqq 2$ ……①，$x+y \geqq 0$ ……②，$x-y \leqq 2$ ……③

まず，①と②の境界線の交点は，$x+y^2=2$ かつ $x+y=0$ から，

$$y^2-y=2,\ (y-2)(y+1)=0$$

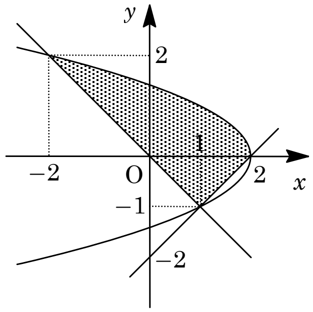
よって，$(x,\ y)=(-2,\ 2),\ (1,\ -1)$

また，①と③の境界線の交点は，$x+y^2=2$ かつ $x-y=2$ から，

$$y^2+y=0,\ y(y+1)=0$$

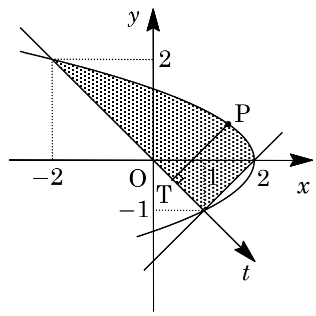
よって，$(x,\ y)=(2,\ 0),\ (1,\ -1)$

以上より，図形 S は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



(2)　①の境界線上に点 $\mathrm{P}(-y^2+2,\ y)\ (0 \leqq y \leqq 2)$ をとり，P から直線 $y=-x$ に垂線を下ろし，その足を T とおく。

そして，右図のように t 軸を設定し，$\mathrm{OT}=|t|$ とすると，$\mathrm{T}\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)$ と表せる。



さて，P と直線 $y=-x$ すなわち $x+y=0$ との距離は，

$$\mathrm{PT}=\frac{|-y^2+2+y|}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}|-y^2+y+2|$$

ここで，$0 \leqq y \leqq 2$ において，$-y^2+y+2=-(y+1)(y-2) \geqq 0$ から，

$$\mathrm{PT}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-y^2+y+2) \cdots\cdots\cdots ④$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{PT}}$ の単位ベクトルの成分は，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,\ -1)$ とおけるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PT}}=(-y^2+2,\ y)+\frac{1}{\sqrt{2}}(-y^2+y+2)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,\ -1)$$

$$=\left(-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}y+1,\ \frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}y-1\right)$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)$ から，$\dfrac{t}{\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2}y^2-\dfrac{1}{2}y+1$ となり，

$$t=-\frac{1}{\sqrt{2}}y^2-\frac{1}{\sqrt{2}}y+\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-y^2-y+2) \cdots\cdots\cdots ⑤$$

さて，図形 S を直線 $y=-x$ のまわりに 1 回転して得られる立体の体積 V は，

$$V=\pi\int_{-2\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\mathrm{PT}^2\,dt$$

ここで，変数を t から y に置換すると，⑤より，$t=-2\sqrt{2} \to \sqrt{2}$ のとき $y=2 \to 0$ となり，また $dt=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-2y-1)\,dy$ から，

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_2^0 \frac{1}{2}(-y^2+y+2)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(-2y-1)\,dy\\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\pi\int_0^2 (-y^2+y+2)^2(2y+1)\,dy\\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\pi\int_0^2 (2y^5-3y^4-8y^3+5y^2+12y+4)\,dy\\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\pi\Big[\frac{1}{3}y^6-\frac{3}{5}y^5-2y^4+\frac{5}{3}y^3+6y^2+4y\Big]_0^2\\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\pi\Big(\frac{64}{3}-\frac{96}{5}-32+\frac{40}{3}+24+8\Big)=\frac{58}{15}\sqrt{2}\pi
\end{aligned}
$$

［解 説］

斜回転体の体積を求める問題です。計算量に配慮した設定となっていますが，それでも最後の定積分は面倒です。