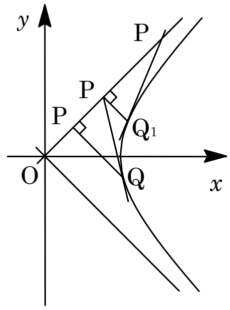
1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［千葉大］



(1)　双曲線 $x^2-y^2=1$ ……①上の点 $\mathrm{Q}_n(b_n,\ c_n)$，その漸近線 $y=x$ ……②上の点 $\mathrm{P}_n(a_n,\ a_n)$ に対して，

$$b_n{}^2-c_n{}^2=1,\ (b_n+c_n)(b_n-c_n)=1\ \cdots\cdots\cdots③$$

点 Q_n を通り，漸近線②に垂直な直線は，

$$x+y=b_n+c_n$$

この直線が $\mathrm{P}_n(a_n,\ a_n)$ を通ることより，

$$2a_n=b_n+c_n\ \cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$b_n-c_n=\dfrac{1}{2a_n}$ ……⑤となり，④⑤から，

$$b_n=\frac{1}{2}\Big(2a_n+\frac{1}{2a_n}\Big)=a_n+\frac{1}{4a_n},\ c_n=\frac{1}{2}\Big(2a_n-\frac{1}{2a_n}\Big)=a_n-\frac{1}{4a_n}$$

よって，$\mathrm{Q}_n\Big(a_n+\dfrac{1}{4a_n},\ a_n-\dfrac{1}{4a_n}\Big)$ である。

(2)　点 Q_n における①の接線は，(1)から，$\Big(a_n+\dfrac{1}{4a_n}\Big)x-\Big(a_n-\dfrac{1}{4a_n}\Big)y=1$

この接線が点 $\mathrm{P}_{n-1}(a_{n-1},\ a_{n-1})$ を通るので，

$$\Big(a_n+\frac{1}{4a_n}\Big)a_{n-1}-\Big(a_n-\frac{1}{4a_n}\Big)a_{n-1}=1,\ \frac{1}{2a_n}a_{n-1}=1$$

よって，$a_n=\dfrac{1}{2}a_{n-1}$ となり，$a_n=a_0\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^n$ である。

(3)　$\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n-1}$ は $\angle\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n=90^\circ$ の直角三角形であり，

$$\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n=\sqrt{2}(a_{n-1}-a_n)=\sqrt{2}(2a_n-a_n)=\sqrt{2}a_n$$

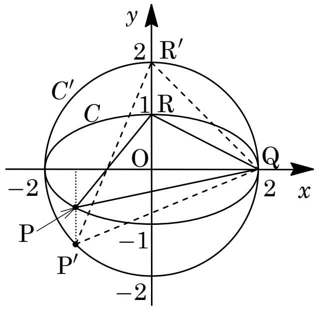
$$\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n=\sqrt{\Big(a_n+\frac{1}{4a_n}-a_n\Big)^2+\Big(a_n-\frac{1}{4a_n}-a_n\Big)^2}=\sqrt{\frac{1}{8a_n{}^2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}a_n}$$

よって，$\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n-1}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}a_n\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{2}a_n}=\dfrac{1}{4}$ である。

［解　説］

漸化式の双曲線への応用問題です。煩わしい計算の多い 2 次曲線としては，計算量は少なめです。

$\boxed{2}$ ［金沢大］



(1)　まず，楕円 $C: x^2+4y^2=4$ を y 軸方向に 2 倍拡大して，円 $C': x^2+y^2=4$ をつくるとする。

このとき，点 P は $\mathrm{P'}$，点 $\mathrm{R}(0,\ 1)$ は $\mathrm{R'}(0,\ 2)$ に対応し，点 $\mathrm{Q}(2,\ 0)$ の位置は変わらない。

すると，$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{P'QR'}$ より，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積が最大になるのは，$\triangle\mathrm{P'QR'}$ の面積が最大のときである。

このときの点 $\mathrm{P'}$ の座標は，直線 $y=x$ に関する対称性から，$\mathrm{P'}\left(2\cos\dfrac{5}{4}\pi,\ 2\sin\dfrac{5}{4}\pi\right)$ すなわち $\mathrm{P'}(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$ である。また最大値は,

$$\triangle\mathrm{P'QR'}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2+\frac{1}{2}\cdot2\cdot\sqrt{2}+\frac{1}{2}\cdot2\cdot\sqrt{2}=2+2\sqrt{2}$$

よって，$\triangle\mathrm{PQR}$ は $\mathrm{P}\left(-\sqrt{2},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ のときに最大となり，最大値は,

$$\frac{1}{2}(2+2\sqrt{2})=1+\sqrt{2}$$

(2)　(1)と同様にして，円 C' の内側で直線 $\mathrm{P'Q}$ の下方にある部分の面積は,

$$\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\frac{3}{4}\pi-\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\sin\frac{3}{4}\pi=\frac{3}{2}\pi-\sqrt{2}$$

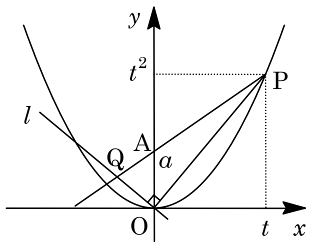
よって，楕円 C の内側で直線 PQ の下方にある部分の面積は,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\pi-\sqrt{2}\right)=\frac{3}{4}\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

