

1

[筑波大]

α を実数でない複素数とし、 β を正の実数とする。以下の問いに答えよ。ただし、複素数 w に対してその共役複素数を \bar{w} で表す。

(1) 複素数平面上で、関係式 $\alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z = |z|^2$ を満たす複素数 z の描く図形を C とする。

このとき、 C は原点を通る円であることを示せ。

(2) 複素数平面上で、 $(z - \alpha)(\beta - \bar{\alpha})$ が純虚数となる複素数 z の描く図形を L とする。

L は(1)で定めた C と 2 つの共有点をもつことを示せ。また、その 2 点を P, Q とするとき、線分 PQ の長さを α と $\bar{\alpha}$ を用いて表せ。

(3) β の表す複素数平面上の点を R とする。(2)で定めた点 P, Q と点 R を頂点とする三角形が正三角形であるとき、 β を α と $\bar{\alpha}$ を用いて表せ。

2

[千葉大]

$z = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$ (i は虚数単位)とおく。

- (1) $z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$ を求めよ。
- (2) $\alpha = z + z^2 + z^4$ とするとき, $\alpha + \bar{\alpha}$, $\alpha \bar{\alpha}$ および α を求めよ。ただし, $\bar{\alpha}$ は α の共役複素数である。
- (3) $(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)$ を求めよ。

3

[東北大]

多項式 $P(x)$ を、 $P(x) = \frac{(x+i)^7 - (x-i)^7}{2i}$ により定める。ただし、 i は虚数単位とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $P(x) = a_0x^7 + a_1x^6 + a_2x^5 + a_3x^4 + a_4x^3 + a_5x^2 + a_6x + a_7$ とするとき、係数 a_0, \dots, a_7 をすべて求めよ。
- (2) $0 < \theta < \pi$ に対して、 $P\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) = \frac{\sin 7\theta}{\sin^7\theta}$ が成り立つことを示せ。
- (3) (1)で求めた a_1, a_3, a_5, a_7 を用いて、多項式 $Q(x) = a_1x^3 + a_3x^2 + a_5x + a_7$ を考える。 $\theta = \frac{\pi}{7}$ として、 $k = 1, 2, 3$ について、 $x_k = \frac{\cos^2 k\theta}{\sin^2 k\theta}$ とおく。このとき、 $Q(x_k) = 0$ が成り立つことを示し、 $x_1 + x_2 + x_3$ の値を求めよ。

4

[東京大]

z を複素数とする。複素数平面上の 3 点 $A(1)$, $B(z)$, $C(z^2)$ が鋭角三角形をなすような z の範囲を求め、図示せよ。

5

[広島大]

複素数平面上を、点 P が次のように移動する。

1. 時刻 0 では、 P は原点にいる。時刻 1 まで、 P は実軸の正の方向に速さ 1 で移動する。移動後の P の位置を $Q_1(z_1)$ とすると、 $z_1 = 1$ である。
2. 時刻 1 に P は $Q_1(z_1)$ において進行方向を $\frac{\pi}{4}$ 回転し、時刻 2 までその方向に速さ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ で移動する。移動後の P の位置を $Q_2(z_2)$ とすると、 $z_2 = \frac{3+i}{2}$ である。
3. 以下同様に、時刻 n に P は $Q_n(z_n)$ において進行方向を $\frac{\pi}{4}$ 回転し、時刻 $n+1$ までその方向に速さ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ で移動する。移動後の P の位置を $Q_{n+1}(z_{n+1})$ とする。ただし n は自然数である。

$\alpha = \frac{1+i}{2}$ として、次の問いに答えよ。

- (1) z_3, z_4 を求めよ。
- (2) z_n を α, n を用いて表せ。
- (3) P が $Q_1(z_1), Q_2(z_2), \dots$ と移動するとき、 P はある点 $Q(w)$ に限りなく近づく。 w を求めよ。
- (4) z_n の実部が(3)で求めた w の実部より大きくなるようなすべての n を求めよ。

6

[筑波大]

