$\boxed{1}$ ［筑波大］

(1)　$\alpha\overline{z}+\overline{\alpha}z=|z|^2$ より，$|z|^2-\alpha\overline{z}-\overline{\alpha}z=0$ となり，$|z|^2-\alpha\overline{z}-\overline{\alpha}z+\alpha\overline{\alpha}=\alpha\overline{\alpha}$ から，

$$(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})=|\alpha|^2,\ |z-\alpha|^2=|\alpha|^2,\ |z-\alpha|=|\alpha|$$

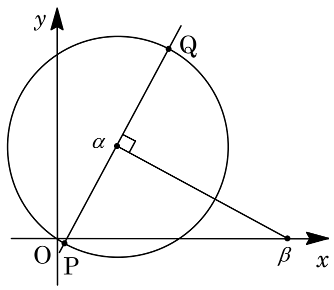
よって，z の描く図形 C は，点 α を中心とし半径が $|\alpha|$ の円である。すなわち，原点を通る円となる。

(2)　α は虚数，β は正の実数より，$\beta-\overline{\alpha}=\overline{\beta-\alpha}$ である。

さて，$w=(z-\alpha)(\beta-\overline{\alpha})$ とおくと，

$$w=(z-\alpha)(\overline{\beta-\alpha})=\frac{(z-\alpha)(\overline{\beta-\alpha})(\beta-\alpha)}{(\beta-\alpha)}=\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}|\beta-\alpha|^2$$

ここで，w は純虚数より，$\dfrac{z-\alpha}{\beta-\alpha}$ は純虚数となる。



すると，z の描く図形 L は，点 α を通り，点 α と点 β を結ぶ線分に垂直な直線 $(z\neq\alpha)$ であり，C と L は 2 つの共有点をもつ。この 2 点を P, Q とすると，P, Q は円 C の直径の両端となるので，

$$\mathrm{PQ}=2|\alpha|=2\sqrt{\alpha\overline{\alpha}}$$

(3)　$\mathrm{R}(\beta)$ としたとき，$\mathrm{RP}=\mathrm{RQ}$ から，$\triangle\mathrm{PQR}$ が正三角形になる条件は，$\angle\mathrm{PQR}=\dfrac{\pi}{3}$ より，

$$|\beta-\alpha|=\sqrt{3}|\alpha|,\ (\beta-\alpha)(\beta-\overline{\alpha})=3\alpha\overline{\alpha},\ \beta^2-(\alpha+\overline{\alpha})\beta-2\alpha\overline{\alpha}=0$$

すると，$\beta>0$ より，$\beta=\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}+\sqrt{(\alpha+\overline{\alpha})^2+8\alpha\overline{\alpha}}}{2}=\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}+\sqrt{\alpha^2+10\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}^2}}{2}$

［解　説］

現行課程で復活した複素数と図形の問題です。複素数平面上で，円と直線の表現方法が問われています。

2　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［千葉大］

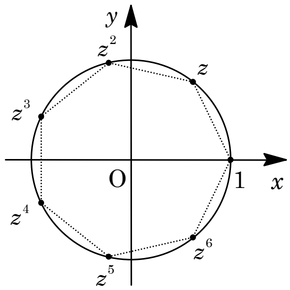
(1)　$z=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$ に対して，$z^7=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$ となり，

$$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=\frac{z(z^6-1)}{z-1}=\frac{z^7-z}{z-1}=\frac{1-z}{z-1}=-1$$

(2)　$\alpha=z+z^2+z^4$ とするとき，$\overline{\alpha}=\overline{z}+\overline{z^2}+\overline{z^4}=z^6+z^5+z^3$

$$\alpha+\overline{\alpha}=z+z^2+z^4+z^6+z^5+z^3=-1$$

$$\begin{aligned}\alpha\overline{\alpha}&=(z+z^2+z^4)(z^6+z^5+z^3)\\&=z^7+z^6+z^4+z^8+z^7+z^5+z^{10}+z^9+z^7\\&=3+z^6+z^4+z+z^5+z^3+z^2\\&=3-1=2\end{aligned}$$



よって，α，$\overline{\alpha}$ は２次方程式 $x^2+x+2=0$ の解より，

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$$

そして，α の虚部は $\overline{\alpha}$ の虚部より大きいので，$\alpha=\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}$ である。

(3)　$x^7=1$ の解は，$x=1$，z，z^2，z^3，z^4，z^5，z^6 より，

$$x^7-1=(x-1)(x-z)(x-z^2)(x-z^3)(x-z^4)(x-z^5)(x-z^6)$$

そして，$x^7-1=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$ より，

$$\begin{aligned}&x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\\&=(x-z)(x-z^2)(x-z^3)(x-z^4)(x-z^5)(x-z^6)\cdots\cdots\cdots(*)\end{aligned}$$

(*)に $x=1$ を代入すると，

$$(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)=7$$

［解　説］

１の n 乗根に関する超有名問題です。解答例に示した図がすべてと言っても構わない内容です。

３　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東北大］

(1)　$P(x)=\dfrac{(x+i)^7-(x-i)^7}{2i}=\dfrac{2({}_7\mathrm{C}_1x^6i+{}_7\mathrm{C}_3x^4i^3+{}_7\mathrm{C}_5x^2i^5+i^7)}{2i}$

$$=\frac{7ix^6-35ix^4+21ix^2-i}{i}=7x^6-35x^4+21x^2-1$$

ここで，$P(x)=a_0x^7+a_1x^6+a_2x^5+a_3x^4+a_4x^3+a_5x^2+a_6x+a_7$ から，

$$a_0=a_2=a_4=a_6=0,\ a_1=7,\ a_3=-35,\ a_5=21,\ a_7=-1$$

(2)　ド・モアブルの定理を用いると，

$$P\Big(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\Big)=\frac{1}{2i}\Big\{\Big(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+i\Big)^7-\Big(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-i\Big)^7\Big\}$$

$$=\frac{1}{2i\sin^7\theta}\{(\cos\theta+i\sin\theta)^7-(\cos\theta-i\sin\theta)^7\}$$

$$=\frac{1}{2i\sin^7\theta}\{(\cos7\theta+i\sin7\theta)-(\cos7\theta-i\sin7\theta)\}$$

$$=\frac{2i\sin7\theta}{2i\sin^7\theta}=\frac{\sin7\theta}{\sin^7\theta}\cdots\cdots\cdots(*)$$

(3)　$P(x)=a_1x^6+a_3x^4+a_5x^2+a_7$，$Q(x)=a_1x^3+a_3x^2+a_5x+a_7$ より，$x>0$ で，

$$Q(x)=P(\sqrt{x}\,)$$

さて，$\theta=\dfrac{\pi}{7}$ のとき $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}>0$，$\dfrac{\cos2\theta}{\sin2\theta}>0$，$\dfrac{\cos3\theta}{\sin3\theta}>0$ から，(＊)を用いて，

$$Q(x_1)=Q\Big(\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\Big)=P\Big(\Big|\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\Big|\Big)=P\Big(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\Big)=\frac{\sin7\theta}{\sin^7\theta}=\frac{\sin\pi}{\sin^7\theta}=0$$

$$Q(x_2)=Q\Big(\frac{\cos^22\theta}{\sin^22\theta}\Big)=P\Big(\Big|\frac{\cos2\theta}{\sin2\theta}\Big|\Big)=P\Big(\frac{\cos2\theta}{\sin2\theta}\Big)=\frac{\sin14\theta}{\sin^72\theta}=\frac{\sin2\pi}{\sin^72\theta}=0$$

$$Q(x_3)=Q\Big(\frac{\cos^23\theta}{\sin^23\theta}\Big)=P\Big(\Big|\frac{\cos3\theta}{\sin3\theta}\Big|\Big)=P\Big(\frac{\cos3\theta}{\sin3\theta}\Big)=\frac{\sin21\theta}{\sin^73\theta}=\frac{\sin3\pi}{\sin^73\theta}=0$$