［解　説］

楕円を円に変換して処理する解法を採用しました。そうすると，計算はほとんど不要といってよいぐらいの解答例になります。

$\boxed{3}$ ［金沢大］



(1) $\mathrm{P}(t,\ t^2)\ (t>0)$ に対して，OP の傾きは t より，O を通り OP に垂直な直線 l の方程式は，

$$y=-\frac{1}{t}x\ \cdots\cdots\cdots ①$$

$\mathrm{A}(0,\ a)\ (0<a\leqq 1)$ に対して，直線 PA の方程式は，

$$y=\frac{t^2-a}{t}x+a\ \cdots\cdots\cdots ②$$

ここで，$\dfrac{t^2-a}{t}=-\dfrac{1}{t}$ とすると $\dfrac{t^2-a+1}{t}=0$ となるが，$t^2>0$，$0<a\leqq 1$ から成立しない。よって，直線 PA と l は交わる。

そこで，①②を連立すると，$\dfrac{t^2-a}{t}x+a=-\dfrac{1}{t}x$ より，

$$x=-\frac{at}{t^2-a+1},\quad y=\frac{a}{t^2-a+1}$$

①と②の交点が $\mathrm{Q}(u,\ v)$ より，$u=-\dfrac{at}{t^2-a+1}$，$v=\dfrac{a}{t^2-a+1}$

(2) 点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ の軌跡が $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ 1\right)$ を通ることより，(1)から，

$$-\frac{at}{t^2-a+1}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\ \cdots\cdots\cdots ③,\quad \frac{a}{t^2-a+1}=1\ \cdots\cdots\cdots ④$$

④より $t^2-a+1=a$ となり，③に代入すると，$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となるので，④から，

$$a=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+1\right)=\frac{2}{3}$$

このとき，(1)から，$u=-\dfrac{2t}{3t^2+1}\ \cdots\cdots ⑤$，$v=\dfrac{2}{3t^2+1}\ \cdots\cdots ⑥$

すると，$v\neq 0$ から $t=-\dfrac{u}{v}$ となり，⑥に代入すると $v\left(3\cdot\dfrac{u^2}{v^2}+1\right)=2$ から，

$$\frac{3u^2}{v}+v=2,\quad 3u^2+v^2=2v,\quad 3u^2+(v-1)^2=1$$

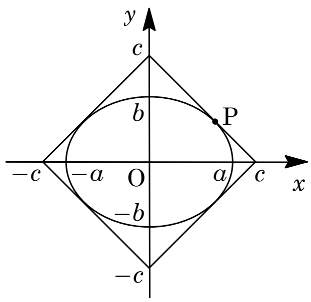
ここで，⑤を $u=-\dfrac{2}{3t+\dfrac{1}{t}}$ と変形すると，$3t+\dfrac{1}{t}\geqq 2\sqrt{3}$ から $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leqq u<0$ となり，また⑥から，$3t^2+1>1$ より $0<v<2$ である。

以上より，点 Q の軌跡は，楕円 $3x^2+(y-1)^2=1$ の第 2 象限の部分である。

［解 説］

パラメータ表示された点の軌跡の問題です。ただ，軌跡に限界が現れる点には注意が必要です。

$\boxed{4}$ ［金沢大］



楕円 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ と 4 点 $(c,\ 0)$，$(0,\ c)$，$(-c,\ 0)$，$(0,\ -c)$ を頂点とする正方形の第 1 象限の接点 P の座標を $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，接線の方程式は，

$$\frac{a\cos\theta}{a^2}x+\frac{b\sin\theta}{b^2}y=1,\quad \frac{\cos\theta}{a}x+\frac{\sin\theta}{b}y=1$$

この接線が，点 $(c,\ 0)$，$(0,\ c)$ を通るので，

$$\frac{c\cos\theta}{a}=1\ \cdots\cdots\cdots①,\quad \frac{c\sin\theta}{b}=1\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\cos\theta=\dfrac{a}{c}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{c}$ となり，$\left(\dfrac{a}{c}\right)^2+\left(\dfrac{b}{c}\right)^2=1$，$a^2+b^2=c^2\ \cdots\cdots\cdots③$

このとき，第 1 象限の接点の座標は $\left(\dfrac{a^2}{c},\ \dfrac{b^2}{c}\right)$ となり，4 つの接点を結んでできる四角形は，対称性から長方形となるので，③を利用すると，その面積 S は，

$$S=4\cdot\frac{a^2}{c}\cdot\frac{b^2}{c}=\frac{4a^2b^2}{c^2}=\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$$

また，楕円 C で囲まれる図形の面積 T は，

$$T=\pi a^2\cdot\frac{b}{a}=\pi ab$$

このとき，$\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{S}{T}=\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4a^2b^2}{a^2+b^2}\cdot\dfrac{1}{\pi ab}=\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4ab}{\pi(a^2+b^2)}=\dfrac{2}{\pi}\left(1-\dfrac{2ab}{a^2+b^2}\right)\cdots\cdots\cdots④$

ここで，相加平均と相乗平均の関係より，

$$a^2+b^2\geqq 2\sqrt{a^2b^2}=2ab,\quad \frac{2ab}{a^2+b^2}\leqq 1\ \ (\text{等号は}\ a=b\ \text{のとき成立})\cdots\cdots\cdots⑤$$

④⑤より，$\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{S}{T}\geqq 0$，すなわち $\dfrac{S}{T}\leqq\dfrac{2}{\pi}$ が成り立つ。

また，等号成立は，③も合わせると，$a=b=\dfrac{c}{\sqrt{2}}$ のときである。

［解 説］

楕円を題材とした基本的な問題です。式変形を進めると，相加平均と相乗平均の関係を利用することが推測できます。もっとも，c と θ で処理する手もありますが。