複素数平面上を動く点 z を考える。次の問いに答えよ。

- (1) 等式 $|z-1|=|z+1|$ を満たす点 z の全体は虚軸であることを示せ。
- (2) 点 z が原点を除いた虚軸上を動くとき、 $w = \frac{z+1}{z}$ が描く図形は直線から 1 点を除いたものとなる。この図形を描け。
- (3) a を正の実数とする。点 z が虚軸上を動くとき、 $w = \frac{z+1}{z-a}$ が描く図形は円から 1 点を除いたものとなる。この円の中心と半径を求めよ。

7

[熊本大]

$s > 0$, $t > 0$ とする。複素数平面上の $\alpha = -i$, $\beta = 2 - 2i$, $\gamma = s + ti$ を表す点をそれぞれ A, B, C とする。さらに, 点 D を直線 AC に関して点 B と反対側にとり, $\triangle ACD$ が正三角形になるようにする。点 D の表す複素数を z とするとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) z を s, t を用いて表せ。
- (2) α, β, γ が等式 $4(\beta - \alpha)^2 + (\gamma - \alpha)^2 - 2(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha) = 0$ を満たすとき, γ と z をそれぞれ求めよ。
- (3) (2)で求めた γ と z に対して, 直線 AC と直線 BD の交点を F とし, $\angle DFC = \theta$ とする。このとき, $\cos \theta$ の値を求めよ。

8

[東北大]

α, β, γ を複素数とし, $\bar{z}z + \alpha z + \beta \bar{z} + \gamma = 0 \cdots \cdots (*)$ を満たす複素数 z を考える。

以下の問いに答えよ。

- (1) z は, $(\alpha - \bar{\beta})z - (\bar{\alpha} - \beta)\bar{z} + \gamma - \bar{\gamma} = 0$ を満たすことを示せ。
- (2) $|\alpha| = |\beta| \neq 0$ を仮定し, また γ は負の実数であると仮定する。このとき, $(*)$ を満たす z がちょうど 2 個あるための必要十分条件を α, β を用いて表せ。

9

[京都大]

w を 0 でない複素数, x, y を $w + \frac{1}{w} = x + yi$ を満たす実数とする。

- (1) 実数 R は $R > 1$ を満たす定数とする。 w が絶対値 R の複素数全体を動くとき, xy 平面上の点 (x, y) の軌跡を求めよ。
- (2) 実数 α は $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ を満たす定数とする。 w が偏角 α の複素数全体を動くとき, xy 平面上の点 (x, y) の軌跡を求めよ。

10

[東京大]

複素数平面上の原点以外の点 z に対して、 $w = \frac{1}{z}$ とする。

- (1) α を 0 でない複素数とし、点 α と原点 O を結ぶ線分の垂直二等分線を L とする。点 z が直線 L 上を動くとき、点 w の軌跡は円から 1 点を除いたものになる。この円の中心と半径を求めよ。
- (2) 1 の 3 乗根のうち、虚部が正であるものを β とする。点 β と点 β^2 を結ぶ線分上を点 z が動くときの点 w の軌跡を求め、複素数平面上に図示せよ。

11

[北海道大]

複素数平面上に3点 O, A, B を頂点とする $\triangle OAB$ がある。ただし、 O は原点とする。 $\triangle OAB$ の外心を P とする。3点 A, B, P が表す複素数を、それぞれ α, β, z とするとき、 $\alpha\beta = z$ が成り立つとする。

- (1) 複素数 α の満たすべき条件を求め、点 $A(\alpha)$ が描く図形を複素数平面上に図示せよ。
- (2) 点 $P(z)$ の存在範囲を求め、複素数平面上に図示せよ。

12

[東京工大]

実数 a, b, c に対して $F(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1$, $f(x) = x^2 + cx + 1$ とおく。
また, 複素数平面内の単位円周から 2 点 $1, -1$ を除いたものを T とする。

- (1) $f(x) = 0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を c を用いて表せ。
- (2) $F(x) = 0$ の解がすべて T 上にあるならば, $F(x) = (x^2 + c_1x + 1)(x^2 + c_2x + 1)$ を満たす実数 c_1, c_2 が存在することを示せ。
- (3) $F(x) = 0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を a, b を用いて表し, それを満たす点 (a, b) の範囲を座標平面上に図示せよ。