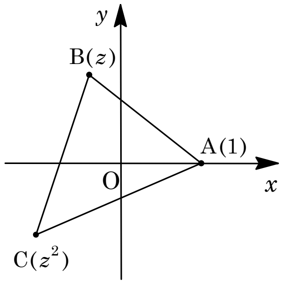
さらに，$x_1=\dfrac{1}{\tan^2\frac{\pi}{7}}$，$x_2=\dfrac{1}{\tan^2\frac{2\pi}{7}}$，$x_3=\dfrac{1}{\tan^2\frac{3\pi}{7}}$ なので，x_1，x_2，x_3 は互いに異なる。よって，x_1，x_2，x_3 は３次方程式 $Q(x)=0$ の異なる３つの解となり，

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{a_3}{a_1}=5$$

［解 説］

一見，複素数の難問という構成ですが，細かな誘導のため，それに従えば最後の結論まで導けるようになっています。ただ，いろいろな定理が絡んでいますが。

4　　　　［東京大］



3 点 A(1)，B(z)，C(z^2) に対し，△ABC は鋭角三角形より，まず $z\neq 1$ かつ $z^2\neq z$ かつ $z^2\neq 1$ より，

$$z\neq 0,\ z\neq \pm 1$$

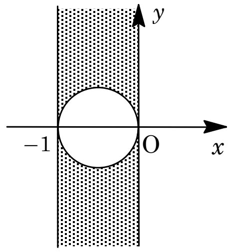
さて，$\angle\mathrm{CAB}<\dfrac{\pi}{2}$ から，$-\dfrac{\pi}{2}<\arg\dfrac{z^2-1}{z-1}<\dfrac{\pi}{2}$ となり，

$$-\frac{\pi}{2}<\arg(z+1)<\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}<\arg\{z-(-1)\}<\frac{\pi}{2}$$

すると，z は点 -1 を通り実軸に垂直な直線の右側にある。

次に，$\angle\mathrm{ABC}<\dfrac{\pi}{2}$ から，$-\dfrac{\pi}{2}<\arg\dfrac{z^2-z}{1-z}<\dfrac{\pi}{2}$ となり，$-\dfrac{\pi}{2}<\arg(-z)<\dfrac{\pi}{2}$

すると，$-z$ は虚軸の右側にあるので，z は虚軸の左側にある。



さらに，$\angle\mathrm{BCA}<\dfrac{\pi}{2}$ から，$-\dfrac{\pi}{2}<\arg\dfrac{z-z^2}{1-z^2}<\dfrac{\pi}{2}$ となり，

$$-\frac{\pi}{2}<\arg\frac{z}{1+z}<\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}<\arg\frac{0-z}{-1-z}<\frac{\pi}{2}$$

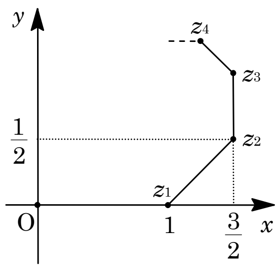
すると，z は原点と点 -1 を直径とする円の外部にある。

以上より，z の存在範囲は右図の網点部となる。ただし，境界線は含まない。

［解　説］

複素数平面についての問題です。鋭角三角形という条件を，偏角の言葉に翻訳して処理をしました。なお，余弦定理を利用する方法も考えられます。

5　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［広島大］



(1)　$\alpha=\dfrac{1+i}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$なので，点$\alpha z$は点 z を原点回りに$\dfrac{\pi}{4}$回転し，原点との距離$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$倍した点である。

すると，与えられた条件から，

$$z_{n+2}-z_{n+1}=\alpha(z_{n+1}-z_n)\cdots\cdots\cdots(*)$$

$$z_3=z_2+\alpha(z_2-z_1)=\frac{3+i}{2}+\frac{1+i}{2}\cdot\frac{1+i}{2}$$

$$=\frac{3+i}{2}+\frac{i}{2}=\frac{3+2i}{2}$$

$$z_4=z_3+\alpha(z_3-z_2)=\frac{3+2i}{2}+\frac{1+i}{2}\cdot\frac{i}{2}=\frac{3+2i}{2}+\frac{-1+i}{4}=\frac{5+5i}{4}$$

(2)　$(*)$より，$z_{n+1}-z_n=(z_2-z_1)\alpha^{n-1}=\dfrac{1+i}{2}\alpha^{n-1}=\alpha^n$となり，$n\geqq 2$で，

$$z_n=z_1+\sum_{k=1}^{n-1}\alpha^k=1+\sum_{k=1}^{n-1}\alpha^k=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k=\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$$

$n=1$のときも成立するので，$z_n=\dfrac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$である。

(3)　$n\to\infty$のとき$|\alpha^n|=|\alpha|^n=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\to 0$より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha^n=0$となり，

$$w=\lim_{n\to\infty}z_n=\frac{1}{1-\alpha}=\frac{2}{1-i}=1+i$$

(4)　(2)より，$z_n=\dfrac{1-\alpha^n}{1-\alpha}=(1+i)(1-\alpha^n)=(1+i)\left\{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left(\cos\dfrac{n}{4}\pi+i\sin\dfrac{n}{4}\pi\right)\right\}$

ここで，z_nの実部がwの実部 1 より大きくなることより，

$$1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\cos\frac{n}{4}\pi+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\sin\frac{n}{4}\pi>1,\ \sin\frac{n}{4}\pi-\cos\frac{n}{4}\pi>0$$

すると，$\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{n}{4}-\dfrac{1}{4}\right)\pi>0$となるので，$k$を 0 以上の整数として，

$$2k\pi<\left(\frac{n}{4}-\frac{1}{4}\right)\pi<(2k+1)\pi,\ 8k+1<n<8k+5$$

よって，$n=8k+2,\ 8k+3,\ 8k+4$である

［解 説］

複素数平面上の点の移動を題材にした頻出問題です。現行課程で復活し，日も浅いためなのか，問題文の説明が度を超えた丁寧さです。

6　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［筑波大］

(1)　$|z-1|=|z+1|$……①に対して，左辺は点 z と点 1 との距離，右辺は点 z と点 -1 との距離を表す。

これより，①を満たす点 z の全体は，点 1 と点 -1 を結ぶ線分の垂直二等分線，すなわち虚軸となる。

(2)　$w=\dfrac{z+1}{z}$ $(z\neq 0)$ より，$wz=z+1$ となり，$(w-1)z=1$ ………②

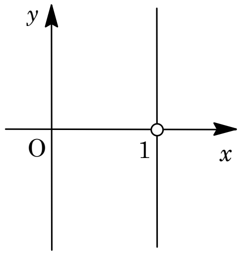
ここで，$w=1$ とすると②は成立しないので，$w\neq 1$ で $z=\dfrac{1}{w-1}$ ………③

