

1

[千葉大]

双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ ……①の漸近線 $y = x$ ……②上の点 $P_0 : (a_0, a_0)$ (ただし $a_0 > 0$) を通る双曲線①の接線を考え、接点を Q_1 とする。 Q_1 を通り漸近線②と垂直に交わる直線と、漸近線②との交点を $P_1 : (a_1, a_1)$ とする。次に P_1 を通る双曲線①の接線の接点を Q_2 , Q_2 を通り漸近線②と垂直に交わる直線と、漸近線②との交点を $P_2 : (a_2, a_2)$ とする。この手続きを繰り返して同様にして点 $P_n : (a_n, a_n)$, Q_n を定義していく。

- (1) Q_n の座標を a_n を用いて表せ。
- (2) a_n を a_0 を用いて表せ。
- (3) $\triangle P_n Q_n P_{n-1}$ の面積を求めよ。

2

[金沢大]

曲線 $C: x^2 + 4y^2 = 4$ 上を動く点 P と、 C 上の定点 $Q(2, 0)$, $R(0, 1)$ がある。次の問いに答えよ。

- (1) $\triangle PQR$ の面積の最大値と、そのときの P の座標を求めよ。
- (2) (1)で求めた点 P に対して直線 PQ を考える。曲線 C によって囲まれた図形を直線 PQ で2つに分けたとき、直線 PQ の下方にある部分の面積を求めよ。

3

[金沢大]

座標平面上の放物線 $y = x^2$ 上に点 $P(t, t^2)$ ($t > 0$) をとる。原点 $O(0, 0)$ を通り、直線 OP に垂直な直線を l とする。また、 $0 < a \leq 1$ として、点 $A(0, a)$ をとる。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 直線 PA と l は交わることを示し、その交点 $Q(u, v)$ の座標を t と a を用いて表せ。
- (2) t がすべての正の実数値をとって変化するとき、(1)で求めた点 $Q(u, v)$ の軌跡が $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$ を通るとする。このとき、定数 a の値を求め、点 $Q(u, v)$ の軌跡を求めよ。

4

[金沢大]

a, b, c を正の数とする。楕円 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ が、4 点 $(c, 0), (0, c), (-c, 0), (0, -c)$ を頂点とする正方形の各辺に接しているとする。4 つの接点を頂点とする四角形の面積を S 、楕円 C で囲まれる図形の面積を T とする。このとき、不等式 $\frac{S}{T} \leq \frac{2}{\pi}$ が成り立つことを証明せよ。また、等号が成り立つのはどのようなときか答えよ。