13

[千葉大]

複素数 $z = \cos \frac{2\pi}{9} + i \sin \frac{2\pi}{9}$ に対し, $\alpha = z + z^8$ とおく。 $f(x)$ は整数係数の 3 次多項式で, 3 次の係数が 1 であり, かつ $f(\alpha) = 0$ となるものとする。ただし, すべての係数が整数である多項式を, 整数係数の多項式という。

- (1) $f(x)$ を求めよ。ただし, $f(x)$ がただ 1 つに決まることは証明しなくてよい。
- (2) 3 次方程式 $f(x) = 0$ の α 以外の 2 つの解を, α の 2 次以下の, 整数係数の多項式の形で表せ。

14

[九州大]

α を複素数とする。等式 $\alpha(|z|^2 + 2) + i(2|\alpha|^2 + 1)\bar{z} = 0$ を満たす複素数 z をすべて求めよ。ただし、 i は虚数単位である。

15

[北海道大]

$z + \frac{4}{z}$ が実数となるような 0 と異なる複素数 z の全体を D とする。

- (1) D を複素数平面上に図示せよ。
- (2) k を実数とする。 D に属する z で方程式 $k\left(z + \frac{4}{z} + 8\right) = i\left(z - \frac{4}{z}\right)$ を満たすものが存在するような k の値の範囲を求めよ。ただし、 i は虚数単位を表す。

16

[東北大]

α を複素数とする。複素数 z の方程式 $z^2 - \alpha z + 2i = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$ について、以下の問いに答えよ。ただし、 i は虚数単位である。

- (1) 方程式 $\textcircled{1}$ が実数解をもつように α が動くとき、点 α が複素数平面上に描く図形を図示せよ。
- (2) 方程式 $\textcircled{1}$ が絶対値1の複素数を解にもつように α が動くとする。原点を中心に α を $\frac{\pi}{4}$ 回転させた点を表す複素数を β とするとき、点 β が複素数平面上に描く図形を図示せよ。

17

[熊本大]

複素数平面上で $|z+i|-|z-i|=1$ を満たす点 z の全体を H とおく。以下の問いに答えよ。ただし、複素数の偏角 θ の範囲は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

- (1) H の点 z に対して、 z の偏角 θ_1 のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) H の点 z に対して $w = \frac{1}{z}$ とする。 w の絶対値 r_2 と偏角 θ_2 のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ。

18

[筑波大]

複素数 α に対して、複素数平面上の 3 点 $O(0)$, $A(\alpha)$, $B(\alpha^2)$ を考える。次の条件

(I), (II), (III) をすべて満たす複素数 α 全体の集合を S とする。

- (I) α は実数でも純虚数でもない。
- (II) $|\alpha| > 1$ である。
- (III) 三角形 OAB は直角三角形である。

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) α が S に属するとき、 $\angle OAB = \frac{\pi}{2}$ であることを示せ。
- (2) 集合 S を複素数平面上に図示せよ。
- (3) x, y を $\alpha^2 = x + yi$ を満たす実数とする。 α が S を動くとき、 xy 平面上の点 (x, y) の軌跡を求め、図示せよ。

19

[広島大]

複素数平面上の 4 点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$, $D(\delta)$ を頂点とする四角形 $ABCD$ を考える。ただし、四角形 $ABCD$ は、すべての内角が 180° より小さい四角形（凸四角形）であるとする。また、四角形 $ABCD$ の頂点は反時計回りに A, B, C, D の順に並んでいるとする。四角形 $ABCD$ の外側に、4 辺 AB, BC, CA, DA をそれぞれ斜辺とする直角二等辺三角形 APB, BQC, CRD, DSA を作る。次の問いに答えよ。

- (1) 点 P を表す複素数を求めよ。
- (2) 四角形 $PQRS$ が平行四辺形であるための必要十分条件は、四角形 $ABCD$ がどのような四角形であることか答えよ。
- (3) 四角形 $PQRS$ が平行四辺形であるならば、四角形 $PQRS$ は正方形であることを示せ。