③を①に代入すると，$\left|\dfrac{1}{w-1}-1\right|=\left|\dfrac{1}{w-1}+1\right|$ となり，$\left|\dfrac{2-w}{w-1}\right|=\left|\dfrac{w}{w-1}\right|$ から，

$$\frac{|2-w|}{|w-1|}=\frac{|w|}{|w-1|},\ |2-w|=|w|$$

すると，点 z が原点を除いた虚軸上を動くとき，点 w は点 2 と点 0 を結ぶ線分の垂直二等分線，すなわち点 1 を通り実軸に垂直な直線上を動く。ただし $w\neq 1$ から点 1 は除く。

図示すると，右図のようになる。



(3)　$a>0$ で $w=\dfrac{z+1}{z-a}$ より，$w(z-a)=z+1$ となり，$(w-1)z=aw+1$ ………④

ここで，$w=1$ とすると④は成立しないので，$w\neq 1$ で $z=\dfrac{aw+1}{w-1}$ ………⑤

⑤を①に代入すると，$\left|\dfrac{aw+1}{w-1}-1\right|=\left|\dfrac{aw+1}{w-1}+1\right|$ となり，

$$\left|\frac{(a-1)w+2}{w-1}\right|=\left|\frac{(a+1)w}{w-1}\right|,\ |(a-1)w+2|=|(a+1)w|$$

両辺を 2 乗して，$|(a-1)w+2|^2=(a+1)^2|w|^2$ より，

$$\{(a-1)w+2\}\{(a-1)\overline{w}+2\}=(a+1)^2w\overline{w}$$

$$4aw\overline{w}-2(a-1)w-2(a-1)\overline{w}=4,\ w\overline{w}-\frac{a-1}{2a}w-\frac{a-1}{2a}\overline{w}=\frac{1}{a}\ \text{………⑥}$$

⑥より，$\left(w-\dfrac{a-1}{2a}\right)\left(\overline{w}-\dfrac{a-1}{2a}\right)=\dfrac{1}{a}+\dfrac{(a-1)^2}{4a^2}$ となり，

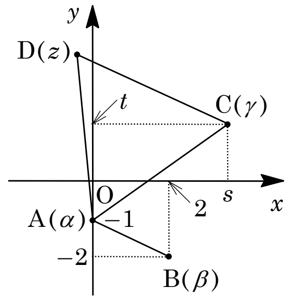
$$\left|w-\frac{a-1}{2a}\right|^2=\frac{(a+1)^2}{4a^2},\ \left|w-\frac{a-1}{2a}\right|=\frac{a+1}{2a}$$

よって，点 z が虚軸上を動くとき，点 w は中心 $\dfrac{a-1}{2a}$ で半径 $\dfrac{a+1}{2a}$ の円を描く。ただし，$w\neq 1$ から点 1 は除く。

［解 説］

複素数平面上の変換を問う問題です。(1)において，まず①を変形して，$z+\overline{z}=0$ という関係を導き，この式をもとに(2), (3)を解くという方法もあります。

７　　　　［熊本大］



(1)　$\alpha=-i$，$\beta=2-2i$，$\gamma=s+ti\ (s>0,\ t>0)$ に対し，複素数平面上に $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ をとる。

ここで，$\triangle\mathrm{ACD}$ が正三角形で，点 D が直線 AC に関して B と反対側にあることより，$\mathrm{D}(z)$ は $\mathrm{C}(\gamma)$ を $\mathrm{A}(\alpha)$ のまわりに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点となり，

$$z-\alpha=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)(\gamma-\alpha)$$

$$z=-i+\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)\{s+(t+1)i\}=-i+\frac{1}{2}\{s-\sqrt{3}t-\sqrt{3}+(\sqrt{3}s+t+1)i\}$$

$$=\frac{1}{2}(s-\sqrt{3}t-\sqrt{3})+\frac{1}{2}(\sqrt{3}s+t-1)i\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2)　与えられた条件 $4(\beta-\alpha)^2+(\gamma-\alpha)^2-2(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)=0$ より，

$$4+\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2-2\cdot\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=0,\quad \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=1\pm\sqrt{3}i$$

ここで，AC は AB を正の向きに回転したものなので，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=1+\sqrt{3}i$ となり，

$$\gamma=\alpha+(1+\sqrt{3}i)(\beta-\alpha)=-i+(1+\sqrt{3}i)(2-i)=2+\sqrt{3}+(-2+2\sqrt{3})i$$

すると，$s=2+\sqrt{3}$，$t=-2+2\sqrt{3}$ となるので，$(*)$から，

$$z=\frac{1}{2}(2+\sqrt{3}+2\sqrt{3}-6-\sqrt{3})+\frac{1}{2}(2\sqrt{3}+3-2+2\sqrt{3}-1)i$$

$$=-2+\sqrt{3}+2\sqrt{3}i$$

(3)　まず，xy 平面を対応させて，$\mathrm{A}(0,\ -1)$，$\mathrm{B}(2,\ -2)$，$\mathrm{C}(2+\sqrt{3},\ -2+2\sqrt{3})$，$\mathrm{D}(-2+\sqrt{3},\ 2\sqrt{3})$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(2+\sqrt{3},\ -1+2\sqrt{3}),\quad \overrightarrow{\mathrm{BD}}=(-4+\sqrt{3},\ 2+2\sqrt{3})$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ のなす角が θ となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2+(-1+2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{5}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|=\sqrt{(-4+\sqrt{3})^2+(2+2\sqrt{3})^2}=\sqrt{35}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=(2+\sqrt{3})(-4+\sqrt{3})+(-1+2\sqrt{3})(2+2\sqrt{3})=5$$

よって，$\cos\theta=\dfrac{5}{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{35}}=\dfrac{1}{2\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$ である。

［解 説］

複素数平面に関する標準的な問題です。(3)は慣れ親しんでいる xy 平面を対応させ，ベクトルの内積を利用しています。

８　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東北大］

(1)　$z\overline{z}+\alpha z+\beta\overline{z}+\gamma=0$ ……(＊)に対して，共役複素数をとると，

$$\overline{z}z+\overline{\alpha}\overline{z}+\overline{\beta}z+\overline{\gamma}=0 \cdots\cdots\cdots(＊＊)$$

(＊)と(＊＊)の両辺の差をとると，$(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}+\gamma-\overline{\gamma}=0$ ………①

(2)　γ は実数なので $\gamma=\overline{\gamma}$ となり，①より，

$$(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}=0,\ (\alpha-\overline{\beta})z=(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z} \cdots\cdots\cdots②$$

すると，②から $(\alpha-\overline{\beta})z=\overline{(\alpha-\overline{\beta})z}$ となり，$(\alpha-\overline{\beta})z$ は実数である。

そこで，k を実数として，$(\alpha-\overline{\beta})z=k$ ……③とおく。

(i)　$\alpha-\overline{\beta}=0$ のとき

(＊)から，$z\overline{z}+\overline{\beta}z+\beta\overline{z}+\gamma=0$ となるので，

$$(z+\beta)(\overline{z}+\overline{\beta})-\beta\overline{\beta}+\gamma=0,\ |z+\beta|^2=|\beta|^2-\gamma$$

ここで，γ は負の実数なので $|\beta|^2-\gamma>0$ となり，$|z+\beta|=\sqrt{|\beta|^2-\gamma}$

すると，複素数平面上で，点 z は点 $-\beta$ を中心とする半径 $\sqrt{|\beta|^2-\gamma}$ の円周上の点となり，無数に存在する。これより，z がちょうど 2 個あることに反する。

(ii)　$\alpha-\overline{\beta}\neq 0$ のとき

③から，$z=\dfrac{k}{\alpha-\overline{\beta}}=\dfrac{k}{|\alpha-\overline{\beta}|^2}(\overline{\alpha}-\beta)$ となり，(＊)に代入すると，

$$\frac{k^2}{|\alpha-\overline{\beta}|^2}+\alpha\cdot\frac{k}{|\alpha-\overline{\beta}|^2}(\overline{\alpha}-\beta)+\beta\cdot\frac{k}{|\alpha-\overline{\beta}|^2}(\alpha-\overline{\beta})+\gamma=0$$

$$k^2+k\alpha(\overline{\alpha}-\beta)+k\beta(\alpha-\overline{\beta})+\gamma|\alpha-\overline{\beta}|^2=0$$

ここで，$|\alpha|=|\beta|\neq 0$ から $\alpha\overline{\alpha}=\beta\overline{\beta}$ なので，$k^2+\gamma|\alpha-\overline{\beta}|^2=0$ となり，$-\gamma>0$，$|\alpha-\overline{\beta}|>0$ より，

$$k=\pm\sqrt{-\gamma}\,|\alpha-\overline{\beta}|$$

そして，この値を $k=k_1$，k_2 $(k_1<k_2)$ とおくと，$z=\dfrac{k_1}{\alpha-\overline{\beta}}$，$\dfrac{k_2}{\alpha-\overline{\beta}}$ となる。

(i)(ii)より，z がちょうど 2 個あるための必要十分条件は $\alpha-\overline{\beta}\neq 0$ である。

［解　説］

複素数に関する標準的な問題です。(1)で導いた式が(2)へのスムーズな誘導になっています。

9　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［京都大］

(1)　$w+\dfrac{1}{w}=x+yi$ ……①に対し，$|w|=R\ (R>1)$ のとき，θ を任意の実数として，

$$w=R(\cos\theta+i\sin\theta)\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$x+yi=R(\cos\theta+i\sin\theta)+\dfrac{1}{R}\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$ となり，

$$x+yi=\left(R+\frac{1}{R}\right)\cos\theta+i\left(R-\frac{1}{R}\right)\sin\theta$$

$$x=\left(R+\frac{1}{R}\right)\cos\theta\ \cdots\cdots\cdots③,\quad y=\left(R-\frac{1}{R}\right)\sin\theta\ \cdots\cdots\cdots④$$

③より $\cos\theta=\dfrac{R}{R^2+1}x$，④より $\sin\theta=\dfrac{R}{R^2-1}y$ なので，

$$\left(\frac{R}{R^2+1}\right)^2x^2+\left(\frac{R}{R^2-1}\right)^2y^2=1\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

よって，点$(x,\ y)$の軌跡は，⑤で表される楕円である。

(2)　$\arg w=\alpha\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，r を正の実数として，

$$w=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

(1)と同様にすると，①⑥より，$x+yi=\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\cos\alpha+i\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\alpha$ となり，

$$x=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\alpha\ \cdots\cdots\cdots⑦,\quad y=\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\alpha\ \cdots\cdots\cdots⑧$$

⑦より $r+\dfrac{1}{r}=\dfrac{x}{\cos\alpha}$，⑧より $r-\dfrac{1}{r}=\dfrac{y}{\sin\alpha}$ となり，

$$2r=\frac{x}{\cos\alpha}+\frac{y}{\sin\alpha}\ \cdots\cdots\cdots⑨,\quad \frac{2}{r}=\frac{x}{\cos\alpha}-\frac{y}{\sin\alpha}\ \cdots\cdots\cdots⑩$$

すると，⑨⑩より，

$$\left(\frac{x}{\cos\alpha}+\frac{y}{\sin\alpha}\right)\left(\frac{x}{\cos\alpha}-\frac{y}{\sin\alpha}\right)=4,\quad \frac{x^2}{4\cos^2\alpha}-\frac{y^2}{4\sin^2\alpha}=1\ \cdots\cdots\cdots⑪$$

ここで，$r>0$ から，$r+\dfrac{1}{r}\geqq 2\sqrt{r\cdot\dfrac{1}{r}}=2$，また $r-\dfrac{1}{r}$ は任意の値をとる。

すると，$\cos\alpha>0$，$\sin\alpha>0$ で，⑦から $x\geqq 2\cos\alpha$，⑧から y は任意の値をとる。

以上より，点$(x,\ y)$の軌跡は，⑪で表される双曲線である。ただし，$x\geqq 2\cos\alpha$ の部分である。

［解　説］

複素数と軌跡に関する標準的な問題です。なお，(2)では x に限界があり，軌跡は双曲線の右の枝になります。

$\boxed{10}$ ［東京大］

(1)　条件より，$z \neq 0$ のとき $w = \dfrac{1}{z}$ から，$z = \dfrac{1}{w}\ (w \neq 0)$ ………①

さて，点 z が点 $\alpha\ (\alpha \neq 0)$ と原点 O を結ぶ線分の垂直二等分線 L 上を動くとき，

$$|z| = |z - \alpha| \text{………②}$$

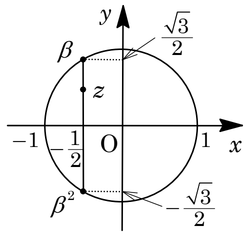
①を②に代入すると，$\left|\dfrac{1}{w}\right| = \left|\dfrac{1}{w} - \alpha\right|$，$\dfrac{1}{|w|} = \dfrac{|1 - \alpha w|}{|w|}$ となり，

$$|1 - \alpha w| = 1,\ |-\alpha|\left|w - \frac{1}{\alpha}\right| = 1,\ \left|w - \frac{1}{\alpha}\right| = \frac{1}{|\alpha|}$$

よって，点 w の軌跡は，中心 $\dfrac{1}{\alpha}$ で半径 $\dfrac{1}{|\alpha|}$ の円である。ただし，$w \neq 0$ より，原点は除く。

(2)　$x^3 = 1$ の解は，$(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$ より，$x = 1,\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ である。

すると，条件より，$\beta = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$，$\beta^2 = \dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ となる。

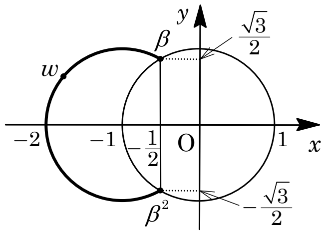


ここで，点 β と点 β^2 を結ぶ直線は，(1)で $\alpha = -1$ として表すことができるので，点 z が点 β と点 β^2 を結ぶ線分上を動くとき，

$$|z| = |z + 1| \text{………③},\ |z| \leqq 1 \text{………④}$$

①③より，$|w + 1| = 1\ (w \neq 0)$ ………⑤

①④より，$\left|\dfrac{1}{w}\right| \leqq 1$ となり，$\dfrac{1}{|w|} \leqq 1$ から，$|w| \geqq 1$ ………⑥



⑤⑥より，点 w の軌跡は，点 -1 を中心とする半径 1 の円周上で，原点を中心とする半径 1 の円の外部または周上の部分となる。

図示すると，右図の太線の弧である。ただし，両端点 β，β^2 は含む。

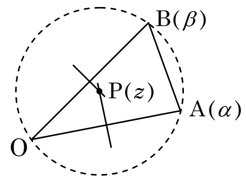
［解　説］

複素数平面上の変換を題材とした基本的な問題です。直線や円の絶対値による表現方法が問われています。

11 ［北海道大］

(1) 原点O, 点A(α), 点B(β)を頂点とする△OABについて,

$$\alpha\neq 0,\ \beta\neq 0,\ \alpha\neq\beta\cdots\cdots\cdots①$$



このとき, 点P(z)は△OABの外心なので, 辺OAおよび辺OBの垂直二等分線の交点となり,

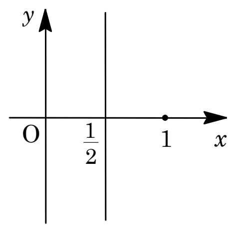
$$|z|=|z-\alpha|\cdots\cdots\cdots②,\ |z|=|z-\beta|\cdots\cdots\cdots③$$

ここで, $z=\alpha\beta$を②に代入すると, $|\alpha\beta|=|\alpha\beta-\alpha|$となり, ①から$|\alpha|\neq 0$より,

$$|\alpha||\beta|=|\alpha||\beta-1|,\ |\beta|=|\beta-1|\cdots\cdots\cdots④$$

同様に, $z=\alpha\beta$を③に代入すると, $|\alpha\beta|=|\alpha\beta-\beta|$となり, ①から$|\beta|\neq 0$より,

$$|\alpha||\beta|=|\alpha-1||\beta|,\ |\alpha|=|\alpha-1|\cdots\cdots\cdots⑤$$



④⑤より, 点A(α), 点B(β)は, ともに原点と点1を結ぶ線分の垂直二等分線上にある。ただし, ①から$\alpha\neq\beta$である。

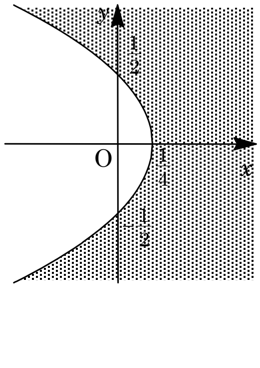
以上より, αの満たすべき条件は$|\alpha|=|\alpha-1|$であり, 点A(α)の描く図形は右図の直線である。

(2) (1)より, $\alpha=\dfrac{1}{2}+ai$, $\beta=\dfrac{1}{2}+bi$　$(a\neq b)$とおくことができ,

$$z=\alpha\beta=\Big(\frac{1}{2}+ai\Big)\Big(\frac{1}{2}+bi\Big)=\Big(\frac{1}{4}-ab\Big)+\frac{1}{2}(a+b)i$$

ここで, $z=x+yi$とおくと, $x=\dfrac{1}{4}-ab$, $y=\dfrac{1}{2}(a+b)$となり,

$$a+b=2y\cdots\cdots\cdots⑥,\ ab=\frac{1}{4}-x\cdots\cdots\cdots⑦$$



⑥⑦より, a, b $(a\neq b)$は, tについての2次方程式$t^2-2yt+\Big(\dfrac{1}{4}-x\Big)=0$の異なる実数解となり, その条件は,

$$D/4=y^2-\Big(\frac{1}{4}-x\Big)>0,\ y^2>-\Big(x-\frac{1}{4}\Big)$$

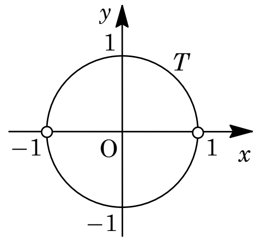
よって, 点P(z)の存在範囲を図示すると, 右図の網点部となる。ただし, 境界は領域に含まない。

［解　説］

複素数と図形に領域が絡んだ問題です。(1)は共役複素数を用いた形で, $\alpha+\overline{\alpha}=1$を結論としてもよいでしょう。なお, O, A, Bが一直線上にないということについては, (1)の結果から満たしていることがわかります。

$\boxed{12}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京工大］

(1)　$f(x)=x^2+cx+1$ (c は実数)に対して，$f(x)=0$ の解がすべて T 上にある条件は, 2 つの解がともに虚数で，しかも絶対値が 1 ということである。



そこで，解を $x=\alpha$，$\overline{\alpha}$ とおくと，解と係数の関係から $\alpha\overline{\alpha}=1$ ($|\alpha|^2=1$) となり，$|\alpha|=1$ は満たされている。

よって，求める条件は，解が虚数すなわち $D=c^2-4<0$ から $-2<c<2$ である。

(2)　$F(x)=x^4+ax^3+bx^2+ax+1$ (a, b は実数)に対して，$F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるとき，4 つの解はすべて虚数で，しかも絶対値が 1 である。これより，解を $x=\alpha$，$\overline{\alpha}$，β，$\overline{\beta}$ とおき，$F(x)$ の x^4 の係数が 1 であることに注意すると，

$$F(x)=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})(x-\beta)(x-\overline{\beta})$$
$$=\{x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha}\}\{x^2-(\beta+\overline{\beta})x+\beta\overline{\beta}\}$$

ここで，$\alpha\overline{\alpha}=|\alpha|^2=1$，$\beta\overline{\beta}=|\beta|^2=1$ で，また $\alpha+\overline{\alpha}$，$\beta+\overline{\beta}$ はともに実数なので，それぞれ $-c_1$，$-c_2$ とおくと，$F(x)=(x^2+c_1x+1)(x^2+c_2x+1)$ と表せる。

(3)　$F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件は, (1)(2)から,

$$F(x)=(x^2+c_1x+1)(x^2+c_2x+1)\quad(-2<c_1<2\,,\ -2<c_2<2)$$

すると，$F(x)=x^4+(c_1+c_2)x^3+(c_1c_2+2)x^2+(c_1+c_2)x+1$ となり，

$$c_1+c_2=a\cdots\cdots\text{①},\ c_1c_2+2=b\cdots\cdots\text{②}$$

①②より，c_1，c_2 は 2 次方程式 $t^2-at+(b-2)=0\cdots\cdots$③の 2 つの解となる。

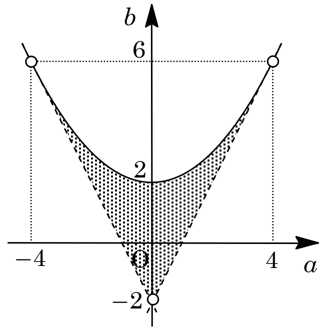
ここで，③の左辺を $g(t)$ とおき変形すると，$g(t)=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+b-2$ となり，$g(t)=0$ の解がともに $-2<t<2$ から，求める条件は，

$$-\frac{a^2}{4}+b-2\leqq 0\cdots\cdots\text{④},\ -2<\frac{a}{2}<2\cdots\cdots\text{⑤},\ g(-2)=2+2a+b>0\cdots\cdots\text{⑥}$$
$$g(2)=2-2a+b>0\cdots\cdots\text{⑦}$$

④～⑦をまとめると，$b\leqq\dfrac{a^2}{4}+2$，$-4<a<4$

$$b>-2a-2\,,\ b>2a-2$$

点 $(a,\ b)$ の範囲を図示すると，右図の網点部となる。ただし，実線の境界線のみ領域に含む。



［解　説］

複素数と方程式の標準的な問題です。丁寧な誘導のため，結論に至る流れはスムーズです。

$\boxed{13}$ ［千葉大］

(1)　$z=\cos\dfrac{2\pi}{9}+i\sin\dfrac{2\pi}{9}$ のとき，$z^9=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$ となり，

$$z^8=\frac{1}{z}=\cos\Big(-\frac{2\pi}{9}\Big)+i\sin\Big(-\frac{2\pi}{9}\Big)=\cos\frac{2\pi}{9}-i\sin\frac{2\pi}{9}$$

すると，$\alpha=z+z^8=2\cos\dfrac{2\pi}{9}$ となり，$\cos\dfrac{2\pi}{9}=\dfrac{\alpha}{2}$ ………①

ここで，3 倍角の公式より，$\cos\dfrac{2\pi}{3}=4\cos^3\dfrac{2\pi}{9}-3\cos\dfrac{2\pi}{9}$ となるので，①より，

$$-\frac{1}{2}=4\cdot\frac{\alpha^3}{8}-3\cdot\frac{\alpha}{2},\ -1=\alpha^3-3\alpha,\ \alpha^3-3\alpha+1=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

②より，α は $x^3-3x+1=0$ の解なので，$f(x)=x^3-3x+1$ となる。

(2)　$f(x)$ を $x-\alpha$ で割ると，②から，$f(x)=(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2-3)$

すると，$f(x)=0$ の α 以外の 2 つの解は，

$$x=\frac{-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4(\alpha^2-3)}}{2}=\frac{-\alpha\pm\sqrt{12-3\alpha^2}}{2}\ \cdots\cdots\cdots③$$

ここで，①から，$12-3\alpha^2=12-3\cdot 4\cos^2\dfrac{2\pi}{9}=12\sin^2\dfrac{2\pi}{9}$ となるので，③より，

$$x=-\cos\frac{2\pi}{9}\pm\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{9}=2\Big(-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{9}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{2\pi}{9}\Big)$$
$$=2\Big(\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{9}\pm\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{9}\Big)=2\cos\Big(\frac{2\pi}{3}\mp\frac{2\pi}{9}\Big)$$

よって，$x=2\cos\dfrac{4\pi}{9}$ または $x=2\cos\dfrac{8\pi}{9}$ となり，①②より，

$$2\cos\frac{4\pi}{9}=2\Big(2\cos^2\frac{2\pi}{9}-1\Big)=4\cdot\frac{\alpha^2}{4}-2=\alpha^2-2$$
$$2\cos\frac{8\pi}{9}=2\Big(2\cos^2\frac{4\pi}{9}-1\Big)=(\alpha^2-2)^2-2=\alpha^4-4\alpha^2+2$$
$$=\alpha(3\alpha-1)-4\alpha^2+2=-\alpha^2-\alpha+2$$

以上より，$f(x)=0$ の α 以外の 2 つの解は，α^2-2，$-\alpha^2-\alpha+2$ である。

［解　説］

複素数の極形式についての問題です。3 倍角の公式がポイントになりますが，問題文にその利用が暗示されています。また，解と係数の関係を併用すると，解答例が少し簡略になります。

14　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［九州大］

まず，与えられた等式 $\alpha(|z|^2+2)+i(2|\alpha|^2+1)\overline{z}=0$ に対して，

$$-i(2|\alpha|^2+1)\overline{z}=\alpha(|z|^2+2)\cdots\cdots\cdots①$$

①の両辺に共役複素数をとると，$i(2|\alpha|^2+1)z=\overline{\alpha}(|z|^2+2)\cdots\cdots\cdots②$

①×②より，$(2|\alpha|^2+1)^2z\overline{z}=\alpha\overline{\alpha}(|z|^2+2)^2$ となり，

$$(2|\alpha|^2+1)^2|z|^2=|\alpha|^2(|z|^2+2)^2,\ (2|\alpha|^2+1)|z|=|\alpha|(|z|^2+2)$$

$|z|$ についてまとめると，$|\alpha||z|^2-(2|\alpha|^2+1)|z|+2|\alpha|=0\cdots\cdots\cdots③$

(i)　$|\alpha|=0\ (\alpha=0)$ のとき　③より $|z|=0$ となり，$z=0$ である。

(ii)　$|\alpha|\neq 0\ (\alpha\neq 0)$ のとき　③より $(|\alpha||z|-1)(|z|-2|\alpha|)=0$ となり，

$$|z|=\frac{1}{|\alpha|},\ |z|=2|\alpha|$$

(ii-i)　$|z|=\dfrac{1}{|\alpha|}$ のとき　$|z|^2+2=\dfrac{1}{|\alpha|^2}+2=\dfrac{1+2|\alpha|^2}{|\alpha|^2}$ となり，②より，

$$z=\frac{\overline{\alpha}(|z|^2+2)}{i(2|\alpha|^2+1)}=\frac{\overline{\alpha}}{i(2|\alpha|^2+1)}\cdot\frac{1+2|\alpha|^2}{|\alpha|^2}=\frac{1}{i\alpha}=-\frac{i}{\alpha}$$

(ii-ii)　$|z|=2|\alpha|$ のとき　$|z|^2+2=4|\alpha|^2+2=2(2|\alpha|^2+1)$ となり，②より，

$$z=\frac{\overline{\alpha}(|z|^2+2)}{i(2|\alpha|^2+1)}=\frac{2\overline{\alpha}(2|\alpha|^2+1)}{i(2|\alpha|^2+1)}=\frac{2\overline{\alpha}}{i}=-2i\overline{\alpha}$$

［解　説］

複素数の計算についての問題です。題意は，与えられた等式から z を求めるわけですが，上の解答例では，$z\overline{z}=|z|^2$ という関係式を用いて邪魔な $\overline{z}$ を消去するという方針を立て，$|z|$ についての方程式③を導いています。

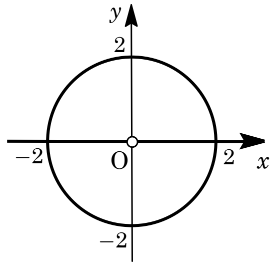
$\boxed{15}$ ［北海道大］

(1)　$z \neq 0$ のとき，$z+\dfrac{4}{z}$ が実数なので，$z+\dfrac{4}{z}=\overline{z}+\dfrac{4}{\overline{z}}$ となり，

$$z\overline{z}(z-\overline{z})+4(\overline{z}-z)=0,\ (z-\overline{z})(z\overline{z}-4)=0$$

$$(z-\overline{z})(|z|^2-4)=0$$

よって，$z=\overline{z}$ または $|z|=2$ から，z は 0 でない実数または絶対値が 2 の複素数である。これを複素数平面上に図示すると，右図の太線部となる。ただし，原点は除く。



(2)　k を実数とし，方程式 $k\left(z+\dfrac{4}{z}+8\right)=i\left(z-\dfrac{4}{z}\right)$……①に対して，(1)から，

(i)　z が実数 $(z\neq 0)$ のとき

$k\left(z+\dfrac{4}{z}+8\right)$ および $z-\dfrac{4}{z}$ は実数より，$z-\dfrac{4}{z}\neq 0$ のときは①が成立しない。

すると，$z-\dfrac{4}{z}=0$ から $z=\pm 2$ となり，このとき $k=0$ である。

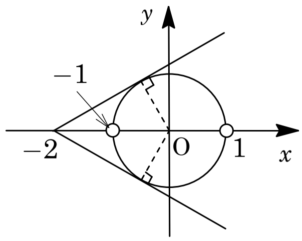
(ii)　z が $|z|=2$ を満たす虚数のとき

$z=2(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(\sin\theta\neq 0)$ と表せ，$\dfrac{4}{z}=2(\cos\theta-i\sin\theta)$ から，

$$z+\frac{4}{z}=4\cos\theta,\ z-\frac{4}{z}=4i\sin\theta$$

①に代入すると，$k(4\cos\theta+8)=-4\sin\theta$，$k=-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta+2}$ ………②

②から，$-k=\dfrac{\sin\theta-0}{\cos\theta-(-2)}$ と表せ，$-k$ は原点が中心の単位円周上の点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ と点 $(-2,\ 0)$ を結ぶ線分の傾きとなる。



そこで，$\sin\theta\neq 0$ に注意し，右図の円の接線と x 軸のなす角が $\pm 30^\circ$ から，$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leqq -k\leqq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $(k\neq 0)$ となり，

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\leqq k\leqq\frac{1}{\sqrt{3}}\quad (k\neq 0)$$

(i)(ii)より，①が成り立つ k の値の範囲は，$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leqq k\leqq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。

［解　説］

複素数についての総合的な問題です。(1)では「z が実数 $\Leftrightarrow$ $z=\overline{z}$」に着目して数式処理をしています。また，(2)は①式の形から極形式を設定しました。なお，後半は微分法の利用でも構いませんが，上記の線分の傾きを対応させる方法も有名です。

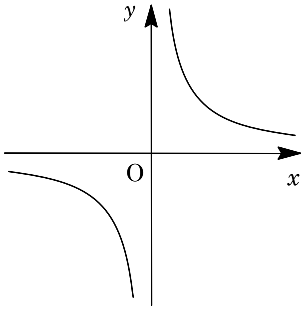
16 ［東北大］

(1) 複素数αに対し，複素数 z の方程式 $z^2-\alpha z+2i=0$ ……①について，$z=0$ では成立しないことより$z\neq 0$となり，①より，

$$\alpha=\frac{z^2+2i}{z}=z+\frac{2i}{z}\ \cdots\cdots\text{②}$$

さて，方程式①が実数解をもつとき，t を実数として$z=t$ を②に代入すると，

$$\alpha=t+\frac{2}{t}i\ \cdots\cdots\text{③}$$



ここで，$\alpha=x+yi$ とおくと，③より，

$$x=t,\ \ y=\frac{2}{t}$$

これより，点αは複素数平面上で双曲線$y=\dfrac{2}{x}$を描く。図示すると，右図のようになる。

(2) 方程式①が絶対値 1 の複素数を解にもつとき，θを実数として，$z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおくと，$\dfrac{1}{z}=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)=\cos\theta-i\sin\theta$

②に代入すると，$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta+2i(\cos\theta-i\sin\theta)$から，

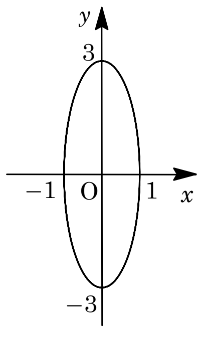
$$\alpha=(\cos\theta+2\sin\theta)+i(2\cos\theta+\sin\theta)\ \cdots\cdots\text{④}$$

さて，点αを原点を中心に$\dfrac{\pi}{4}$回転させた点βは,

$$\beta=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\alpha\ \cdots\cdots\text{⑤}$$

④⑤より，$\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\{(\cos\theta+2\sin\theta)+i(2\cos\theta+\sin\theta)\}$となり，

$$\begin{aligned}\beta&=\frac{\sqrt{2}}{2}\{(-\cos\theta+\sin\theta)+3i(\sin\theta+\cos\theta)\}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{-\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+3\sqrt{2}i\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right\}\\&=-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+3i\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\ \cdots\cdots\text{⑥}\end{aligned}$$



ここで，$\beta=x+yi$ とおくと，⑥より，

$$x=-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right),\ \ y=3\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

これより，点βは複素数平面上で楕円$x^2+\dfrac{y^2}{9}=1$を描く。図示すると，右図のようになる。

［解 説］

複素数平面上の軌跡に関する問題です。点αや点βの軌跡を求めるので，与えられた①ではなく，変形した②をもとに計算を進めています。

17 ［熊本大］

(1)　複素数平面上で，A(i)，B$(-i)$，P(z) とおくと，$|z+i|-|z-i|=1$ より，

$$\mathrm{BP}-\mathrm{AP}=1$$

すると，点 P の描く図形 H は 2 点 A, B を焦点とする双曲線である。

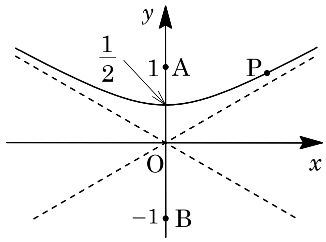
ここで，$z=x+yi$ とおき，$H:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ とすると，$c=1$ かつ $2b=1$ で，

$$a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

これより，$H:\dfrac{4x^2}{3}-4y^2=-1$ となり，漸近線は，

$$y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x$$

ただし，BP > AP より $y>0$ であり，図形 H を図示すると右図の曲線となる。



そして，2 本の漸近線と実軸の正の向きとのなす角が $\pm\dfrac{\pi}{6}$ より，z の偏角 θ_1 のとりうる値の範囲は，$0\leqq\theta_1<2\pi$ で考えると，$\dfrac{\pi}{6}<\theta_1<\dfrac{5}{6}\pi$ である。

(2)　$w=\dfrac{1}{z}$ のとき，$r_2=|w|=\dfrac{1}{|z|}$ となり，(1)より $|z|\geqq\dfrac{1}{2}$ なので $0<r_2\leqq 2$ である。

また，n を整数として，$\theta_2=\arg w=\arg\dfrac{1}{z}=2n\pi-\arg z=2n\pi-\theta_1$ より，

$$2n\pi-\frac{5}{6}\pi<\theta_2<2n\pi-\frac{\pi}{6}$$

$0\leqq\theta_2<2\pi$ より $n=1$ として，$\dfrac{7}{6}\pi<\theta_2<\dfrac{11}{6}\pi$ である。

［解　説］

双曲線の絡んだ複素数と図形の基本的な問題です。(1)は，x と y を用いて絶対値の計算を行っても構いません。

$\boxed{18}$ ［筑波大］

(1)　3 点 $\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\alpha^2)$ に対して，$\triangle\mathrm{OAB}$ は直角三角形より，

(a)　$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$\arg\alpha=\theta$ とおくと $\arg\alpha^2=2\theta$ となり，n を整数として，

$$2\theta-\theta=\frac{\pi}{2}+n\pi,\ \ \theta=\frac{\pi}{2}+n\pi$$

ところが，これは α が純虚数でないことに反する。

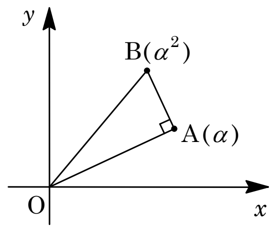
(b)　$\angle\mathrm{OBA}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき　辺 OA が斜辺となるので，$\mathrm{OA}>\mathrm{OB}$ となり，

$$|\alpha|>|\alpha^2|=|\alpha|^2,\ \ 1>|\alpha|$$

ところが，これは $|\alpha|>1$ に反する。

(a)(b)より，$\angle\mathrm{OAB}=\dfrac{\pi}{2}$ である。

(2)　$\angle\mathrm{OAB}=\dfrac{\pi}{2}$ より，$\mathrm{OB}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{AB}^2$ となり，



$$|\alpha^2|^2=|\alpha|^2+|\alpha^2-\alpha|^2$$

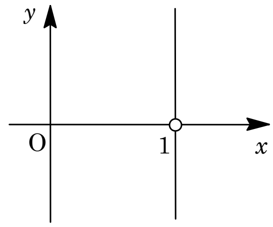
すると，$\alpha^2\overline{\alpha^2}=\alpha\overline{\alpha}+(\alpha^2-\alpha)(\overline{\alpha^2-\alpha})$ から，

$$\begin{aligned}\alpha^2(\overline{\alpha})^2&=\alpha\overline{\alpha}+(\alpha^2-\alpha)\{(\overline{\alpha})^2-\overline{\alpha}\}\\&=\alpha\overline{\alpha}+\alpha^2(\overline{\alpha})^2-\alpha^2\overline{\alpha}-\alpha(\overline{\alpha})^2+\alpha\overline{\alpha}\end{aligned}$$

これより，$2\alpha\overline{\alpha}-\alpha^2\overline{\alpha}-\alpha(\overline{\alpha})^2=0$ となり，

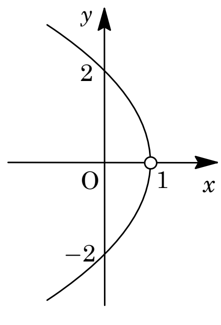
$$\alpha\overline{\alpha}(2-\alpha-\overline{\alpha})=0$$

$\alpha\overline{\alpha}>0$ より，$2-\alpha-\overline{\alpha}=0$ となり，$\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}=1$



よって，α の実部は 1 となるので，α 全体を図示すると右図の直線である。ただし，$\alpha=1$ は除く。

(3)　(2)より，0 でない実数 k をとり，$\alpha=1+ki$ とおくと，



$$\alpha^2=(1+ki)^2=1-k^2+2ki\ (k\neq0)$$

ここで，$\alpha^2=x+yi$ なので，$x=1-k^2$，$y=2k$ となり，

$$x=1-\frac{y^2}{4}\quad(y\neq0)$$

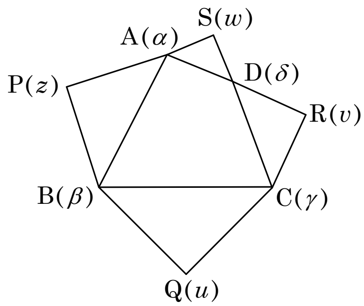
よって，点 $(x,\ y)$ の軌跡を図示すると，右図の放物線となる。ただし，点 $(1,\ 0)$ は除く。

［解　説］

複素数と図形についての標準的な問題です。(2)はいろいろな方法が考えられますが，解答例では三平方の定理を利用しました。

19 **[広島大]**

(1) 複素数平面上で，A(α)，B(β)，C(γ)，D(δ)を頂点とする四角形 ABCD に対し，その外側に 4 辺 AB, BC, CA, DA をそれぞれ斜辺とする直角二等辺三角形 APB, BQC, CRD, DSA を作る。このとき，P(z)，Q(u)，R(v)，S(w)とおく。



すると，P は B を中心に A を$\dfrac{\pi}{4}$回転し，距離を$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$倍したものとなり，

$$z-\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\Big)(\alpha-\beta)=\frac{1+i}{2}(\alpha-\beta)$$

よって，$z=\dfrac{1+i}{2}\alpha+\dfrac{1-i}{2}\beta$である。

(2) (1)と同様にして，$u=\dfrac{1+i}{2}\beta+\dfrac{1-i}{2}\gamma$，$v=\dfrac{1+i}{2}\gamma+\dfrac{1-i}{2}\delta$，$w=\dfrac{1+i}{2}\delta+\dfrac{1-i}{2}\alpha$

さて，四角形 PQRS が平行四辺形であるための必要十分条件は，

$$\frac{z+v}{2}=\frac{u+w}{2},\ z+v=u+w$$

すると，$\dfrac{1+i}{2}\alpha+\dfrac{1-i}{2}\beta+\dfrac{1+i}{2}\gamma+\dfrac{1-i}{2}\delta=\dfrac{1+i}{2}\beta+\dfrac{1-i}{2}\gamma+\dfrac{1+i}{2}\delta+\dfrac{1-i}{2}\alpha$

$$i\alpha-i\beta+i\gamma-i\delta=0,\ \alpha+\gamma=\beta+\delta\cdots\cdots\cdots(*)$$

よって，$\dfrac{\alpha+\gamma}{2}=\dfrac{\beta+\delta}{2}$となり，四角形 ABCD は平行四辺形である。

(3) 四角形 PQRS が平行四辺形であるとき，$(*)$より$\delta=\alpha-\beta+\gamma$となり，

$$\begin{aligned}w-z&=\frac{1+i}{2}\delta+\frac{1-i}{2}\alpha-\frac{1+i}{2}\alpha-\frac{1-i}{2}\beta\\&=\frac{1+i}{2}(\alpha-\beta+\gamma)+\frac{1-i}{2}\alpha-\frac{1+i}{2}\alpha-\frac{1-i}{2}\beta=\frac{1-i}{2}\alpha-\beta+\frac{1+i}{2}\gamma\end{aligned}$$

また，$u-z=\dfrac{1+i}{2}\beta+\dfrac{1-i}{2}\gamma-\dfrac{1+i}{2}\alpha-\dfrac{1-i}{2}\beta=-\dfrac{1+i}{2}\alpha+i\beta+\dfrac{1-i}{2}\gamma$から，

$$i(u-z)=-\frac{i+i^2}{2}\alpha+i^2\beta+\frac{i-i^2}{2}\gamma=\frac{1-i}{2}\alpha-\beta+\frac{1+i}{2}\gamma$$

よって，$w-z=i(u-z)$となり，すなわち S は P を中心に Q を$\dfrac{\pi}{2}$回転したものとなるので，PS$=$PQ かつ$\angle$QPS$=\dfrac{\pi}{2}$より四角形 PQRS は正方形である。

[解 説]

複素数と図形に関する頻出問題です。なお，(2)の平行四辺形については，「2 本の対角線が互いに他を二等分する」という条件を利用しています。